量子群と Painlevé 系の Weyl 群対称性の量子化

黒木玄

2010 年 7 月 15 日* Version 2.3

大阪表現論セミナー 2010 年 6 月 30 日（水）18:00–19:30
大阪市立大学文化交流センター (大阪駅前第 2 ビル 6 階) 小セミナー室

概 要

論文 [K6] の内容を紹介する. (講演原稿 [K5] も見よ.)

野海と山田は論文 [NY3] で任意の一般化された Cartan 行列 (GCM) に対して定まるべき零 Poisson 代数の分数体に Weyl 群が自然に Poisson 作用していることを示した (Poisson 構造を保つ Weyl 群の双有理作用の構成).

この Weyl 群双有理作用は Painlevé 系 (古典的な Painlevé 微分方程式の一般化) の Weyl 群対称性の一般化であると考えることもできるし, GCM がアフィン型であるとき Weyl 群の格子部分の作用を離散化された Painlevé 系とみなすこともできる.

したがって, もしもこの Weyl 群双有理作用が量子化されたならば, 量子 Painlevé 系の Weyl 群対称性にあたるものが構成されたとみなすことができるし, 離散化された量子 Painlevé 系が構成されたと考えることもできる.

論文 [K6] で筆者は野海・山田の Weyl 群双有理作用の q 差分版の量子化を量子展開環を用いて構成した. 対称化可能 GCM に付随する量子展開環の下三角の Chevalley 生成元を f_i と書くとき, 量子化された Weyl 群双有理作用は f_i の非整数べきの作用によって自然に構成される.

Kac-Moody Lie 代数の展開環で同様の構成を行なうと, q 差分版ではない量子化された Weyl 群双有理作用が得られる. この作用の古典極限がちょうど野海・山田の Weyl 群双有理作用になっている.

つまり量子展開環を用いた構成は量子化と q 差分化を同時に行なっていることになる.

さらに同論文で筆者は, 長谷川が論文 [H] の第 1〜3 節で構成した q 差分版の量子 Weyl 群双有理作用を同様の方法 (f_i の非整数べきの作用を使う方法) で再構成できることも示している.

以上のように Painlevé 系の世界における Weyl 群双有理作用の裏には Chevalley 生成元 f_i の非整数べきの作用という単純な構造が隠れているようだ.

目 次

*講演後に細かい誤りを訂正し, 第 1.6 節の M の定義を変更し, 幾何結晶との関係に関する説明を追加した. 幾何結晶との関係については講演では触れることができなかった.

0 はじめに

0.1 用語法: q 差分化と量子化

最近では「q 差分化」のことを「量子化」と呼ぶ場合もあるようだが, この話ではそのような言葉使いをしない.

「q 差分化」とは様々な公式にパラメータ q を入れて[1], 微分 d/dx に関わる理論を q 差分 $f(x) \mapsto (f(x) - f(qx))/(x - qx)$ に一般化することである.

「q 差分化」はただの「差分化」とは区別される. 「差分化」とは様々な公式にパラメータ h を入れて, 微分 d/dx に関わる理論を差分 $f(x) \mapsto (f(x+h) - f(x))/h$ に一般化することである.

$q \to 1$ もしくは $h \to 0$ によって q 差分方程式もしくは差分方程式の微分方程式への極限を考えることを「微分極限」と呼び, 極限の微分方程式を「微分系」もしくは「微分版」と呼ぶことにする.

「量子化」を「正準量子化」の意味で用いる. 「正準量子化」とは可換な Poisson 代数で記述される系 (古典系) をフィルター付きもしくはパラメータ $\hbar$ 付きの非可換環で記述される系 (量子系) に拡張することである. ただし古典系 Poisson 括弧と量子系の交換子はフィルター環の gr を取る操作もしくは極限 $\hbar^{-1}[f,g] \to \{f,g\}$ $(\hbar \to 0)$ で結ばれていなければいけない. そこで gr を取る操作や $\hbar \to 0$ の極限を「古典極限」と呼ぶことにする.

例. 微分方程式 $du/dx = u$ とその解 e^x の q 差分化として, q 差分方程式

$$\frac{u(x) - u(qx)}{x - qx} = u(x) \quad (\text{これは } u(x) = (1-(1-q)x)^{-1}u(qx) \text{ と同値})$$

とその解

$$e_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)_q!} = \frac{1}{\prod_{n=0}^{\infty}(1-(1-q)q^n x)}$$

がよく考えられる. ここで

$$(n)_q = \frac{1-q^n}{1-q}, \quad (n)_q! = (1)_q (2)_q \cdots (n)_q!.$$

量子化という文脈以外でも q 差分化は役に立つ. □

[1] Lusztig [L] のように q ではなく v を使う場合もある.

例. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して $\mathfrak{g}^*$ 上の函数環 $S(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ は自然に Poisson 代数の構造を持つ. 普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ は $S(\mathfrak{g})$ の自然な量子化である. さらに $\mathfrak{g}$ が Kac-Moody Lie 代数であるとき量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ の代数構造は $U(\mathfrak{g})$ の代数構造の q 差分化である. すなわち $U_q(\mathfrak{g})$ は $S(\mathfrak{g})$ の q 差分版量子化になっている.

$U_q(\mathfrak{g})$ の dual として量子群 (上の函数環) $A_q = A_q(G)$ が得られる. $A_q(G)$ の古典極限は $\mathfrak{g}$ に対応する Poisson Lie 群 G 上の函数環 $A(G) = \mathbb{C}[G]$ になる. $A(G)$ の Poisson 構造は $A_q(G)$ における交換子の極限に等しい. $A_q(G)$ の積構造は本質的に $U_q(\mathfrak{g})$ の余積そのものなので, Poisson Lie 群 G の Poisson 構造は量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ の余積の非可換性の古典極限になっていると考えられる. □

量子化について補足しておく.

古典力学における時間発展は Hamiltonian と呼ばれる Poisson 代数の元 H が与えられたとき, $df/dt = \{H, f\}$ によって与えられる. これの量子化は非可換における時間発展 $df/dt = \hbar^{-1}[H, f] + f_t$ になるべきだと考える.

古典力学系にしても量子力学系にしても時間発展の微分方程式 (運動方程式) そのものよりも Hamiltonian H を求めることが基本的である. (Hamiltonian がわかっていれば運動方程式がただちに得られるが, 運動方程式がわかっていても Hamiltonian を求めることは難しい.) だから, 古典力学における Poisson 構造を保つ変換の量子化をできれば conjugation 作用 $f \mapsto UfU^{-1}$ の形で表わしたくなる.

0.2　この研究の出発点: 2003 年 11 月 21 日の研究ノートより

この研究の出発点になった 2003 年 11 月 21 日の研究ノートの内容を紹介しよう.

長谷川の論文 [H] は 2007 年に発表されたが, 筆者を含む長谷川の周辺では 2003 年以前からその第 1〜3 節の構成はよく知られていた.

長谷川は論文 [H] の第 1〜3 節の内容を Newton Institute での研究集会で 2001 年 4 月に "Deforming Noumi-Yamada's realization of Weyl group as rational transformations" というタイトルの講演で発表した. その講演で長谷川は梶原・野海・山田 [KNY] で $A_2^{(1)}$ 型の場合に構成された古典版の q 差分版 Weyl 群双有理作用を任意の型に一般化して量子化した.

当時任意の型に対して量子化された Weyl 群双有理作用を構成する方法は筆者の知る限りにおいてこの長谷川の方法しかなかった. この意味で長谷川の構成は画期的な成果であったと考えている.

2003 年 11 月 21 日付けの筆者の研究ノートでは, 最初のページで長谷川 [H] の q 差分版の量子化された Weyl 群双有理作用 (A 型の場合) の $q \to 1$ での極限が野海・山田 [NY3] の双有理作用の特別な場合の量子化になっていることを確認している. そして 2〜3 ページ目で $q \to 1$ の極限での作用を "非整数べき" の作用で実現できることを簡単な計算で見い出している. そして 4〜5 ページ目で非整数べき[2]を数学的に正当化するための方法について考えている.

以下で n は 3 以上の整数であるとし, F_i, a_i ($i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) は次の q 交換関係を満たしていると仮定する:

$$F_i F_{i+1} = q^{-1} F_{i+1} F_i, \quad F_i F_j = F_j F_i \quad (j \neq i \pm 1), \quad a_i a_j = a_j a_i, \quad F_i a_j = a_j F_i.$$

[2] 研究ノートの段階では「非整数べき」を「複素巾」と呼んでいる.

$A^{(1)}_{n-1}$ 型の Weyl 群の生成元を s_i と書く:

$$s_i^2 = 1, \quad s_i s_{i+1} s_i = s_i s_{i+1} s_i, \quad s_i s_j = s_j s_j \quad (j \neq i \pm 1).$$

長谷川による量子化された Weyl 群双有理作用は次のように定義される:

$$\begin{cases} s_i(F_{i-1}) = \dfrac{1-a_iF_i}{a_i - F_i} F_{i-1}, \\ s_i(F_{i+1}) = F_{i+1} \dfrac{a_i - F_i}{1 - a_iF_i}, \\ s_i(F_j) = F_j \quad (j \neq i \pm 1), \end{cases} \qquad \begin{cases} s_i(a_i) = a_i^{-1}, \\ s_i(a_{i\pm1}) = a_i a_{\pm1}, \\ s_i(a_j) = a_j \quad (j \neq i, i \pm 1). \end{cases}$$

この作用は F_i, a_i たちの q 交換関係式を保ち, Weyl 群の定義関係式も保っている ([H]).

