Taylor の定理

黒木 玄

2008 年 11 月 14 日更新　(2008 年 11 月 11 日作成)

目 次

1 高階の導函数と Taylor 展開の形の推測

1.1 n 階の導函数 $f^{(n)}$

$x \to a$ で $f(x), g(x) \to 0$ となると仮定する．$f(x) = o(g(x))$ $(x \to a)$ であるとは $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ が成立することである

(0) 函数 f が 0 回微分可能であるとは f が連続なことである．すなわち f の定義域に含まれる任意の a に対して

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \qquad i.e. \quad f(x) = f(a) + o(1) \quad (x \to a)$$

が成立することである．f 自身を f の 0 階の導函数と呼び，$f^{(0)}$ と書くことがある．

(1) 函数 f が 1 回微分可能であるとは f が微分可能なことである．すなわち f の定義域に含まれる任意の a に対してある数 A が存在して

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A, \qquad i.e. \quad f(x) = f(a) + A(x - a) + o(x - a) \quad (x \to a)$$

が成立することである．このとき $f'(a) = A$ とおく．このようにして定まる函数 f' を f の**導函数 (derivative)** と呼ぶ．f' を f の 1 階の導函数と呼び, $f^{(1)}$ と書くことがある．

(2) 函数 f が 2 回微分可能であるとは f が微分可能でかつその導函数 f' も微分可能なことである．f' の導函数 f'' を f の 2 階の導函数と呼び, $f^{(2)}$ と書くことがある．

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

(n) 函数 f が n 回微分可能であるとは f が $n-1$ 回微分可能でかつその $n-1$ 階の導函数 $f^{(n-1)}$ も微分可能なことである．$f^{(n-1)}$ の導函数を f の n 階の導函数と呼び, $f^{(n)}$ と書くことがある．

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

例 1.1 整数 n と非負の整数 k に対して $f(x) = (x-a)^n$ とおくと,

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(x-a)^{n-k}. \quad \square$$

証明. 帰納的に

$$\begin{aligned}
&f^{(0)}(x) = (x-a)^n, \\
&f^{(1)}(x) = n(x-a)^{n-1}, \\
&f^{(2)}(x) = n(n-1)(x-a)^{n-2}, \\
&f^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&f^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(x-a)^{n-k}
\end{aligned}$$

となることが容易に確かめられる． $\square$

注意 1.2 上の補題において n は負の整数であっても構わない．実は n は整数である必要すらなく, 任意の数であっても構わない． $\square$

1.2 Taylor 展開の形の推測

n は正の整数であり, f は $a \in \mathbb{R}$ のある開近傍で定義された n 回微分可能な実数値函数であるとする．実数 $a_0, a_1, \dots, a_n$ に対して n 次函数 $p(x)$ を次のように定める:

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n.$$

このとき次の命題が成立している．函数 f が $x = a$ の近くで n 次函数 p でよく近似されるようにしたい．そのためには係数 a_k たちをどのように定めるのが良いだろうか?

命題 1.3 $k = 0, 1, \dots, n$ に対して

$$f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a) \iff a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a). \quad \square$$

証明. $(x-a)^l$ の k 階導関数は $k \leqq l$ のとき $l(l-1)(l-2)\cdots(l-k+1)(x-a)^{l-k}$ になり, $k > l$ のとき 0 になる. よって $p(x) = \sum_{l=0}^n a_l(x-a)^l$ の k 階導函数は次の形になる:

$$p^{(k)}(x) = \sum_{l=k}^{n} a_l\, l(l-1)(l-2)\cdots(l-k+1)(x-a)^{l-k}.$$

この右辺に $x = a$ を代入すると $l = k$ 以外の項は消えて,

$$p^{(k)}(a) = a_k\, k(k-1)(k-2)\cdots 1 = k! a_k$$

となることがわかる. したがって $f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a)$ と $a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)$ は同値である. □

この命題より, n 回微分可能函数 f に対して n 次函数 p を

$$p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

と定めると, $k = 0, 1, \dots, n$ に対して $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ が成立する. よって函数 f は $x = a$ の近くで n 次函数 p でよく近似されていると予想される. 次の節で実際にこの予想が正しいことを示そう.

