$n!/(k!(n-k)!)$ が整数になることの証明

黒木 玄

2008年7月2日(水) 作成

目 次

1 直接的証明 1

2 Pascal の三角形と二項定理 2

3 順列と組み合わせ 2

4 有限群の位数はその任意の部分群の位数で割り切れる 3

1 直接的証明

正の整数 n と 0 以上 n 以下の整数 k を任意に取る．このとき $n!$ が $k!(n-k)!$ で割り切れることを証明しよう．$k=0,n$ のときは明らかなので $1 \leqq k \leqq n-1$ であると仮定する．

p は素数であるとする．0 でない整数 n に対して n の素因数分解に現われる p べきの指数を $\operatorname{ord}_p n$ と書くことにする．すなわち $\operatorname{ord}_p n$ は p^k が n を割り切る最大の整数 k に等しい．実数 x に対して x を超えない最大の整数を $[x]$ と書くことにする．このとき正の整数 n に対して

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ord}_p n! &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \cdot \sharp\{\text{ ちょうど } p^\nu \text{ で割り切れる 1 以上 } n \text{ 以下の整数 }\} \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \cdot \sharp\{1 \text{ 以上 } n \text{ 以下の } p^\nu \text{ の倍数 }\} - \sum_{\nu=1}^{\infty} (\nu-1) \cdot \sharp\{1 \text{ 以上 } n \text{ 以下の } p^\nu \text{ の倍数 }\} \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sharp\{1 \text{ 以上 } n \text{ 以下の } p^\nu \text{ の倍数の個数 }\} \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^\nu}\right].
\end{aligned}
$$

実数 x, y に対して $x+y=[x]+[y]+(x-[x])+(y-[y])$ なので

$$
[x+y] = \begin{cases} [x]+[y] & ((x-[x])+(y-[y])<1), \\ [x]+[y]+1 & ((x-[x])+(y-[y]) \geqq 1). \end{cases}
$$

よって特に $[x+y] \geqq [x]+[y]$ である．したがって正の整数 x,y に対して

$$
\operatorname{ord}_p (x+y)! \geqq \operatorname{ord}_p x! + \operatorname{ord}_p y!
$$

となる．すなわち各素数 p において $\operatorname{ord}_p n! \geqq \operatorname{ord}_p k! + \operatorname{ord}_p(n-k)!$ となる．これより $n!$ が $k!(n-k)!$ で割り切れることがわかる．

2 Pascal の三角形と二項定理

非負の整数 k に対して x の函数 $\binom{x}{k}$ を次のように定める:

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}.$$

$\binom{x}{k}$ を**二項係数**と呼ぶ．二項係数は次を満たしている：

$$\binom{x+1}{k} = \binom{x}{k-1} + \binom{x}{k}.$$

ただし $\binom{x}{-1} = 0$ と約束しておく．この公式を **Pascal の三角形**と呼ぶ．実際,

$$\begin{aligned}\binom{x+1}{k} &= \frac{(x+1)x(x-1)\cdots(x-k+2)}{k!} \\ &= \frac{(k+(x-k+1))x(x-1)\cdots(x-k+2)}{k!} \\ &= \frac{x(x-1)\cdots(x-k+2)}{(k-1)!} + \frac{x(x-1)\cdots(x-k+2)(x-k+1)}{k!} \\ &= \binom{x}{k-1} + \binom{x}{k}.\end{aligned}$$

正の整数 n と 0 以上 n 以下の整数 k に対して

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

Pascal の三角形を用いた n に関する数学的帰納法で $\binom{n}{k}$ が整数になることを示せる．これで $n!$ が $k!(n-k)!$ で割り切れることがわかった．

Pascal の三角形を用いた n に関する数学的帰納法で二項定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

を示せる．このことからも $\binom{n}{k}$ が整数になることがわかる．

3 順列と組み合わせ

$1, 2, \ldots, n$ から異なる数を k 個選んで順番に並べたものを n 個から k 個取った**順列**と呼ぶ．たとえば, $n=5$, $k=3$ のとき, $(1,2,3)$, $(3,2,5)$, $(3,4,2)$ などは 5 個から 3 個取った順列である．

n 個から k 個取った順列全体の集合を $\mathcal{P}_{n,k}$ と表わす．$\mathcal{P}_{n,k}$ の元の個数は $n!/(n-k)!$ に等しい．

$\mathcal{P}_{n,k}$ には k 次の置換群 S_k が次のように右から作用する:

$$(i_1, i_2, \dots, i_k) \cdot \sigma = (i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \dots, i_{\sigma(k)}) \quad (\sigma \in S_k,\ (i_1, i_2, \dots, i_k) \in \mathcal{P}_{n,k}).$$

この作用の S_k 軌道の元の個数はすべて $k!$ になる. したがって $n!/(n-k)!$ は $k!$ で割り切れなければいけない.

$1, 2, \dots, n$ から異なる数を k 個選んで作った集合を n 個から k 個取った**組み合わせ**と呼ぶ. たとえば, $n=5$, $k=3$ のとき, $\{1,2,3\}$, $\{3,2,5\}$, $\{3,4,2\}$ などは 5 個から 3 個取った組み合わせである.

n 個から k 個取った組み合わせ全体の集合を $\mathcal{C}_{n,k}$ と表わす. 写像 $f : \mathcal{P}_{n,k} \to \mathcal{C}_{n,k}$ を $f(i_1, i_2, \dots, i_k) = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ と定めると, f は全射でかつその任意のファイバーはある S_k 軌道に一致している. よって $\mathcal{P}_{n,k}$ を S_k で割ってできる商集合と $\mathcal{C}_{n,k}$ のあいだには自然な全単射が存在する.

以上によって $\mathcal{C}_{n,k}$ の元の個数は $n!/(k!(n-k)!)$ に等しいことがわかる.

4 有限群の位数はその任意の部分群の位数で割り切れる

一般に有限群の位数はその任意の部分群の位数で割り切れる.

n 次の置換群を S_n と書く. $\{1, \dots, k\}$ と $\{k+1, \dots, n\}$ の両方を保つ n 次の置換全体のなす S_n の部分群を H と書くと, H は自然に $S_k \times S_{n-k}$ と同一視できる. S_n の位数は $n!$ であり, $H = S_k \times S_{n-k}$ の位数は $k!(n-k)!$ なので, $n!$ は $k!(n-k)!$ で割り切れる.

写像 $g : S_n \to \mathcal{P}_{n,k}$ を $g(\sigma) = (\sigma(1), \dots, \sigma(k))$ と定めると, g は S_n/S_{n-k} から $\mathcal{P}_{n-k}$ への全単射を誘導する. さらに $h : S_n \to \mathcal{C}_{n,k}$ を $g(\sigma) = \{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\}$ と定めると $h = f \circ g$ であり, h は $S_n/(S_k \times S_{n-k})$ から $\mathcal{C}_{n,k}$ への全単射を誘導する.