以上の長谷川の構成の $q \to 1$ での極限を取るために次を満たす f_i, α_i を用意する:

$$[f_i, f_{i+1}] = \hbar, \quad [f_i, f_j] = 0 \quad (j \neq i \pm 1), \quad [\alpha_i, \alpha_j] = 0, \quad [\alpha_i, f_j] = 0.$$

そして $q = e^{-\varepsilon^2\hbar}$, $F_i = e^{\varepsilon f_i}$, $a_i = e^{-\varepsilon^2\alpha_i/2}$ とおくと F_i, a_i は上の q 交換関係を満たしていることを確認できる. さらに簡単な計算によって $\operatorname{mod} \varepsilon^2$ で

$$\begin{aligned} \frac{1-a_iF_i}{a_i - F_i} F_{i-1} &\equiv \left(1 - \varepsilon \frac{\alpha_i}{f_i}\right)(1 + \varepsilon f_{i-1}) \equiv 1 + \varepsilon \left(f_{i-1} - \frac{\alpha_i}{f_i}\right) \quad (\operatorname{mod} \varepsilon^2), \\ F_{i+1} \frac{a_i - F_i}{1 - a_iF_i} &\equiv (1 + \varepsilon f_{i+1}) \left(1 + \varepsilon \frac{\alpha_i}{f_i}\right) \equiv 1 + \varepsilon \left(f_{i+1} + \frac{\alpha_i}{f_i}\right) \quad (\operatorname{mod} \varepsilon^2) \end{aligned}$$

となることがわかるので, s_i の F_i, a_i への作用は f_i, α_i への次のような作用を誘導することがわかる:

$$\begin{cases} s_i(f_{i\pm1}) = f_{i\pm1} \pm \dfrac{\alpha_i}{f_i}, \\ s_i(f_j) = f_j \quad (j \neq i \pm 1), \end{cases} \qquad \begin{cases} s_i(\alpha_i) = -\alpha_i, \\ s_i(\alpha_{i\pm1}) = \alpha_{i\pm1} + \alpha_i, \\ s_i(\alpha_j) = \alpha_j \quad (j \neq i, i \pm 1). \end{cases}$$

この作用の式の形は野海・山田 [NY3] による古典版の Weyl 群双有理作用の特別な場合[3]に一致しているので, その場合の量子化になっていると考えられる.

以上で説明した研究ノートの最初のページの内容は当時 (少なくとも筆者の周囲では) よく知られていたことの準備に過ぎない. ここからが重要である. 研究ノートの次のページには以下の計算が書いてある.

長谷川 [H] はある $\Theta_i = \Theta_i(a_i, F_i)$ をうまく見つけて, s_i の F_j たちへの作用を Θ_i による conjugation によって $s_i(F_j) = \Theta_i F_j \Theta_i^{-1}$ と表わしている.

そこで s_i の f_j たちへの作用を $\theta_i = \theta_i(\alpha_i, f_i)$ によって $s_i(f_j) = \theta_i f_j \theta_i^{-1}$ と表わすことを考えよう. そのような θ_i は以下のようにして求められる. まず

$$\theta_i f_{i\pm1} \theta_i^{-1} = f_{i\pm1} - [f_{i\pm1}, \theta_i]\theta_i^{-1} = f_{i\pm1} \pm \hbar \frac{\partial \theta_i}{\partial f_i} \theta_i^{-1}.$$

[3] より正確にいえば, $A^{(1)}_{n-1}$ 型でべき零 Poisson 代数の生成元 f_i たちがみたす Poisson 括弧に関する Serre 関係式が $\{f_i, f_{i+1}\} = 1$ の形にに退化した場合. 野海・山田 [NY3] は f_i を φ_i と書いている. 野海・山田 [NY3] は任意の型に対して Weyl 群双有理作用を構成している.

であるから, 上の $s_i(f_{i\pm1})$ の右辺と比較して

$$\hbar\frac{\partial\theta_i}{\partial f_i}\theta_i^{-1} = \frac{\alpha_i}{f_i}, \quad \text{すなわち} \quad \hbar f_i\frac{\partial\theta_i}{\partial f_i} = \alpha_i\theta_i.$$

したがって $\theta_i = \theta_i(\alpha_i, f_i)$ は次の形でなければいけない:

$$\theta_i = \theta_i(\alpha_i, f_i) = c_i(\alpha_i) f_i^{\alpha_i/\hbar}.$$

つまり $s_i(f_{i\pm1}) = \theta_i f_{i\pm1}\theta_i^{-1}$ が成立するために θ_i はこの形でなければいけない. 以下簡単のため $c_i(\alpha_i) = 1$ とおく. 逆に $f_i^{\alpha_i/\hbar}$ による $f_{i\pm1}$ の conjugation を計算してみると

$$f_i^{\alpha_i/\hbar} f_{i\pm1} f_i^{-\alpha_i/\hbar} = f_{i\pm1} - [f_{i\pm1}, f_i^{\alpha_i/\hbar}]f_i^{-\alpha_i/\hbar} = f_{i\pm1} \pm \alpha_i f_i^{\alpha_i/\hbar-1} f_i^{-\alpha_i/\hbar} = f_{i\pm1} \pm \frac{\alpha_i}{f_i}.$$

少なくとも形式的には s_i の作用は f_i の非整数べきの作用で実現されることがわかった. 研究ノートのこの計算のすぐ横には「なんだ！」と書いてある. それは「なんだ, たったこれだけのことか！」という意味だと思われる.

以上の計算結果は講演 [K1] で発表された.

研究ノートの 3 ページ目では上の量子版の構成と野海・山田 [NY3] による古典版の Weyl 群双有理作用の構成を以下のように比較している.

野海・山田はある種の可換 Poisson 代数の生成元 f_i たちが Poisson 括弧に関して Serre 関係式を満たすと仮定し, Weyl 群の生成元 s_i の双有理作用を

$$\exp\left(\frac{\alpha_i}{f_i}\{f_i, \cdot\}\right) : g \mapsto g + \frac{\alpha_i}{f_i}\{f_i, g\} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\alpha_i}{f_i}\right)^2\{f_i, \{f_i, g\}\} + \cdots$$

の形で構成している. さらに $\{\log f_i, g\} = \{f_i, g\}/f_i$ に注意すれば

$$\exp\left(\frac{\alpha_i}{f_i}\{f_i, \cdot\}\right) = \exp\left(\alpha_i\{\log f_i, \cdot\}\right)$$

であり, 右辺の自然な量子化は $\exp\left(\alpha_i\hbar^{-1}\log f_i\right) = f_i^{\alpha_i/\hbar}$ による conjugation 作用であると考えられる[4]. 上の計算はこのアイデアが特別な場合に成立していることを示している. 以上によって次の予想が得られた.

予想. 野海・山田 [NY3] による Weyl 群のべき零 Poisson 代数の分数体への Poisson 作用の量子化を Kac-Moody Lie 代数の下三角部分の Chevalley 生成元 f_i の非整数べきによる conjugation 作用によって構成できる. □

この予想を解決するためにはまず最初に f_i の非整数べきの conjugation 作用を数学的に正当化しなければいけない. さらに f_i の非整数べきで構成された s_i の作用が実際に Weyl 群の基本関係式を満たしていることも示さなければいけない.

研究ノートの 4〜5 ページ目では前者の問題に対する処方箋について以下のように当たりをつけている.

λ が 0 以上の整数のとき次が成立することを数学的帰納法を用いて容易に示せる:

$$f^\lambda g f^{-\lambda} = g + \binom{\lambda}{1}[f, g]f^{-1} + \binom{\lambda}{2}[f, [f, g]]f^{-2} + \binom{\lambda}{3}[f, [f, [f, g]]]f^{-3} + \cdots.$$

[4] 古典系での Poisson 括弧とその量子化での交換子のあいだには $\{\ ,\ \} \equiv \hbar^{-1}[\ ,\ ] \pmod{\hbar^2}$ という関係がなければいけない (正準量子化).

ここで f, g は $\mathbb{C}$ 上の任意の結合代数の元であり, f は可逆であると仮定する. $\binom{\lambda}{k}$ は二項係数なので, λ が 0 以上の整数であればこの公式の右辺は常に有限和になることに注意せよ. 二項係数 $\binom{\lambda}{k}$ は λ について k 次の多項式である. ゆえに λ が非整数のとき右辺で左辺を定義することができる. ただし右辺が無限和になる可能性を排除するために十分大きな k に対して $\mathrm{ad}(f)^k g = 0$ となると仮定しておかなければいけない. この仮定は f が Kac-Moody Lie 代数の下三角の Chevalley 生成元 F_i であるならば成立する[5].

以上で 2003 年 11 月 21 日の研究ノートの内容の紹介を終える.

その後以下の事実に気付いた:

- 上の予想はそのまま量子展開環の場合に拡張できる.
- Kac-Moody Lie 代数もしくは量子展開環の下三角の Chevalley 生成元を F_i と書くとき,「F_i の非整数べきを用いて構成した s_i たちの作用が Weyl 群の基本関係式を満たしていること」は「F_i の整数べきたちが満たす Verma 関係式」からただちに導かれる.

これによって野海・山田 [NY3] の Weyl 群双有理作用の q 差分化と量子化を同時に遂行することが可能になった.

定理. 上の予想およびその q 差分版がともに成立している. □

さらに長谷川 [H] の q 差分版の量子 Weyl 群双有理作用も Chevalley 生成元の非整数べきを用いた同様の方法で再構成できることに気付いた.

これらの結果は講演 [K5] で報告され, 論文 [K6] で発表されることになった. 以下はこの論文の解説である. ただし第 1.6 節の結果だけは新しい結果である.

1 野海・山田 [NY3] の Weyl 群双有理作用の量子化

1.1 GCM と Weyl 群

$A = [a_{ij}]_{i,j\in I}$ は対称化可能一般 Cartan 行列 (symmetrizable generalized Cartan matrix, 以下対称化可能 GCM と略) であるとし, 0 でない有理数 d_i たちによって $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$ $(i, j \in I)$ と対称化されていると仮定する. d は正の整数で dd_i のすべてが整数になるもので最小のものであるとする.

たとえば A が A_2, B_2, G_2 型の Cartan 行列であるとは $I = \{1, 2\}$ であり, 行列 $A = [a_{ij}]$ がそれぞれ次の形になることである:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

それぞれの場合に d_i, d を以下のように取れる:

- A_2 型の場合: $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d = 1$,
- B_2 型の場合: $d_1 = 2$, $d_2 = 1$, $d = 1$,

[5] Serre 関係式 $\mathrm{ad}(F_i)^{1-a_{ij}} F_j = 0$ $(i \neq j)$ はまさに $\mathrm{ad}(f)^k g = 0$ の形をしている.