2 二種類の Taylor の定理

2.1 スモールオーダー型の Taylor の定理の直接証明

定理 2.1 (スモールオーダー型の Taylor の定理) n は正の整数であり, f は $a \in \mathbb{R}$ のある開近傍で定義された n 回微分可能な実数値函数であるとする. このとき $x \to a$ で

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + o\bigl((x-a)^n\bigr). \quad \square$$

この定理を証明したい. 函数 F を

$$F(x) = f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n \right)$$

と定めると, F は n 回微分可能でかつ $F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0$ を満たしている. したがって次の命題が示されれば上の定理が証明されたことになる.

命題 2.2 n は正の整数であり, F は $a \in \mathbb{R}$ のある開近傍で定義された n 回微分可能な実数値函数であり, $F(a) = F'(a) = \cdots = F^{(n)}(a) = 0$ を満たしていると仮定する. このとき $x \to a$ で $F(x) = o((x-a)^n)$ である. □

証明. n に関する帰納法で証明しよう.

$n = 1$ の場合. このとき F は微分可能でかつ $F(a) = F'(a) = 0$ を満たしているので,

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x-a} = F'(a) = 0.$$

すなわち $F(x) = o(x-a)$ である.

$n \geqq 2$ の場合．$n-1$ まで定理の主張が成立していると仮定する (帰納法の仮定 $(*)$)．$G(x) = \dfrac{F(x)}{x-a}$ $(x \neq a)$, $G(a) = 0$ とおく．このとき G が $x \neq a$ で $n-1$ 回微分可能で $k = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して G の $x \neq a$ における k 階導函数が次の形になることはすぐにわかる:

$$G^{(k)}(x) = \frac{F^{(k)}(x)}{x-a} + a_1^{(k)} \frac{F^{(k-1)}(x)}{(x-a)^2} + \cdots + a_{k-1}^{(k)} \frac{F'(x)}{(x-a)^{k-1}} + a_k^{(k)} \frac{F(x)}{(x-a)^k}.$$

ここで $a_l^{(k)}$ はある定数である．$k = 1, 2, \ldots, n-1$ について帰納的に, $x = a$ でも G は k 回微分可能で $G^{(k)}(a) = 0$ となることを示そう．まず帰納法の仮定 $(*)$ より $x \to a$ のとき

$$\frac{G(x) - G(a)}{x-a} = \frac{F(x)}{(x-a)^2} \to 0.$$

これは $G(x)$ が $x = a$ で微分可能でかつ $G'(a) = 0$ となることを意味している．そこで, $k = 2, \ldots, n-1$ であるとし, $G(x)$ が $x = a$ でも $k-1$ 回微分可能で $G^{(k-1)}(a) = 0$ となると仮定しよう．そのとき帰納法の仮定 $(*)$ より $x \to a$ のとき

$$\frac{G^{(k-1)}(x) - G^{(k-1)}(a)}{x-a} = \frac{F^{(k-1)}(x)}{(x-a)^2} + a_1^{(k-1)} \frac{F^{(k-2)}(x)}{(x-a)^3} + \cdots + a_{k-1}^{(k-1)} \frac{F(x)}{(x-a)^k} \to 0.$$

これは $G^{(k-1)}(x)$ が $x = a$ で微分可能でかつ $G^{(k)}(a) = 0$ となることを意味している．これで G が $n-1$ 回微分可能で $G(a) = G'(a) = \cdots = G^{(n-1)}(a) = 0$ を満たしていることがわかった．そこで帰納法の仮定 $(*)$ を G に適用すると $G(x) = o((x-a)^{n-1})$ であることがわかる．$F(x) = (x-a)G(x)$ なので $F(x) = o((x-a)^n)$． □

2.2 l'Hospital の定理

定理 2.3 (l'Hospital の定理)

1. f, g がともに $x = a$ で微分可能で $f(a) = g(a) = 0$ かつ $g'(a) \neq 0$ ならば
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$
2. f, g がともに 2 回微分可能で $f(a) = g(a) = f'(a) = g'(a) = 0$ かつ $g''(a) \neq 0$ ならば
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(a)}{g''(a)}.$$
3. f, g がともに n 回微分可能であり, f, g の $x = a$ における $n-1$ 階以下の微係数がすべて 0 であり, $g^{(n)}(a) \neq 0$ ならば
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}. \quad \square$$

