量子 Weyl 群と $\widetilde{\mathcal{R}}_i^{-1}(\tilde{w}_i \otimes \tilde{w}_i)$ の組紐関係式

黒木 玄

2006 年 2 月 15 日午前 6 時直前

目 次

1　はじめに

現在 2006 年 2 月 15 日午前 4 時半. アイデアを思い付いたのでメモを残しておく.

量子展開環に関する記号と定義は基本的に Chari-Pressley の教科書にしたがうものとする. しかし, 面倒なので添え字の h を省略することがある. たとえばこのメモの $\widetilde{\mathcal{R}}_i$ は Chari-Pressley では $\widetilde{\mathcal{R}}_{h,i}$ と書かれている. (本当はさらに $\widetilde{\mathcal{R}}_i$ を $\mathcal{R}_i$ と書きたい.) 量子展開環も単に U と書くことにする.

2　$\widetilde{\mathcal{R}}_i^{-1}(\tilde{w}_i \otimes \tilde{w}_i)$ の braid relations

Chari-Pressley 8.2C 節 Prop. 8.2.5 によれば量子 Weyl 群の元 $\tilde{w}_i$ によって量子展開環 U への braid group action が次のように実現される:

$$T_i(a) = \tilde{w}_i a \tilde{w}_i^{-1} \qquad (a \in U).$$

同節 Prop. 8.2.6 によれば $\tilde{w}_i$ たちは次の関係式を満たしている:

$$\Delta_h(\tilde{w}_i) = \widetilde{\mathcal{R}}_i^{-1}(\tilde{w}_i \otimes \tilde{w}_i).$$

ここで

$$\widetilde{\mathcal{R}}_i = \exp_{q_i}\left[(1-q_i^{-2})X_i^+ \otimes X_i^-\right], \qquad \exp_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k(k+1)/2}\frac{x^k}{[k]_q!}.$$

同節最後の Remark で $\tilde{w}_i$ たちは次の braid relations を満たしている: $i \neq j$ のとき

$$a_{ij}a_{ji} = 0 \implies \tilde{w}_i\tilde{w}_j = \tilde{w}_j\tilde{w}_i,$$

$$\begin{aligned} a_{ij}a_{ji} = 1 &\implies \tilde{w}_i\tilde{w}_j\tilde{w}_i = \tilde{w}_j\tilde{w}_i\tilde{w}_j, \\ a_{ij}a_{ji} = 2 &\implies \tilde{w}_i\tilde{w}_j\tilde{w}_i\tilde{w}_j = \tilde{w}_j\tilde{w}_i\tilde{w}_j\tilde{w}_i, \\ a_{ij}a_{ji} = 3 &\implies \tilde{w}_i\tilde{w}_j\tilde{w}_i\tilde{w}_j\tilde{w}_i\tilde{w}_j = \tilde{w}_j\tilde{w}_i\tilde{w}_j\tilde{w}_i\tilde{w}_j\tilde{w}_i. \end{aligned}$$

定理 1 $\widetilde{\mathcal{R}}_i^{-1}(\tilde{w}_i \otimes \tilde{w}_i)$ は braid relations を満たしており, それらの conjugations によって $U \otimes U$ への braid group action が定まる.

証明. $\tilde{w}_i$ たちの満たす braid relations に coproduct Δ をほどこせば $\widetilde{\mathcal{R}}_i^{-1}(\tilde{w}_i \otimes \tilde{w}_i)$ たちの braid relations が得られる. よってそれらの conjugations によって $U \otimes U$ への braid group action が定まる. □

3 考察

$\widetilde{\mathcal{R}}_i^{-1}(\tilde{w}_i \otimes \tilde{w}_i)$ たちが braid relations を満たしているという結果は非常に示唆的である.

なぜならば, 我々の Weyl 群作用も似たような形をしているからである. 我々の Weyl 群作用は F_i たちのある種の q-exponential U_i と a_i たちだけを conjugation で動かす Weyl 群の元 σ_i の積 $U_i\sigma_i$ による conjugation で実現されているからである. あたかも U_i と σ_i のそれぞれと $\widetilde{\mathcal{R}}_i^{-1}$ と $\tilde{w}_i \otimes \tilde{w}_i$ が対応しているように見える.

ただしこの観察が正しいとしても対応は非自明である. $\widetilde{\mathcal{R}}_i^{-1}(\tilde{w}_i \otimes \tilde{w}_i)$ による conjugation は $U \otimes U$ そのものへの作用になっているが, 我々の Weyl 群作用は有理作用になっている.

我々の有理作用は古典の場合には通常の Weyl 群作用を Gauss 分解を通して見直したものになっている. Gauss 分解が正則写像ではなく, 有理写像なので Weyl 群作用も有理作用になってしまう. この仕組みの量子化を考えることは我々にとって基本的な問題である.

古典の場合との類似を考えれば Gauss 分解の量子化は $U \otimes U$ の "reduction" で得られるはずである.