- G_2 型の場合: $d_1 = 3$, $d_2 = 1$, $d = 1$.

さらに n が 3 以上の整数であるとき A が $A^{(1)}_{n-1}$ 型の GCM であるとは $I = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ であり,

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & (i = j), \\ -1 & (i - j = \pm 1), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

であることである. このとき $A = [a_{ij}]$ は対称行列なので d_i, d を $d_i = d = 1$ と取れる.

GCM に関する一般論を知らない読者は GCM として以上で説明した $A_2, B_2, G_2, A^{(1)}_{n-1}$ 型の場合だけを考えておけば十分である.

GCM $A = [a_{ij}]_{i \in I}$ に対して生成元 s_i $(i \in I)$ を持ち, 以下の基本関係式で定義される群を $W = W(A)$ と書き, Weyl 群と呼ぶ:

- $i \neq j$, $a_{ij}a_{ji} = 0$ ならば $s_i s_j = s_j s_i$,
- $i \neq j$, $a_{ij}a_{ji} = 1$ ならば $s_i s_j s_j = s_j s_i s_j$,
- $i \neq j$, $a_{ij}a_{ji} = 2$ ならば $s_i s_j s_i s_j = s_j s_i s_j s_i$,
- $i \neq j$, $a_{ij}a_{ji} = 3$ ならば $s_i s_j s_i s_j s_i s_j = s_j s_i s_j s_i s_j s_i$,
- $s_i^2 = 1$.

基本関係式から最後の関係式 $s_i^2 = 1$ を除いたものを基本関係式に持つ群を $B = B(A)$ と書き, 組紐群と呼ぶ. 2 から 4 番目の関係式はそれぞれ A_2, B_2, G_2 型の場合に現われる. これが A_2, B_2, G_2 型の場合が基本的だと考える理由である.

Y は有限生成自由 $\mathbb{Z}$ 加群であり, その双対格子を $X = \mathrm{Hom}(Y, \mathbb{Z})$ と書き, 自然な内積 $Y \times X \to \mathbb{Z}$ を $\langle\ ,\ \rangle$ と表わす. $\alpha_i \in X$, $\alpha_i^\vee \in Y$ で $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = a_{ij}$ $(i, j \in I)$ を満たすものが与えられていると仮定する. α_i たちは単純 root と呼ばれ, $\alpha_i^\vee$ たちは単純 coroot と呼ばれる. Weyl 群 $W = \langle s_i \rangle_{i \in I}$ は X, Y に

$$s_i(\alpha) = \alpha - \langle \alpha_i^\vee, \alpha \rangle \alpha_i \quad (\alpha \in X), \quad s_i(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha_i \rangle \alpha_i^\vee \quad (\lambda \in Y)$$

と作用し, $\langle \lambda, w(\alpha) \rangle = \langle w(\lambda), \alpha \rangle$ $(\lambda \in Y,\ \alpha \in X,\ w \in W)$ を満たしている.

Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{h} = Y \otimes \mathbb{C}$ と定める. この段階では $\mathfrak{h}$ はベクトル空間に過ぎないが, Kac-Moody Lie 代数を定義すると $\mathfrak{h}$ はその可換部分代数とみなされる. $\mathfrak{h}$ の双対空間 $\mathfrak{h}^*$ は $\mathfrak{h}^* = X \otimes \mathbb{C}$ と同一視される.

1.2 野海・山田 [NY3] の Weyl 群双有理作用

$\mathcal{A}_0^{\mathrm{cl}}$ は $f_i \neq 0$ $(i \in I)$ から生成される $\mathbb{C}$ 上の Poisson 整域 (零因子を持たない Poisson 代数) であるとし,

$$\mathrm{ad}_{\{\}}(f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0 \quad (i \neq j)$$

が成立していると仮定する. ここで $\mathrm{ad}_{\{\}}(f)g = \{f, g\}$, $\mathrm{ad}_{\{\}}(f)^2 g = \{f, \{f, g\}\}$, ... である. この関係式は Kac-Moody Lie 代数における下三角の Chevalley 生成元の Serre 関係

式の古典極限とみなせる. $\mathcal{A}_0^{\mathrm{cl}}$ と $S(\mathfrak{h})$ のテンソル積を $\mathcal{A}^{\mathrm{cl}}$ と表わし, $\mathcal{A}_0^{\mathrm{cl}}$, $S(\mathfrak{h})$ とそれらの $\mathcal{A}^{\mathrm{cl}}$ における像を同一視しておく. $\mathcal{A}_0^{\mathrm{cl}}$ の Poisson 構造を $\mathcal{A}^{\mathrm{cl}}$ に

$$\{\lambda,\mu\}=\{\lambda,f_i\}=0 \quad (\lambda,\mu\in\mathfrak{h},\ i\in I)$$

という条件で拡張しておく. ここで $\{\lambda,f_j\}=-\langle\lambda,\alpha_j\rangle f_j$ と仮定せずに, $\{\lambda,f_i\}=0$ と仮定していることに注意せよ.

整域 $\mathcal{A}^{\mathrm{cl}}$ の商体 (分数体) を $Q(\mathcal{A}^{\mathrm{cl}})$ と表わす. $\mathcal{A}^{\mathrm{cl}}$ の Poisson 構造は自然に商体 $Q(\mathcal{A}^{\mathrm{cl}})$ の Poisson 構造を誘導する. Poisson 括弧に関する Serre 関係式 $\mathrm{ad}_{\{\}}(f_i)^{1-a_{ij}}f_j=0$ より

$$\exp\left(\frac{\alpha_i^\vee}{f_i}\,\mathrm{ad}_{\{\}}(f_i)\right)f_j=f_j+\frac{\alpha_i^\vee}{f_i}\{f_i,f_j\}+\frac{1}{2!}\left(\frac{\alpha_i^\vee}{f_i}\right)^2\{f_i,\{f_i,f_j\}\}+\cdots$$

の右辺は有限和になるから, これは well-defined である.

定理 1.1 (野海・山田 [NY3] の Weyl 群双有理作用)**.** $Q(\mathcal{A}^{\mathrm{cl}})$ の Poisson 代数としての自己同型 s_i を次によって定めることができる:

$$s_i(f_j)=\exp\left(\frac{\alpha_i^\vee}{f_i}\,\mathrm{ad}_{\{\}}(f_i)\right)f_j \quad (i,j\in I), \qquad s_i(\lambda)=\lambda-\langle\lambda,\alpha_i\rangle\alpha_i^\vee \quad (\lambda\in\mathfrak{h}).$$

これによって Weyl 群 $W=\langle s_i\rangle_{i\in I}$ が $Q(\mathcal{A}^{\mathrm{cl}})$ に作用する. □

この定理の各 s_i の $Q(\mathcal{A}^{\mathrm{cl}})$ への作用は $\operatorname{Spec}\mathcal{A}^{\mathrm{cl}}$ からそれ自身への双有理写像と同一視できる. したがって定理の Weyl 群作用は $\operatorname{Spec}\mathcal{A}^{\mathrm{cl}}$ への Weyl 群双有理作用を定めていると考えられる.

1.3 例: 野海・山田 [NY2] の $A_{n-1}^{(1)}$ 型高階 Painlevé 方程式

$I=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ であるとし, $A=[a_{ij}]_{i,j\in I}$ は $A_{n-1}^{(1)}$ 型の GCM であるとする.

Y は $\varepsilon_1^\vee,\varepsilon_2^\vee,\dots,\varepsilon_n^\vee,c$ で張られる rank $n+1$ の自由 $\mathbb{Z}$ 加群であるとし, Y の双対格子 $X=\mathrm{Hom}(Y,\mathbb{Z})$ における $\varepsilon_1^\vee,\varepsilon_2^\vee,\dots,\varepsilon_n^\vee,c$ の双対基底を $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n,\Lambda_0$ と表わす. $\mathfrak{h}=Y\otimes\mathbb{C}$ とおく. $\mathfrak{h}^*=X\otimes\mathbb{C}$ とみなせる.

任意の $i\in\mathbb{Z}$ に対する $\varepsilon_i^\vee,\varepsilon_i$ を条件

$$\varepsilon_{i+n}^\vee=\varepsilon_i^\vee-c, \quad \varepsilon_{i+n}=\varepsilon_i$$

によって定め, $\alpha_i^\vee,\alpha_i$ を次のように定める:

$$\alpha_i^\vee=\varepsilon_i^\vee-\varepsilon_{i+1}^\vee, \quad \alpha_i=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}.$$

このとき $\alpha_i^\vee,\alpha_i$ は i について n 周期的であり, $\langle\alpha_i^\vee,\alpha_j\rangle=a_{ij}$ $(i,j\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ を満たしている. さらに $\alpha_0^\vee=\alpha_n^\vee=\varepsilon_n^\vee-\varepsilon_1^\vee+c$ であるから, $\alpha_1^\vee+\cdots+\alpha_n^\vee=c$ が成立している.