証明. 2 の主張のみを証明しよう．(最も一般の 3 の場合の証明も同様であり, 1 の証明はより簡単である.) f, g はともに 2 回微分可能なので Taylor の定理より,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + o((x-a)^2),$$

$$g(x) = g(a) + g'(a)(x-a) + \frac{1}{2}g''(a)(x-a)^2 + o((x-a)^2).$$

よって $f(a) = g(a) = f'(a) = g'(a) = 0$ かつ $g''(a) \neq 0$ ならば $x \to a$ のとき

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + o((x-a)^2)}{\frac{1}{2}g''(a)(x-a)^2 + o((x-a)^2)} = \frac{f''(a) + 2\dfrac{o((x-a)^2)}{(x-a)^2}}{g''(a) + 2\dfrac{o((x-a)^2)}{(x-a)^2}} \to \frac{f''(a)}{g''(a)}. \quad \square$$

よく引用される定理なので念のために l'Hopistal の定理を紹介したが, 実際の計算では Taylor の定理を直接使っても同じ手間ですんだり, より簡単になる場合が多い.

問題 2.4 $f(x) = \sin(x^{10})$, $g(x) = e^{x^5} - 1 - x^5$ のとき $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ を求めよ. □

注意 2.5 この問題を l'Hospital の定理で処理しようとすると悲惨なことになる. f, g をともに 10 回微分しなければいけない! □

解答例. l'Hospital の定理を使わずに Taylor の定理を直接使うことにしよう. $x \to a$ で $\sin x = x + o(x)$ なので $\sin(x^{10}) = x^{10} + o(x^{10}) = x^{10}(1 + o(1))$ であり, $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ なので $e^{x^5} - 1 - x^5 = \frac{1}{2}x^{10} + o(x^{10}) = \frac{1}{2}x^{10}(1 + o(1))$ である. そして一般に $x \to 0$ のとき $(1 + o(1))^n \to 1$ より $(1 + o(1))^n = 1 + o(1)$ である. よって $x \to 0$ のとき

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^{10}(1 + o(1))}{\frac{1}{2}x^{10}(1 + o(1))} = 2\frac{1 + o(1)}{1 + o(1)} \to 2. \quad \square$$

2.3　平均値の定理

定理 2.6 (平均値の定理) $a < b$ であるとし, f は閉区間 $[a, b]$ 上の実数値連続函数であり, 開区間 (a, b) 上で微分可能であるとすると, ある $c \in (a, b)$ で次をみたすものが存在する:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

証明. $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ とおくと, g は $[a, b]$ 上連続で (a, b) 上微分可能であり, $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ かつ $g(a) = g(b) = 0$ となる. もしもこの g について平均値の定理が成立し, ある $c \in (a, b)$ で $g'(c) = 0$ を満たすものの存在が示されたならば, $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ が導かれ, f に関する平均値の定理も示される. したがって $f(a) = f(b)$ の場合に平均値の定理が示されれば十分である.

$f(a) = f(b)$ と仮定する. f が定数函数ならば明らかなので, f は定数函数ではないと仮定する. f は $[a, b]$ 上連続なので最大値 $M = f(\alpha)$, 最小値 $m = f(\beta)$ $(\alpha, \beta \in [a, b])$ を持つ. f は定数ではないので M または m は $f(a) = f(b)$ に等しくない. $M \neq f(a) = f(b)$ であると仮定する. ($m \neq f(a) = f(b)$ の場合も同様である.) そのとき $\alpha \in (a, b)$ である. $M = f(\alpha)$ は f の $[a, b]$ における最大値なので任意の $x \in [a, b]$ に対して $f(x) \leqq M = f(\alpha)$ である. さらに f は (a, b) 上で微分可能なので

$$0 \leqq f(x) - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) + o(x - \alpha).$$

$x > \alpha$ のときこの不等式の全体を $x - \alpha > 0$ で割り, $x \to \alpha$ とすると $0 \leqq f'(\alpha)$ であることがわかる. 同様に $x > \alpha$ のときこの不等式の全体を $x - \alpha < 0$ で割ると, $\leqq$ が $\geqq$ に変化するので, $x \to \alpha$ とすると $0 \geqq f'(\alpha)$ であることがわかる. したがって $f'(\alpha) = 0$. □

平均値の定理は次の形で使われることが多い.

系 2.7 (平均値の定理 (の言い換え)) f は $a \in \mathbb{R}$ の開近傍上で定義された実数値微分可能函数であるとする. このとき a に十分近い任意の x に対して, a と x のあいだにある実数 $\tilde{x}$ で次を満たすものが存在する:

$$f(x) = f(a) + f'(\tilde{x})(x - a)$$

$x \neq a$ のときこのような $\tilde{x}$ として a でも x でもないものが取れる. □

証明. 平均値の定理における $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ は $f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$ および $f(a) = f(b) + f'(c)(a-b)$ と同値である. よって平均値の定理における a, b をそれぞれ, $a < x$ のとき a, x で, $x < a$ のとき x, a で置き換えれば欲しい結果が得られる. □

2.4 剰余項型の Taylor の定理の平均値の定理を用いた証明

定理 2.8 (剰余項型の Taylor の定理) n は正の整数であり, f は $a \in \mathbb{R}$ のある開近傍で定義された n 回微分可能な実数値函数であるとする. このとき a に十分近い任意の x に対して a と x のあいだにある実数 $\tilde{x}$ で

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} \\ + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\tilde{x})(x-a)^n \end{aligned}$$

を満たすものが存在する. □

証明. $x = a$ ならば定理の成立は明らかなので $x \neq a$ と仮定する. 以下この x を固定された定数であるかのように扱う. このとき実数 K で次を満たすものが存在する:

$$\begin{aligned} f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} \\ + \frac{1}{n!}K(x-a)^n. \end{aligned}$$

この等式の両辺の a を t で置き換えて左辺と右辺の差を取ってできる t の函数を $F(t)$ と表わす:

$$\begin{aligned} F(t) = f(x) - \Biggl(& f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{1}{2!}f''(t)(x-t)^2 \\ & + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-1} + \frac{1}{n!}K(x-t)^n \Biggr). \end{aligned}$$

このとき $F(x) = 0$ であり, K の定義より $F(a) = 0$ となる. よって $F(t)$ に平均値の定理を適用することによって, a と x のあいだにある実数 $\tilde{x}$ で $F'(\tilde{x}) = 0$ をみたすものが存在することがわかる. $F'(t)$ を具体的に計算すると

$$F'(t) = -\left(f'(t) + \left(-f'(t) + f''(t)(x-t) \right) + \left(-f''(t)(x-t) + \frac{1}{2!}f''(t)(x-t)^2 \right) \right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\cdots+\left(-\frac{1}{(n-2)!}f^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-2}+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\right)\\
&-\frac{1}{(n-1)!}K(x-t)^{n-1}\Bigg)\\
=&\ \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}-\frac{1}{(n-1)!}K(x-t)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

したがって $F'(\tilde{x})=0$ と $K=f^{(n)}(\tilde{x})$ は同値である．これで示すべきことが示された． □

注意 2.9 剰余項付きの Taylor の定理で $n=1$ とおくと平均値の定理が得られる．つまり剰余項付きの Taylor の定理は平均値の定理を含んでいる． □

3 高木貞治『解析概論』の方針

高木貞治著の『解析概論』では通常の平均値の定理 (Lagrange) を一般化した Cauchy の平均値の定理を用いて, 剰余項型とスモールオーダー型の Taylor の定理の両方を統一的に手際良く証明している．以下はその引き写しである．前節の証明の方針よりも『解析概論』の証明の方針の方が簡単で分かり易い．

3.1 Cauchy の平均値の定理

定理 3.1 (Cauchy の平均値の定理) $a<b$ であるとし, f,g は閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続函数であるとする．f,g は開区間 (a,b) 上で微分可能であり, f',g' は同時に 0 になることはなく, $g(a)\neq g(b)$ であると仮定する．このとき, ある $\xi\in(a,b)$ で次を満たすものが存在する:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad \square$$