$\mathcal{A}_n^{\mathrm{cl}}$ は $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,c$ と f_i $(i\in I=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ から生成される $\mathbb{C}$ 上の多項式環であるとし, $\mathcal{A}_n^{\mathrm{cl}}$ に Poisson 代数の構造を次のように定める:

$$\{f_i,f_{i\pm1}\}=\pm1, \quad \{f_i,f_j\}=0 \quad (j\neq i\pm1), \quad \{\lambda,\mu\}=\{\lambda,f_j\}=0 \quad (\lambda,\mu\in\mathfrak{h}).$$

Poisson 構造を保つ $\mathcal{A}^{\mathrm{cl}}_n$ の自己同型 ω を次で定めることができる:

$$\omega(f_i) = f_{i+1}, \quad \omega(\varepsilon^\vee_i) = \varepsilon^\vee_{i+1}, \quad \omega(c) = c.$$

特に $\omega(\varepsilon^\vee_n) = \varepsilon^\vee_{n+1} = \varepsilon^\vee_1 - c$ である．この ω の位数は無限大だが, $\alpha^\vee_1, \dots, \alpha^\vee_{n-1}, c$ と f_i たちから生成される Poisson 部分代数上に制限すると位数は n になる[6]．生成元 $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, \omega$ を持ち, $A^{(1)}_{n-1}$ 型 Weyl 群の基本関係式に $\omega s_i = s_{i+1}\omega$ を付け加えたものを基本関係式とする群を拡大 Weyl 群と呼び, $\widetilde{W}$ と表わすことにする．

$\mathcal{A}^{\mathrm{cl}} = \mathcal{A}^{\mathrm{cl}}_n$ は定理 1.1 の前提条件を満たしているので, 商体 $Q(\mathcal{A}^{\mathrm{cl}}_n)$ に Weyl 群作用が定まる．具体的に s_i の作用は次の形をしている:

$$\begin{cases} s_i(f_{i\pm1}) = f_{i\pm1} \pm \dfrac{\alpha^\vee_i}{f_i}, \\ s_i(f_j) = f_j \quad (j \neq i \pm 1), \end{cases} \qquad \begin{cases} s_i(\varepsilon^\vee_i) = \varepsilon^\vee_{i+1}, \quad s_i(\varepsilon^\vee_{i+1}) = \varepsilon^\vee_i, \\ s_i(\varepsilon^\vee_j) = \varepsilon^\vee_j \quad (j \neq i, i+1), \\ s_i(c) = c. \end{cases}$$

s_i と ω の作用を合わせると拡大 Weyl 群 $\widetilde{W}$ の作用が得られる．

野海・山田は論文 [NY2] で $A^{(1)}_{n-1}$ 型高階 Painlevé 方程式を定義している．その $n = 3$ の場合は Painlevé IV 方程式と同値であり, $n = 4$ の場合は Painlevé V 方程式と同値である．すなわち $A^{(1)}_{n-1}$ 型高階 Painlevé 方程式は Painlevé IV, V 方程式の一般化になっている．

そして上の Weyl 群双有理作用 (実際には拡大 Weyl 群双有理作用) は $A^{(1)}_{n-1}$ 型高階 Painlevé 方程式を保ち, 方程式の Bäcklund 変換を与える．したがって野海・山田が論文 [NY3] で構成した Weyl 群双有理作用は Painlevé IV, V 方程式の対称性の一般化になっている．

n が奇数 $n = 2g + 1$ の場合について詳しく説明しよう[7]．

L-operator $L(z)$ を次のように定める[8]:

$$L(z) = \begin{bmatrix} \varepsilon^\vee_1 & f_1 & 1 & & \\ & \varepsilon^\vee_2 & f_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ z & & & \varepsilon^\vee_{n-1} & f_{n-1} \\ zf_n & z & & & \varepsilon^\vee_n \end{bmatrix}.$$

Hamiltonian $H \in \mathcal{A}^{\mathrm{cl}}_n$ を次のように定める:

$$H = \left(\frac{1}{g+2} \operatorname{tr}\left(L(z)^{g+2}\right) \text{ の } z \text{ の係数} \right).$$

[6] これは $\widehat{\mathrm{gl}}_n$ と $\widehat{\mathrm{sl}}_n$ の違いに関係がある．

[7] n が偶数の場合は式がずっと複雑になる．

n が 3 以上の奇数であるとき野海・山田 [NY2] が定義した $A^{(1)}_{n-1}$ 型高階 Painlevé 方程式は準周期 n を持つ dressing chain と同値である．準周期 n を持つ dressing chain は n 個の 2×2 の L-operators を用いて記述される．以下では $n \times n$ の L-operator を持ちいて野海・山田 [NY2] の $A^{(1)}_{n-1}$ 型高階 Painlevé 方程式を記述する．つまり同一の系が $n \times n$ と 2×2 の異なる L-operators を用いて記述されるのである．このような「双対性」の例は他にもたくさんある．

たとえば互いに素な 2 以上の整数 m, n に対して上の意味での双対性を持つ系を筆者は講演 [K5] の原稿第 3 節で構成している．上で n が奇数であるという条件は $m = 2$ と n が互いに素であるという条件に同値であり, [K5] の原稿第 3 節の $m = 2$ の場合の微分極限と関係している．

[8] L-operator から出発する Lax 形式による定式化については量子版に関する筆者自身のノート [K2, K3, K4] を参考にした．

$\mathcal{A}_n^{\mathrm{cl}}$ の $\mathbb{C}$-derivation $(\ )_t$ を次のように定める:

$$f_{i,t} = c\delta_{i,n} \quad (i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \qquad \lambda_t = 0 \quad (\lambda \in \mathfrak{h}).$$

$\mathcal{A}^{\mathrm{cl}}$ の $\mathbb{C}$-derivation ∂ を次のように定める:

$$\partial a = \{H, a\} + a_t.$$

この ∂ は具体的には次の形をしている:

$$\begin{aligned}
&\partial f_i = f_i \left(\sum_{\nu=1}^{g} f_{i+2\nu-1} \right) - \left(\sum_{\nu=1}^{g} f_{i+2\nu} \right) f_i + \alpha_i^\vee \quad (i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}), \\
&\partial \lambda = 0 \quad (\lambda \in \mathfrak{h})
\end{aligned}$$

この ∂ が $A_{2g}^{(1)}$ 型高階 Painlevé 方程式の時間発展を与える. 特に $\alpha_1^\vee + \cdots + \alpha_n^\vee = c$ より $\partial(f_1 + \cdots + f_n) = c$ が成立していることに注意せよ.

式の形から ∂ と ω が可換であることがすぐにわかる. すなわち ω は $A_{2g}^{(1)}$ 型高階 Painlevé 方程式の対称性になっている.

さらに $B(z)$ を次のように定める[9]:

$$B(z) = \begin{bmatrix}
\sum_{\nu=0}^{g} f_{1+2\nu} & 1 & & \\
 & \sum_{\nu=0}^{g} f_{2+2\nu} & \ddots & \\
 & & \ddots & 1 \\
z & & & \sum_{\nu=0}^{g} f_{n+2\nu}
\end{bmatrix}.$$

このとき $\{H, L(z)\} = -[B(z), L(z)]$, $L_t = z\partial_z(B(z))$ $(\partial_z = \partial/\partial z)$ が成立するので $A_{2g}^{(1)}$ 型高階 Painlevé 方程式を次のように書き直せる:

$$\partial L(z) = -[B(z), L(z)] + cz\partial_z(B(z)).$$

これを $A_{2g}^{(1)}$ 型高階 Painlevé 方程式の Lax 表示と呼ぶ. Lax 表示は次の零曲率方程式と同値である:

$$[\partial + B(z), cz\partial_z + L(z)] = 0.$$

この零曲率方程式は $A_{2g}^{(1)}$ 型高階 Painlevé 方程式は線形微分方程式 $(cz\partial_z + L(z))\,u = 0$ のモノドロミー保存変形を記述していることを意味している.

たとえば $n = 3$ のとき

$$H = f_1 f_2 f_3 - \varepsilon_3^\vee f_1 - \varepsilon_1^\vee f_2 - \varepsilon_2^\vee f_3 + C.$$

ここで C は $\mathcal{A}_n^{\mathrm{cl}}$ の Poisson center に属す[10]. 具体的には $C = (\varepsilon_1^\vee + \varepsilon_2^\vee + \varepsilon_3^\vee)(f_1 + f_2 + f_3)$ で与えられる. したがって

$$\partial(f_i) = f_i f_{i+1} - f_{i+2} f_i + \alpha_i^\vee \quad (i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}).$$

---

[9] $B(z)$ は $L(z)^{g+1}$ の "principal degree" が $n = 2g+1$ 以上の部分 $[L(z)^{g+1}]_{\geqq 2g+1}$ を z で割ったものに等しい.

[10] 量子化した場合には H の中の $f_1 f_2 f_3$ を $(f_1 f_2 f_3 + f_2 f_3 f_1 + f_3 f_1 f_2)/3$ で置き換えなければいけない.

この方程式は実は Painlevé IV 方程式と同値である, Pailevé IV の対称形式と呼ばれている.

微分作用素 $cz\partial_z + L(z)$ への拡大 Weyl 群 $\widetilde{W}$ の作用を次のように表示できる:

$$
\begin{aligned}
s_i(cz\partial_z + L(z)) &= G_i(cz\partial_z + L(z))G_i^{-1} \\
&= cz\partial_z + G_i L(z) G_i^{-1} \qquad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\
\omega(cz\partial_z + L(z)) &= \Lambda(z)(cz\partial_z + L(z))\Lambda(z)^{-1} \\
&= cz\partial_z + \Lambda(z)L(z)\Lambda(z)^{-1} - cz\partial_z(\Lambda(z))\Lambda(z)^{-1}.
\end{aligned}
$$

ここで単位行列を E, 行列単位を E_{ij} と書き, $G_i, \Lambda(z)$ を次のように定めた:

$$
G_i = E + \frac{\alpha_i^\vee}{f_i} E_{i+1,i}, \quad \Lambda(z) = E_{12} + \cdots + E_{n-1,n} + zE_{n1}.
$$

この表示を拡大 Weyl 群双有理作用の Lax 表示と呼ぶ. この Lax 表示は拡大 Weyl 群の双有理作用が線形微分方程式 $(cz\partial_z + L(z))\, u = 0$ のモノドロミー保存変換を記述していることを意味している.

$s_1, \dots, s_{n-1}$ の双有理作用の Lax 表示より $\mathrm{tr}(L^j)$ が $s_1, \dots, s_{n-1}$ の作用で不変であることがわかる. 特に Hamiltonian H は $s_1, \dots, s_{n-1}$ の作用で不変である. さらに $s_1, \dots, s_{n-1}$ の具体的な形からそれらが $(\ )_t$ と可換であることもわかる. これより $s_1, \dots, s_{n-1}$ と ∂ が可換であることがわかる. ω が ∂ と可換であった. したがって拡大 Weyl 群双有理作用は $A_{2g}^{(1)}$ 型高階 Painlevé 方程式の対称性になっている.

注意 1.2. 名古屋創が $A_{n-1}^{(1)}$ 型高階 Painlevé 方程式の量子化 [Na1] および一般化 [Na2] を遂行している. 量子化した後でもこの節のほとんどの式がそのまま成立している. □

1.4 例: 野海・山田 [NY1] の離散 Painlevé 方程式

野海・山田は論文 [NY1] で前節の $A_{n-1}^{(1)}$ 型の場合の拡大 Weyl 群双有理作用の構成を任意の型に一般化し, アフィン Weyl 群の格子部分の作用を離散力学系とみなして連続極限を取ると Painlevé 方程式が出て来ることを示している. これは野海・山田 [NY3] の Weyl 群双有理作用が古典的な Painlevé 微分方程式の一般化の対称性を記述しているだけではなく, GCM がアフィン型のとき Weyl 群の格子部分の作用が Painlevé 方程式の離散化の一般化になっていることを意味している.

$A_{n-1}^{(1)}$ 型の拡大 Weyl 群は

$$
T_1 = \omega s_{n-1}\cdots s_2 s_1,\ T_2 = s_1\omega s_{n-1}\cdots s_2,\ \dots,\ T_n = s_{n-1}\cdots s_2 s_1\omega
$$

で生成される格子を含んでいる. T_i の格子 Y への作用は次の通りである:

$$
T_i(\varepsilon_j^\vee) = \varepsilon_j^\vee - c\delta_{ij}, \quad T_i(c) = c.
$$

$\omega T_i = T_{i+1}\omega$ なので T_1 の双有理作用の様子を調べれば他の T_i の双有理作用の様子もわかる.

T_1 の双有理作用は Painlevé 方程式の離散化とみなせる. 実際, $A_2^{(1)}$ 型の拡大 Weyl 群の T_1 の作用が定める離散力学系の連続極限として Painlevé II が現われ, $n = 2g+1$

$(g=1,2,3,\dots)$ のとき $A_n^{(1)}$ 型の拡大 Weyl 群の T_1 の作用が定める離散力学系の連続極限として前節で説明した野海・山田 [NY2] の $A_{n-1}^{(1)}$ 型高階 Painlevé 方程式が現われる. このように拡大アフィン Weyl 群の格子部分の双有理作用は離散 Painlevé 方程式とみなせる. 詳しくは野海・山田の論文 [NY1] を見よ.

以上で説明したことをまとめておこう. 野海・山田は論文 [NY3] である種の Weyl 群双有理作用を構成した. $A_2^{(1)}$, $A_3^{(1)}$ 型の場合にその作用はそれぞれ Painlevé IV, V の Bäcklund 変換になっており, $n \geqq 3$ に対して $A_{n-1}^{(1)}$ 型拡大 Weyl 群の作用は $A_{n-1}^{(1)}$ 型高階 Painlevé 方程式の Bäcklund 変換を与える ([NY2]). それだけではなく, アフィン Weyl 群の格子部分を双有理作用が定める離散力学系は Painlevé 方程式の離散化になっている ([NY1]). このように Weyl 群双有理作用は Painlevé 方程式の対称性でかつそれ自身が離散 Pailevé 方程式を記述している. 筆者はこのような価値を持つ Weyl 群双有理作用を量子化することに成功した.

1.5 Weyl 群双有理作用の q 差分版量子化の構成

第 1.1 節の設定に戻る. 第 1.2 節に類似の記号法で野海・山田 [NY3] の Weyl 群双有理作用の量子化を構成しよう. 単に量子化するだけではなく, 同時に q 差分化も行なう.

q 数, q 階乗, q 二項係数をそれぞれ以下のように定める: $k=0,1,2,\dots$ に対して

$$[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}, \quad [k]_q! = [k]_q \cdots [2]_q [1]_q, \quad \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[x]_q [x-1]_q \cdots [x-k+1]_q}{[k]_q!}.$$

$\mathcal{A}_{q,0}$ は $f_i \neq 0$ $(i \in I)$ から生成される $\mathbb{F} = \mathbb{C}(q^{1/d})$ 上の代数で零因子を持たないものであるとする. さらに f_i $(i \in I)$ は $\mathcal{A}_{q,0}$ の中で次の q-Serre 関係式を満たしていると仮定する:

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} f_i^k f_j f_i^{1-a_{ij}-k} = 0 \quad (i \neq j).$$

$\mathcal{A}_{q,0}$ と $d^{-1}Y$ の群環 $\mathbb{F}[d^{-1}Y] = \bigoplus_{\lambda \in d^{-1}Y} \mathbb{F} q^\lambda$ のテンソル積を $\mathcal{A}_q$ と表わし, $\mathcal{A}_{q,0}$, $\mathbb{F}[d^{-1}Y]$ とそれらの $\mathcal{A}_q$ での像を同一視しておく. $\mathcal{A}_q$ の中で, $q^\lambda f_i = q^{-\langle \lambda, \alpha_i \rangle} f_i q^\lambda$ ではなく, $q^\lambda f_i = f_i q^\lambda$ が成立していることに注意せよ.

補題 1.3 ([K6]). 有限型もしくはアフィン型の量子展開環の部分代数の商代数で零因子を持たないものはすべて Ore 整域になる. □

この補題を使えば GCM が有限型もしくはアフィン型ならば上のような $\mathcal{A}_q$ は常に Ore 整域になることがわかる[11]. そこで以下 $\mathcal{A}_q$ は Ore 整域であると仮定する. すなわち $\mathcal{A}_q$ を部分代数として含み, そのすべての元が as^{-1} $(a, s \in \mathcal{A}_q,\ s \neq 0)$ と表わされるような斜体 $Q(\mathcal{A}_q)$ が同型を除いて一意に存在すると仮定する. このとき $Q(\mathcal{A}_q)$ の任意の元は $s^{-1}a$ $(a, s \in \mathcal{A}_q,\ s \neq 0)$ とも表わされる.

0 以上の整数 k に対して $\mathrm{ad}_q(f_i)^k(f_j)$ $(i \neq j)$ を次のように定める:

$$\mathrm{ad}_q(f_i)^k(f_j) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu q_i^{\nu(k-1+a_{ij})} \begin{bmatrix} k \\ \nu \end{bmatrix}_{q_i} f_i^{k-\nu} f_j f_i^\nu \quad (i \neq j).$$

[11] GCM がどのような型であっても $\mathcal{A}_q$ が「十分小さい」と仮定すれば $\mathcal{A}_q$ は Ore 整域になる. より詳しくは論文 [K6] の第 2.3 節の一般論と第 2.4 節の例を見よ.

たとえば $i \neq j$ ならば

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_q(f_i)^1(f_j) &= f_i f_j - q_i^{a_{ij}} f_j f_i, \\
\mathrm{ad}_q(f_i)^2(f_j) &= f_i^2 f_j - q_i^{1+a_{ij}}[2]_{q_i} f_i f_j f_i + q_i^{2(1+a_{ij})} f_j f_i^2 \\
&= f_i \,\mathrm{ad}_q(f_i)(f_j) - q_i^{2+a_{ij}} \,\mathrm{ad}_q(f_i)(f_j) f_i, \\
\mathrm{ad}_q(f_i)^3(f_j) &= f_i^3 f_j - q_i^{2+a_{ij}}[3]_{q_i} f_i^2 f_j f_i + q_i^{2(2+a_{ij})}[3]_{q_i} f_i f_j f_i^2 - q_i^{3(2+a_{ij})} f_j f_i^3 \\
&= f_i \,\mathrm{ad}_q(f_i)^2(f_j) - q_i^{4+a_{ij}} \,\mathrm{ad}_q(f_i)^2(f_j) f_i.
\end{aligned}$$

この $\mathrm{ad}_q(f_i)^k(f_j)$ の定義は量子展開環の随伴表現に関する公式の $\mathcal{A}_q$ における像になっている．また $\mathrm{ad}_q(f_i)^k(f_j)$ $(i \neq j)$ を帰納的に次のように定めることもできる:

$$\mathrm{ad}_q(f_i)^0(f_j) = f_j, \quad \mathrm{ad}_q(f_i)^{k+1}(f_j) = f_i \,\mathrm{ad}_q(f_i)^k(f_j) - q_i^{2k+a_{ij}} \,\mathrm{ad}_q(f_i)^k(f_j) f_i$$

これより q-Serre 関係式は $i \neq j$ のとき $k > -a_{ij}$ ならば $\mathrm{ad}_q(f_i)^k(f_j) = 0$ となることと同値であることがわかる．

$f_i^\lambda f_j f_i^{-\lambda}$ $(i, j \in I,\ \lambda \in Y)$ を次のように定める:

$$f_i^\lambda f_j f_i^{-\lambda} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{-a_{ij}} q_i^{(k+a_{ij})(\lambda-k)} \begin{bmatrix} \lambda \\ k \end{bmatrix}_{q_i} \mathrm{ad}_q(f_i)^k(f_j) f_i^{-k} & (i \neq j), \\ f_j & (i = j). \end{cases}$$

この定義は λ が整数ならば実際に成立している等式[12]の拡張になっている． 定義式の $i \neq j$ のときの和が $k = -a_{ij}$ で切れているのは q-Serre 関係式より $k > -a_{ij}$ ならば $\mathrm{ad}_q(f_i)^k(f_j) = 0$ となるからである．定義式の右辺は q を q^{-1} で置き換える変換で不変になる．たとえば $a_{ij} = -1$ のとき

$$\begin{aligned}
a_{ij} = -1 \implies f_i^{\lambda_i} f_j f_i^{-\lambda_i} &= q_i^{-\lambda} f_j + [\lambda]_{q_i}(f_i f_j - q_i^{-1} f_j f_i) f_i^{-1} \\
&= [1-\lambda]_{q_i} f_j + [\lambda]_{q_i} f_i f_j f_i^{-1} \\
&= q_i^\lambda f_j + [\lambda]_{q_i}(f_i f_j - q_i f_j f_i) f_i^{-1}.
\end{aligned}$$

定理 1.4 ([K6])**.** $Q(\mathcal{A}_q)$ の代数自己同型 s_i を次によって定めることができる:

$$s_i(f_j) = f_i^{\alpha_i^\vee} f_j f_i^{-\alpha_i^\vee} \quad (j \in I), \qquad s_i(q^\lambda) = q^{s_i(\lambda)} = q^{\lambda - \langle \lambda, \alpha_i \rangle \alpha_i^\vee} \quad (\lambda \in d^{-1} Y).$$

これによって Weyl 群 $W = \langle s_i \rangle_{i \in I}$ が斜体 $Q(\mathcal{A}_q)$ に作用する． □

注意 1.5. Braid 群ではなく Weyl 群の作用になることに注意せよ．ちょうど Weyl 群の作用になる理由は Verma 関係式がぴったり Weyl 群の基本関係式を導くからである．以下の証明を見よ． □

証明の方針. 任意の整数 n について $f_i^n f_j f_i^{-n}$ たちが満たす関係式を $f_i^{\alpha_i^\vee} f_j f_i^{-\alpha_i^\vee}$ も満たしていることを使う[13].