証明. $F(t)=(g(b)-g(a))f(t)+(f(b)-f(a))g(t)$ とおくと, F は $[a,b]$ 上連続で (a,b) 上微分可能であり, $F'(t)=(g(b)-g(a))f'(t)+(f(b)-f(a))g'(t)$ かつ $F(a)=F(b)=f(a)g(b)-f(b)g(a)$ となる．$\xi\in(a,b)$, $F'(\xi)=0$ のとき $g'(\xi)=0$ ならば $g(a)\neq g(b)$ より $f'(\xi)=0$ となるので f',g' が同時に 0 にならないという仮定に反するので $g'(\xi)\neq 0$ でなければいけない．したがって, もしもある $\xi\in(a,b)$ で $F'(\xi)=0$ を満たすものが存在するならば定理の結果が導かれる．

F が定数函数ならばある $\xi\in(a,b)$ で $F'(\xi)=0$ を満たすものが存在することは明らかなので, F は定数函数ではないと仮定する．F は $[a,b]$ 上連続なので最大値 $M=F(\alpha)$, 最小値 $m=F(\beta)$ ($\alpha,\beta\in[a,b]$) を持つ．F は定数ではないので M または m は $F(a)=F(b)$ に等しくない．$M\neq F(a)=F(b)$ であると仮定する．($m\neq F(a)=F(b)$ の場合も同様である.) そのとき $\alpha\in(a,b)$ である．$M=F(\alpha)$ は F の $[a,b]$ における最大値なので任意の $x\in[a,b]$ に対して $F(x)\leqq M=f(\alpha)$ である．さらに F は (a,b) 上で微分可能なので $t\to\alpha$ で

$$0\leqq F(t)-F(\alpha)=F'(\alpha)(t-\alpha)+o(t-\alpha).$$

$t>\alpha$ のときこの不等式の全体を $t-\alpha>0$ で割り, $t\to\alpha$ とすると $0\leqq F'(\alpha)$ であることがわかる．同様に $t>\alpha$ のときこの不等式の全体を $t-\alpha<0$ で割ると, $\leqq$ が $\geqq$ に変化するので, $t\to\alpha$ とすると $0\geqq F'(\alpha)$ であることがわかる．したがって $F'(\alpha)=0$. □

注意 3.2 (Cauchy の平均値の直観的な意味) $t \in [a,b]$ を動かすと平面上の点 $P(t) = (f(t), g(t))$ は曲線を描く．時刻 $t \in (a,b)$ における速度ベクトル $(f'(t), g'(t))$ はその曲線に接している．(f', g' が (a,b) 上で同時に 0 になることがないという仮定より, 速度ベクトルは常に 0 でなくなる.)

Cauchy の平均値の定理の左辺 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ は曲線の始点 $A = (f(a), g(a))$ と終点 $B = (f(b), g(b))$ を結ぶ直線の傾きに等しい．($g(a) \neq g(b)$ という仮定より直線 AB の傾きが意味を持つ.)

図を描いてみれば直線 AB を平行移動して曲線に接するようにできることは直観的には明らかに感じられるはずだ．その接点を $C = (f(\xi), g(\xi))$ ($\xi \in (a,b)$) と表わそう．その接点における曲線の接線の方向は速度ベクトル $(f'(\xi), g'(\xi))$ に等しい．よってその接線の傾きは $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ に等しい.

以上のようにして直観的に $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ が得られる．(図を描いてみよ.)

図を描いて納得できるならば Cauchy の平均値の定理の証明を理解できなくても大して問題にならない．むしろ図を描いて Cauchy の平均値の定理が当然成立すべき結果であることを納得することの方が重要である．(もちろん将来数学で飯を食うつもりの人は厳密な証明も理解できていないとまずいのであるが.) □

Cauchy の平均値の定理を次のように言い換えることができる.

定理 3.3 (Cauchy の平均値の定理の言い換え) $h \neq 0$ であるとし, f, g は $x, x+h$ を両端とする閉区間上の実数値連続函数であるとする．f, g は $x, x+h$ を両端とする開区間上で微分可能であり, そこで f', g' は同時に 0 になることはなく, $g(x) \neq g(x+h)$ であると仮定する．このとき, $0 < \theta < 1$ をみたすある θ で次を満たすものが存在する.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{g(x+h)-g(x)} = \frac{f'(x+\theta h)}{g'(x+\theta h)}. \quad \square$$

Cauchy の平均値の定理で $g(t) = t$ とおけば次の (Lagrange の) 平均値の定理が得られる.

定理 3.4 ((Lagrange の) 平均値の定理) $a < b$ であるとし, f は閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続函数であり, f は開区間 (a,b) 上で微分可能であるとする．このとき, ある $\xi \in (a,b)$ で次を満たすものが存在する:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) \quad i.e. \quad f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a). \quad \square$$

定理 3.5 ((Lagrange の) 平均値の定理の言い換え) $h \neq 0$ であるとし, f は $x, x+h$ を両端とする閉区間上の実数値連続函数であり, f は $x, x+h$ を両端とする開区間上で微分可能であると仮定する．このとき, $0 < \theta < 1$ をみたすある θ で次を満たすものが存在する.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x+\theta h) \quad i.e. \quad f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta h). \quad \square$$

系 3.6 (定数函数) $a < b$ であるとし, f は閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続函数であり, f は開区間 (a,b) 上で微分可能でそこで $f' = 0$ であるとする．このとき f は閉区間 $[a,b]$ 上の定数函数である. □

証明. (Lagrange の) 平均値の定理より, 任意の $x \in (a,b]$ に対してある $\xi \in (a,x)$ で $f(x) = f(a) + f'(\xi)(x-a)$ をみたすものが存在する. $f'(\xi) = 0$ であるから $f(x) = f(a)$ となる. これで f が定数函数であることがわかった. □

3.2　剰余項型の Taylor の定理

定理 3.7 (剰余項型の Taylor の定理) f は $a \in \mathbb{R}$ の近傍で定義された n 回微分可能な実数値函数であるとする. このとき a に十分近い $x \neq a$ に対して, a, x のあいだにある ξ $(\neq a, x)$ で次を満たすものが存在する:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n.$$

最後の項を**剰余項**と呼び, 次のように書くことがある:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n. \quad \square$$

証明. $F(x)$ を次のように定める:

$$F(x) = f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} \right).$$

このとき $F(a) = F'(a) = F''(a) = \cdots = F^{(n-1)}(a) = 0$ および $F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$ が成立している. a, x のあいだにある ξ $(\neq a, x)$ で $F(x) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n$ を満たすものが存在することを示したい.

$g(x) = (x-a)^n$ とおく. $g^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(x-a)^{n-k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ なので $g(a) = g'(a) = g''(a) = \cdots = g^{(n-1)}(a) = 0$ かつ $g^{(n)}(x) = n!$ であり, $t \neq a$ のとき $g^{(k)}(t) \neq 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ である.

Cauchy の平均値を $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ に対する $F^{(k)}(x)$ と $g^{(k)}(x)$ に次々に適用すると, a, x のあいだにある $x_1, x_2, \ldots, x_n$ で以下を満たすものが存在することがわかる:

$$\begin{aligned}
\frac{F(x)}{(x-a)^n} &= \frac{F(x) - F(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{F'(x_1)}{g'(x_1)} \\
&= \frac{F'(x_1) - F'(a)}{g'(x_1) - g'(a)} = \frac{F''(x_2)}{g''(x_2)} \\
&= \cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \frac{F^{(n-1)}(x_{n-1}) - F^{(n-1)}(a)}{g^{(n-1)}(x_{n-1}) - g^{(n-1)}(a)} = \frac{F^{(n)}(x_n)}{g^{(n)}(x_n)} = \frac{f^{(n)}(x_n)}{n!}.
\end{aligned}$$

よって $\xi = x_n$ とおくと $F(x) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n$. □

a, x のそれぞれを $x, x+h$ で置き換えて以下のように言い換えることがある.