---

[12]帰納法で証明できる．

[13]z の有理式 $f(z)$ が無限個の a について $f(a) = 0$ を満たしていれば $f(z) = 0$ であることから出る．$f_i^\lambda f_j f_i^{-\lambda}$ の定義式の右辺は q_i^λ について有理式になっている．

前半. 任意の整数 n に対して $Q(\mathcal{A}_q)$ からそれ自身への写像 $\mathrm{Ad}(f_i^n) : x \mapsto f_i^n x f^{-n}$ は代数自己同型を定める. 特に生成元の対応 $f_j \mapsto f_i^n f_j f_i^{-n}$, $q^\lambda \mapsto q^\lambda$ は生成元たちが満たす任意の関係式を保つ. よって生成元の対応 $f_j \mapsto f_i^{\alpha_i^\vee} f_j f_i^{-\alpha_i^\vee}$, $q^\lambda \mapsto q^\lambda$ も生成元たちが満たす任意の関係式を保つ. したがってこの対応は $Q(\mathcal{A}_q)$ の代数自己同型 $\mathrm{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee})$ を定める. $Q(\mathcal{A}_q)$ の代数自己同型 $\tilde{s}_i$ を生成元の対応 $f_j \mapsto f_j$, $q^\lambda \mapsto q^{\lambda - \langle \lambda, \alpha_i \rangle \alpha_i^\vee}$ によって定める. 以上の二つの代数自己同型の合成 $\mathrm{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee}) \circ \tilde{s}_i$ が構成したい s_i の作用である.

後半. $s_i = \mathrm{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee}) \circ \tilde{s}_i$ が Weyl 群の基本関係式をみたしていることを示せばよい.

$s_i^2 = 1$ は次のように示される:

$$s_i^2 = \mathrm{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee})\tilde{s}_i \,\mathrm{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee})\tilde{s}_i = \mathrm{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee})\,\mathrm{Ad}(f_i^{-\alpha_i^\vee})\tilde{s}_i^2 = 1.$$

ここで $\tilde{s}_i$ は $\alpha_i^\vee$ を $-\alpha_i^\vee$ に移すので $\tilde{s}_i \,\mathrm{Ad}(f_i^{\alpha_i^\vee}) = \mathrm{Ad}(f_i^{-\alpha_i^\vee})\tilde{s}_i$ が成立することを使った. 形式的にこの証明は次のように書き直される:

$$f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i = f_i^{\alpha_i^\vee} f_i^{-\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i^2 = 1.$$

残りの関係式の証明も方針は同様であるが, f_i たちが満たす Verma 関係式を使わなければいけない. q-Serre 関係式から以下が導かれる (Lusztig [L] の第 39.3 節): 任意の 0 以上の整数 k, l に対して

1. $(a_{ij}, a_{ji}) = (-1, -1)$ ならば $f_i^k f_j^{k+l} f_i^l = f_j^l f_i^{k+l} f_j^k$;
2. $(a_{ij}, a_{ji}) = (-1, -2)$ ならば $f_i^k f_j^{2k+l} f_i^{k+l} f_j^l = f_j^l f_i^{k+l} f_j^{2k+l} f_i^k$;
3. $(a_{ij}, a_{ji}) = (-1, -3)$ ならば $f_i^k f_j^{3k+l} f_i^{2k+l} f_j^{3k+2l} f_i^{k+l} f_j^l = f_j^l f_i^{k+l} f_j^{3k+2l} f_i^{2k+l} f_j^{3k+l} f_i^k$.

これらの関係式を Verma 関係式と呼ぶことにする. これらを以下と比較すると, k, l のそれぞれに右辺の $\alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee$ が対応していることがわかる:

1. $(a_{ij}, a_{ji}) = (-1, -1)$ ならば

$$\begin{cases} 1(\alpha_i^\vee) = \alpha_i^\vee, \\ s_i(\alpha_j^\vee) = \alpha_i^\vee + \alpha_j^\vee, \\ s_i s_j(\alpha_i^\vee) = \alpha_j^\vee, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1(\alpha_j^\vee) = \alpha_j^\vee, \\ s_j(\alpha_i^\vee) = \alpha_i^\vee + \alpha_j^\vee, \\ s_j s_i(\alpha_j^\vee) = \alpha_i^\vee. \end{cases}$$

2. $(a_{ij}, a_{ji}) = (-1, -2)$ ならば

$$\begin{cases} 1(\alpha_i^\vee) = \alpha_i^\vee, \\ s_i(\alpha_j^\vee) = 2\alpha_i^\vee + \alpha_j^\vee, \\ s_i s_j(\alpha_i^\vee) = \alpha_i^\vee + \alpha_j^\vee, \\ s_i s_j s_i(\alpha_j^\vee) = \alpha_j^\vee, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1(\alpha_j^\vee) = \alpha_j^\vee, \\ s_j(\alpha_i^\vee) = \alpha_i^\vee + \alpha_j^\vee, \\ s_j s_i(\alpha_j^\vee) = 2\alpha_i^\vee + \alpha_j^\vee, \\ s_j s_i s_j(\alpha_i^\vee) = \alpha_i^\vee. \end{cases}$$

3. $(a_{ij}, a_{ji}) = (-1, -3)$ ならば

$$\begin{cases} 1(\alpha_i^\vee) = \alpha_i^\vee, \\ s_i(\alpha_j^\vee) = 3\alpha_i^\vee + \alpha_j^\vee, \\ s_i s_j(\alpha_i^\vee) = 2\alpha_i^\vee + \alpha_j^\vee, \\ s_i s_j s_i(\alpha_j^\vee) = 3\alpha_i^\vee + 2\alpha_j^\vee, \\ s_i s_j s_i s_j(\alpha_j^\vee) = \alpha_i^\vee + \alpha_j^\vee, \\ s_i s_j s_i s_j s_i(\alpha_j^\vee) = \alpha_j^\vee, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1(\alpha_j^\vee) = \alpha_j^\vee, \\ s_j(\alpha_i^\vee) = \alpha_i^\vee + \alpha_j^\vee, \\ s_j s_i(\alpha_j^\vee) = 3\alpha_i^\vee + 2\alpha_j^\vee, \\ s_j s_i s_j(\alpha_i^\vee) = 2\alpha_i^\vee + \alpha_j^\vee, \\ s_j s_i s_j s_i(\alpha_j^\vee) = 3\alpha_i^\vee + \alpha_j^\vee, \\ s_j s_i s_j s_i s_j(\alpha_i^\vee) = \alpha_i^\vee. \end{cases}$$

比較によって Verma 関係式は形式的に以下と同値であることがわかる:

1. $(a_{ij}, a_{ji}) = (-1,-1)$ のとき
$$f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i f_j^{\alpha_j^\vee}\tilde{s}_j f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i = f_j^{\alpha_j^\vee}\tilde{s}_j f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i f_j^{\alpha_j^\vee}\tilde{s}_j.$$
2. $(a_{ij}, a_{ji}) = (-1,-2)$ ならば
$$f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i f_j^{\alpha_j^\vee}\tilde{s}_j f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i f_j^{\alpha_j^\vee}\tilde{s}_j = f_j^{\alpha_j^\vee}\tilde{s}_j f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i f_j^{\alpha_j^\vee}\tilde{s}_j f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i.$$
3. $(a_{ij}, a_{ji}) = (-1,-3)$ ならば
$$f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i f_j^{\alpha_j^\vee}\tilde{s}_j f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i f_j^{\alpha_j^\vee}\tilde{s}_j f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i f_j^{\alpha_j^\vee}\tilde{s}_j = f_j^{\alpha_j^\vee}\tilde{s}_j f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i f_j^{\alpha_j^\vee}\tilde{s}_j f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i f_j^{\alpha_j^\vee}\tilde{s}_j f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i.$$

すなわち $f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i$ は Weyl 群の基本関係式を満たしている. たとえば $(-1,-1)$ の場合は次のように示される:

$$\begin{aligned}
f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i f_j^{\alpha_j^\vee}\tilde{s}_j f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i &= f_i^{\alpha_i^\vee} f_j^{s_i(\alpha_j^\vee)} f_i^{s_i s_j(\alpha_i^\vee)}\tilde{s}_i\tilde{s}_j\tilde{s}_i = f_i^{\alpha_i^\vee} f_j^{\alpha_i^\vee+\alpha_j^\vee} f_i^{\alpha_j^\vee}\tilde{s}_i\tilde{s}_j\tilde{s}_i \\
&= f_j^{\alpha_j^\vee} f_i^{\alpha_i^\vee+\alpha_j^\vee} f_j^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_j\tilde{s}_i\tilde{s}_j = f_j^{\alpha_j^\vee} f_i^{s_j(\alpha_i^\vee)} f_j^{s_j s_i(\alpha_j^\vee)}\tilde{s}_j\tilde{s}_i\tilde{s}_j = f_j^{\alpha_j^\vee}\tilde{s}_j f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i f_j^{\alpha_j^\vee}\tilde{s}_j.
\end{aligned}$$

ここで 2 行目の最初の等号で Verma 関係式 (の k, l をそれぞれ $\alpha_i^\vee, \alpha_j^\vee$ で置き換えた関係式) を使った. 他の場合もまったく同様の計算で示せる.