定理 3.8 (剰余項型の Taylor の定理の言い換え) f は $x \in \mathbb{R}$ の近傍で定義された n 回微分可能な実数値函数であるとする. このとき絶対値が十分小さい $h \neq 0$ に対して, $0 < \theta < 1$ をみたすある θ で次を満たすものが存在する:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h).$$

最後の項を**剰余項**と呼び, 次のように書くことがある:

$$R_n(h) = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h) \quad \square$$

3.3 スモールオーダー型の Taylor の定理

定理 3.9 (スモールオーダー型の Taylor の定理) f は $a \in \mathbb{R}$ の近傍で定義された $n-1$ 回微分可能な実数値函数であり, $f^{(n-1)}$ は a で微分可能であると仮定する. このとき $x \to a$ のとき

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + o((x-a)^n). \quad \square$$

証明. 剰余項型の Taylor の定理の証明と同様に $F(x)$ を定め, $g(x) = (x-a)^n$ とおき, 完全に同じ議論を繰り返すことによって, a, x のあいだにある x_{n-1} で以下を満たすものが存在することがわかる:

$$\frac{F(x)}{(x-a)^n} = \frac{F^{(n-1)}(x_{n-1})}{g^{(n-1)}(x_{n-1})} = \frac{F^{(n-1)}(x_{n-1})}{n!(x_{n-1}-a)} = \frac{F^{(n-1)}(x_{n-1}) - F^{(n-1)}(a)}{n!(x_{n-1}-a)}$$

二つ目の等号で $g^{(n-1)}(x) = n(n-1)\cdots 2(x-a) = n!(x-a)$ を用い, 三つ目の等号で $F^{(n-1)}(a) = 0$ を用いた. $F(x) - \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n = o((x-a)^n)$ を示したい. $f^{(n-1)}$ が a で微分可能なことより, $F^{(n-1)}$ も a で微分可能でかつ $F^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$ となる. よって, $x \to a$ のとき $x_{n-1} \to a$ となるので

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a}\frac{F^{(n-1)}(x_{n-1}) - F^{(n-1)}(a)}{n!(x_{n-1}-a)} = \frac{F^{(n)}(a)}{n!} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

したがって

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x) - \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n}{(x-a)^n} = 0.$$

これが示したいことであった. $\square$

注意 3.10 剰余項型の Taylor の定理の状況でさらに $f^{(n)}$ の連続性も仮定すれば剰余項型の Taylor の定理からスモールオーダー型の Taylor の定理が容易に導かれる. 実際 $f^{(n)}$ が連続ならば $x \to a$ のとき $\xi \to a$ なので

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x) - \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\left(f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(a)\right) = 0.$$

このように単なる n 回微分可能性ではなく, 導函数の連続性も含めた C^n 級の仮定のもとでは剰余項型の Taylor の定理はスモールオーダー型の Taylor の定理を含んでいる.

この辺は微妙な問題ではある. しかし, 実用的には n 回微分可能性の仮定よりも C^n 級の仮定の方が便利でかつ普通なので, このような微妙な問題にこだわる必要はない. 議論を簡単にするためにすべての理論を C^n 級の仮定のもとで構築しても何の問題もない. $\square$

a, x のそれぞれを $x, x+h$ で置き換えて以下のように言い換えることがある.

定理 3.11 (スモールオーダー型の Taylor の定理) f は $x \in \mathbb{R}$ の近傍で定義された $n-1$ 回微分可能な実数値函数であり, $f^{(n-1)}$ は x で微分可能であると仮定する. このとき $h \to 0$ のとき

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + o(h^n). \quad \square$$

4 積分剰余項型の Taylor の定理

実用的には剰余項を積分で表わした方が使い易い場合が多い.

補題 4.1 (不定積分) f は $a \in \mathbb{R}$ の近傍で定義された連続函数であるとする. このとき a に十分近い x に対して

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(\xi)\,d\xi = f(x). \quad \square$$

証明. f の連続性より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分 $\delta > 0$ を小さく取ると $|h| \leqq \delta$ ならば $|f(x+h) - f(x)| \leqq \varepsilon$ となる. したがって

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^{x+h} f(\xi)\,d\xi - \int_a^x f(\xi)\,d\xi - f(x)h\right| = \left|\int_x^{x+h} f(\xi)\,d\xi - f(x)h\right| \\
&= \left|\int_x^{x+h} f(\xi) - f(x)\,d\xi\right| \leqq \left|\int_x^{x+h} |f(\xi) - f(x)|\,d\xi\right| \leqq \varepsilon|h|.
\end{aligned}$$

これで $\int_a^{x+h} f(\xi)\,d\xi - \int_a^x f(\xi)\,d\xi - f(x)h = o(h)$ であることが示せた. これが示したいことであった. $\square$

定理 4.2 (微分積分学の基本定理) f は $a \in \mathbb{R}$ の近傍で定義された C^1 級函数であるとする. このとき a に十分近い x に対して

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(\xi)\,d\xi. \quad \square$$

証明. $F(x) = f(x) - f(a) - \int_a^x f'(\xi)\,d\xi$ とおいて $F(x) = 0$ を示そう. このとき $F(a) = 0$ であり, 上の補題より $F'(x) = 0$ である. 平均値の定理より a, x のあいだの ξ で $F(x) = F(x) - F(a) = F'(\xi)(x - a) = 0$ を満たすものが存在する. $\square$

定理 4.3 (積分剰余項型の Taylor の定理) f は $a \in \mathbb{R}$ の近傍で定義された C^n 級函数であるとする. このとき a に十分近い x に対して

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + R_n(x)$$

ただし剰余項 $R_n(x)$ は次のように表わされる:

$$R_n(x) = \int_a^x f^{(n)}(\xi)\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\,d\xi. \quad \square$$

証明. n に関する帰納法で証明しよう. $n = 1$ の場合

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(\xi)\,d\xi$$

は微分積分学の基本定理と同値である. さらにこの公式中の積分を部分積分すると

$$\begin{aligned}
\int_a^x f'(\xi)\,d\xi &= -\left[f'(\xi)(x-\xi)\right]_{\xi=a}^{\xi=x} + \int_a^x f''(\xi)(x-\xi)\,d\xi \\
&= f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(\xi)(x-\xi)\,d\xi
\end{aligned}$$

となるので $n=2$ の場合も得られる．

n の場合の結果が成立していると仮定する．このとき上と同様にして $R_n(x)$ を部分積分すると

$$\begin{aligned} R_n(x) &= -\left[f^{(n)}(\xi)\frac{(x-\xi)^n}{n!}\right]_{\xi=a}^{\xi=x} + \int_a^x f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-\xi)^n}{n!}\,d\xi \\ &= \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + \int_a^x f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-\xi)^n}{n!}\,d\xi \end{aligned}$$

なので $n+1$ の場合も成立することがわかる． □

注意 4.4 積分剰余項型の Taylor の定理から C^n 級函数に関するスモールオーダー型の Taylor の定理が以下のようにして導かれる．$f^{(n)}$ の連続性より，任意の $\varepsilon>0$ に対して十分 $\delta>0$ を小さく取ると，$|\xi-a|\leqq\delta$ ならば $|f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(a)|\leqq\varepsilon$ となる．定積分の公式

$$\int_a^x \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\,d\xi = \left[-\frac{(x-\xi)^n}{n!}\right]_{\xi=a}^{\xi=x} = \frac{(x-a)^n}{n!}$$

を使うと，

$$\begin{aligned} &\left|R_n(x)-\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n\right| = \left|\int_a^x f^{(n)}(\xi)\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\,d\xi - \int_a^x f^{(n)}(a)\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\,d\xi\right| \\ &= \left|\int_a^x \left(f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(a)\right)\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\,d\xi\right| \leqq \varepsilon\left|\int_a^x \frac{|x-\xi|^{n-1}}{(n-1)!}\,d\xi\right| = \varepsilon\frac{|x-a|^n}{n!}. \end{aligned}$$

これで $R_n(x)-\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n = o((x-a)^n)$ が示された．これが示したいことであった． □

a,x,ξ のそれぞれを $x,x+h,x+\theta h$ で置き換えて以下のように言い換えることがある．

定理 4.5 (積分剰余項型の Taylor の定理の言い換え) f は $x\in\mathbb{R}$ の近傍で定義された C^n 級函数であるとする．このとき絶対値が十分小さい $h\neq 0$ に対して

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + R_n(h)$$

ただし剰余項 $R_n(h)$ は次のように表わされる:

$$R_n(h) = \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{n-1}h^n}{(n-1)!}f^{(n)}(x+\theta h)\,d\theta \quad \square$$