これらの形式的関係式は s_i の $Q(\mathcal{A}_q)$ への作用が Weyl 群の基本関係式を満たしていることを意味している. □

1.6 A_∞ 型 q 差分量子 Weyl 群双有理作用の Lax 表示

この節の内容は論文 [K6] にはない新しい結果である.

この節では $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 行列を扱う. 単位行列を E と書き, 行列単位を E_{ij} と書く.

A_∞ 型の R-matrix R とある代数の生成元を成分に持つ上三角行列 L を考える:

$$R := \sum_i qE_{ii}\otimes E_{ii} + \sum_{i\neq j} E_{ii}\otimes E_{jj} + \sum_{i<j}(q-q^{-1})E_{ij}\otimes E_{ji},$$
$$L = \sum_{i,j\in\mathbb{Z},\, i\leqq j} L_{ij}E_{ij} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & L_{i-1,i-1} & L_{i-1,i} & L_{i-1,i+1} & \ddots \\ & & L_{i,i} & L_{i,i+1} & \ddots \\ & & & L_{i+1,i+1} & \ddots \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

$L^1 = L\otimes E$, $L^2 = E\otimes L$ とおく. 生成元 L_{ij} $(i\leqq j)$, L_{ii}^{-1} と基本関係式

$$RL^1L^2 = L^2L^1R, \quad L_{ii}^{-1}L_{ii} = L_{ii}L_{ii}^{-1} = 1$$

によって定義される $\mathbb{F} = \mathbb{C}(q)$ 上の代数を $\mathcal{B}_-$ と表わす. 関係式 $RL^1L^2 = L^2L^1R$ は以下と同値である:

- $i \leqq j < k \leqq l$ または $k < i \leqq j < l \implies L_{ij}L_{kl} = L_{kl}L_{ij}$,
- $k < i \leqq j \implies L_{ij}L_{kj} = qL_{kj}L_{ij}$,
- $i \leqq j < l \implies L_{ij}L_{il} = q^{-1}L_{il}L_{ij}$,
- $k < i \leqq l < j \implies L_{ij}L_{kl} - L_{kl}L_{ij} = (q-q^{-1})L_{kj}L_{il}$.

注意 1.6. L を上三角行列とせずに $L = \sum_{i,j} L_{ij}E_{ij}$ としたとき, $RL^1L^2 = L^2L^1R$ と以下は同値になる: $k < i$, $l < j$ のとき

$$\begin{aligned} &L_{il}L_{kj} = L_{il}L_{kj}, \quad L_{ij}L_{kl} - L_{kl}L_{ij} = (q-q^{-1})L_{il}L_{kj}, \\ &L_{ij}L_{il} = qL_{il}L_{ij}, \quad L_{ij}L_{kj} = qL_{kj}L_{ij}. \end{aligned}$$

これらの関係式は $k < i$, $l < j$ に対する次の図式を用いて記憶するのが便利である:

$$\begin{array}{ccc} kl & \leftarrow & kj \\ \uparrow & \nwarrow & \uparrow \\ il & \leftarrow & ij \end{array}$$

縦もしくは横の矢印には $L_{ij}L_{il} = qL_{il}L_{ij}$ 型の関係式が対応しており, 斜めの矢印には $L_{ij}L_{kl} - L_{kl}L_{ij} = (q-q)^{-1}L_{il}L_{kj}$ が対応しており, 矢印で結ばれていない L_{il}, L_{kj} は互いに可換になるという風におぼえておけばよい. □

L の対角部分 $T = \sum_i L_{ii}E_{ii} = \mathrm{diag}(\{L_{ii}\}_{i\in\mathbb{Z}})$ で L を左側から割ったものを $\widetilde{L}$ と書き, 次のように表わす:

$$\widetilde{L} = T^{-1}L = E + \sum_{i<j} f_{ij}E_{ij} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 1 & f_{i-1,i} & f_{i-1,i+1} & \ddots \\ & & 1 & f_{i,i+1} & \ddots \\ & & & 1 & \ddots \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

ここで $f_{ij} = L_{ii}^{-1}L_{ij}$ とおいた. f_{ij} たちで生成される $\mathcal{B}_-$ の部分代数を $\mathcal{N}_-$ と表わす.

$f_i = (1-q^2)^{-1}f_{i,i+1}$ とおく. このとき以下が成立している:

- f_i たちは A_∞ 型の q-Serre 関係式を満たしている. すなわち $i, j \in I = \mathbb{Z}$ に対して,

$$f_i^2 f_{i\pm1} - (q+q^{-1})f_i f_{i\pm1} f_i + f_{i\pm1} f_i^2 = 0, \quad f_i f_j = f_j f_i \quad (j \neq i \pm 1).$$

- $f_{i,i+1} = (1-q^2)f_i$ 以外の f_{ij} たちは

$$f_{ij}f_j - qf_jf_{ij} = f_{i,j+1} \quad (i < j) \tag{$*$}$$

を用いて帰納的に f_i たちだけで表わされる.

$f_{ij} = L_{ii}^{-1}L_{ij}$ に関するこれらの関係式と

$$L_{ii}L_{ij} = q^{-1}L_{ij}L_{ii}, \quad L_{jj}L_{ij} = qL_{ij}L_{jj}, \quad L_{kk}L_{ij} = L_{ij}L_{kk} \quad (i<j,\ k\ne i,j)$$

から L_{ij} たちに関するすべての関係式を導くことができる. よって $\mathcal{N}_-$ は $U_q(\mathrm{gl}_\infty)$ の下三角部分 $U_q(\mathfrak{n}_-)$ と同一視される.

$\varepsilon_i^\vee$ $(i\in\mathbb{Z})$ で生成される自由 $\mathbb{Z}$ 加群を Y と書き, その双対格子 $X = \mathrm{Hom}(Y,\mathbb{Z})$ における双対基底を ε_i $(i\in\mathbb{Z})$ と表わす. $\alpha_i^\vee = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$, $\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$ とおく. さらに記号の簡単のため t_i, a_i を次のように定めておく:

$$t_i = q^{\varepsilon_i^\vee}, \quad a_i = q^{\alpha_i^\vee} = t_i/t_{i+1}.$$

f_{ij} たちで生成される代数 $\mathcal{N}_-$ と Y の群環 $\mathbb{F}[Y] = \bigoplus_{\lambda\in Y}\mathbb{F}q^\lambda$ のテンソル積を $\mathcal{A}_{q,\infty}$ と表わし, $\mathcal{N}_-$, $\mathbb{F}[Y]$ と $\mathcal{A}_{q,\infty}$ におけるそれらの像を同一視しておく. $\mathcal{A}_{q,\infty}$ の中で q^λ と f_{ij} は互いに可換であることに注意せよ.

このとき前節の方法で商体 $Q(\mathcal{A}_{q,\infty})$ に Weyl 群作用が定まる. すなわち以下によって $Q(\mathcal{A}_{q,\infty})$ に Weyl 群の代数自己同型作用を定めることができる:

- $j = i\pm 1$ のとき

$$\begin{aligned} s_i(f_j) &= a_i^{-1}f_j + \frac{a_i - a_i^{-1}}{q-q^{-1}}(f_if_j - q^{-1}f_jf_i)f_i^{-1} = a_if_j + \frac{a_i-a_i^{-1}}{q-q^{-1}}(f_if_j - qf_jf_i)f_i^{-1} \\ &= \frac{qa_i^{-1} - q^{-1}a_i}{q-q^{-1}}f_j + \frac{a_i - a_i^{-1}}{q-q^{-1}}f_if_jf_i^{-1}, \end{aligned}$$

  $j\ne i\pm1$ のとき $s_i(f_j) = f_j$.

- $s_i(t_i) = t_{i+1}, \quad s_i(t_{i+1}) = t_i, \quad s_i(t_j) = t_j \quad (j\ne i, i+1)$.

q-Serre 関係式と $(*)$ を用いて一般の f_{ij} への s_k の作用を書き下すことができる:

- $i<k$, $j=k$ の場合 $s_k(f_{ik}) = a_kf_{ik} - (a_k - a_k^{-1})f_{i,k+1}f_{k,k+1}^{-1}$,
- $i = k+1$, $j>k+1$ の場合 $s_k(f_{k+1,j}) = a_k^{-1}f_{k+1,j} + (a_k - a_k^{-1})f_{k,k+1}^{-1}f_{kj}^{-1}$,
- これら以外の場合 $s_k(f_{ij}) = f_{ij}$.

これらの公式をまとめて次のように書き表わすことができる.

定理 1.7 (Weyl 群作用の Lax 表示)**.** 対角行列 D と 上三角行列 M を次のように定める[14]:

$$D = \sum_i t_iE_{ii} = \mathrm{diag}(\{t_i\}_{i\in\mathbb{Z}}) = \mathrm{diag}(\{q^{\varepsilon_i^\vee}\}_{i\in\mathbb{Z}}),$$

$$M = D\widetilde{L}D = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & t_{i-1}^2 & t_{i-1}t_if_{i-1,i} & t_{i-1}t_{i+1}f_{i-1,i+1} & \ddots \\ & & t_i^2 & t_it_{i+1}f_{i,i+1} & \ddots \\ & & & t_{i+1}^2 & \ddots \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

[14]Version 1.5 以前の版では M を $M = D^2\widetilde{L}$ と定義していた.

下三角行列 $\widetilde{G}'_k$, $\widetilde{G}_k$ と対角成分がすべて 1 の下三角行列 G_k を次のように定める:

$$g_k = \frac{a_k - a_k^{-1}}{f_{k,k+1}},$$

$$\widetilde{G}_k = g_k E_{k+1,k} + a_k E_{kk} + a_k^{-1} E_{k+1,k+1} + \sum_{i \neq k,k+1} E_{ii} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & a_k & & & \\ & & g_k & a_k^{-1} & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{G}'_k = g_k E_{k+1,k} + a_k^{-1} E_{kk} + a_k E_{k+1,k+1} + \sum_{i \neq k,k+1} E_{ii} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & a_k^{-1} & & & \\ & & g_k & a_k & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

$$G_k = E + \frac{a_k - a_k^{-1}}{f_{k,k+1}} E_{k+1,k} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & g_k & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

このとき次が成立する[15]:

$$s_k(\widetilde{L}) = \widetilde{G}_k \widetilde{L} (\widetilde{G}'_k)^{-1}, \qquad s_k(M) = G_k M G_k^{-1}.$$

これを A_∞ 型 q 差分量子 Weyl 群双有理作用の Lax 表示と呼ぶ. □

注意 1.8 (幾何結晶との関係). 上の定理は $M = D\widetilde{L}D$ という行列が q 差分版量子 Weyl 群双有理作用の理論で特別に重要であることを示唆している.

$M = D\widetilde{L}D$ の (i,j) 成分を M_{ij} と表わす:

$$M_{ii} = t_i^2, \qquad M_{ij} = t_i t_j f_{ij} \quad (i < j), \qquad M_{ij} = 0 \quad (i > j).$$

このとき G_i の $(i+1,i)$ 成分は次のように表わされる:

$$\frac{a_i - a_i^{-1}}{f_{i,i+1}} = \frac{M_{ii} - M_{i+1,i+1}}{M_{i,i+1}} = \frac{1 - (M_{ii}/M_{i+1,i+1})^{-1}}{M_{ii}^{-1} M_{i,i+1}} = \frac{(M_{ii}/M_{i+1,i+1}) - 1}{M_{i,i+1} M_{i+1,i+1}^{-1}}.$$

よって $\alpha_i(M) = M_{ii}/M_{i+1,i+1}$, $\psi_i(M) = M_{ii}^{-1} M_{i,i+1}$, $y_i(a) = \exp(aE_{i+1,i})$ とおくと,

$$G_i = y_i \left(\frac{1 - \alpha_i(M)^{-1}}{\psi_i(M)} \right).$$

[15] 前者の $s_k(\widetilde{L})$ に関する公式から後者の $s_k(M)$ に関する公式が導かれる. 前者の $s_k(\widetilde{L})$ に関する公式はすでに得られている $s_k(f_{ij})$ に関する公式と同値である.

この公式は M (もしくは M の成分から生成される代数) は Borel 部分群のなす幾何結晶 (geometric crystal) の量子化になっていることを示唆している．

Borel 部分群のなす幾何結晶への Weyl 群双有理作用についてはたとえば [BK] の Lemma 3.17 を見よ．その式 (3.14) $s_i(b) = x_i(a)\cdot b\cdot(x_i(a))^{-1}$ と $a = \frac{1-\alpha_i(\gamma(b))}{\varphi_i(b)\alpha_i(\gamma(b))}$ における b, x_i, φ_i, $\alpha_i(\gamma(b))$ のそれぞれは我々の M, y_i, ψ_i, $\alpha_i(M)$ に対応している．ただし我々とは上三角と下三角が逆になっている．

幾何結晶の方では s_i の双有理作用にワンパラメータを入れた e_i^c を扱っている．量子化された上の場合にも $f_i^{\alpha_i^\vee}$ による conjugation の代わりにより一般の f_i^γ による conjugation を考えることによってワンパラメータ $c \in \mathbb{F}^\times$ を入れることができる．この c を形式的に

$$c = q^\gamma$$

と表わしておく．このとき以下のように $Q(\mathcal{A}_{q,\infty})$ の代数自己同型 s_i^c を定めることができる:

- $j = i \pm 1$ のとき

$$\begin{aligned}
s_i^c(f_j) &= c^{-1}f_j + \frac{c-c^{-1}}{q-q^{-1}}(f_if_j - q^{-1}f_jf_i)f_i^{-1} = cf_j + \frac{c-c^{-1}}{q-q^{-1}}(f_if_j - qf_jf_i)f_i^{-1} \\
&= \frac{qc^{-1}-q^{-1}c}{q-q^{-1}}f_j + \frac{c-c^{-1}}{q-q^{-1}}f_if_jf_i^{-1},
\end{aligned}$$

  $j \neq i \pm 1$ のとき $s_i^c(f_j) = f_j$.

- $s_i^c(t_i) = c^{-1}t_i, \quad s_i^c(t_{i+1}) = ct_{i+1}, \quad s_i^c(t_j) = t_j \quad (j \neq i, i+1).$

f_j たちへの作用は $s_i^c(f_j) = f_i^\gamma f_j f_i^{-\gamma}$ によって定め，パラメータへの作用は

$$s_i^c(q^\lambda) = c^{-\langle\lambda,\alpha_i\rangle}q^\lambda \quad (\text{形式的には } s_i^c(\lambda) = \lambda - \langle\lambda,\alpha_i\rangle\gamma)$$

によって定めた．この作用の Lax 表示は以下の通り．$G_i(c)$, $G_i'(c)$ を次のように定める:

$$G_i(c) = y_i\left(\frac{c^2-1}{a_if_{i,i+1}}\right) = \begin{bmatrix}
\ddots & & & & & 0 \\
& 1 & & & & \\
& & 1 & 0 & & \\
& & (c^2-1)/(a_if_{i,i+1}) & 1 & & \\
& & & & 1 & \\
0 & & & & & \ddots
\end{bmatrix},$$

$$G_i'(c) = y_i\left(\frac{1-c^{-2}}{a_i^{-1}f_{i,i+1}}\right) = \begin{bmatrix}
\ddots & & & & & 0 \\
& 1 & & & & \\
& & 1 & 0 & & \\
& & (1-c^{-2})/(a_i^{-1}f_{i,i+1}) & 1 & & \\
& & & & 1 & \\
0 & & & & & \ddots
\end{bmatrix}.$$

このとき s_i^c の作用は次の Lax 表示を持つ:

$$s_i^c(M) = G_i(c)MG_i'(c)^{-1}.$$

$G_i(c)$, $G'_i(c)$ を次のように表わすこともできる:

$$G_i(c) = y_i\left(\frac{c^2-1}{\alpha_i(M)\psi_i(M)}\right), \quad G'_i(c) = y_i\left(\frac{1-c^{-2}}{\psi_i(M)}\right).$$

以上の公式は [BK] の (3.8) 式の A_∞ 型の場合の量子化になっている. [BK] の (3.8) 式を次のように書き直せる:

$$e_i^c(b) = x_i\left(\frac{c-1}{\varphi_i(b)}\right)\cdot b\cdot x_i\left(\frac{1-c^{-1}}{\alpha_i(\gamma(b))\varphi_i(b)}\right)^{-1}.$$

これを上の結果と比較すると [BK] の (3.8) 式における e_i^c, b, x_i, c, φ_i, $\alpha_i(\gamma(b))$ のそれぞれは我々の場合の s_i^c, M, y_i, c^2, ψ_i, $\alpha_i(M)$ に対応していることがわかる. ただし上三角と下三角が反対になっていることには注意しなければいけない.

以上によって我々が構成した M は A_∞ 型の Borel 部分群のなす幾何結晶の量子化になっていることがわかった. そして幾何結晶の e_i^c にあたるものは f_i^γ の conjugation 作用によって構成可能であることもわかった.

これによって幾何結晶の方の e_i^c たちが満たす Verma 関係式の由来も明らかになった. f_j たちを動かさないパラメータのみへの s_i^c の作用を $\tilde{s}_i^c$ と書くと, s_i^c を $s_i^c = \mathrm{Ad}(f_i^\gamma)\circ\tilde{s}_i^c$ と表わせる. 上の結果によって少なくとも A_∞ 型の場合は幾何結晶の e_i^c の量子化は s_i^c になることがわかった. (おそらく一般の場合もそうなっているだろう.) f_i のべき f_i^γ たちは Verma 関係式を満たし, $\tilde{s}_i^c$ たちも Verma 関係式を満たしている. したがって s_i^c たちも Verma 関係式を満たしている. このように, e_i^c の量子化 s_i^c が Verma 関係式を満たすのは f_i のべきと $\tilde{s}_i^c$ が Verma 関係式を満たすからである. 古典版の幾何結晶の e_i^c たちが満たす Verma 関係式の表現論的理由は分かり難いが, e_i^c たちの量子化 s_i^c たちが Verma 関係式を満たす理由は表現論的に明確である.

この節では A_∞ 型の $\mathcal{N}_- = U_q(\mathfrak{n}_-)$ にパラメータを入れた代数の商体への Weyl 群作用を構成したが, $\mathcal{N}_- = U_q(\mathfrak{n}_-)$ の代わりにその適切な剰余代数を考えることによって Borel 部分群以外の幾何結晶の量子化も構成可能だろう. さらに A_∞ 型以外の任意の型でも同様の結果が成立していると予想される. □

注意 1.9. 上の定理の結果の $q\to 1$ での極限 (微分極限) について考えよう. $i<j$ に対して e_{ji} を $f_{ij} = (q-q^{-1})e_{ji}$ と定めると, $(*)$ より $e_{j+1,j}e_{ji} - qe_{ji}e_{j+1,j} = e_{j+1,i}$ が成立する. この等式は $q\to 1$ で行列単位が満たす等式に移る. このことに注意すれば $q = e^{\hbar/2}$ とおいて $M = D\widetilde{L}D$ と G_k を $\hbar$ に関して

$$M = E + \hbar\mathcal{M} + O(\hbar^2), \quad G_k = \mathcal{G}_k + O(\hbar)$$

と展開すると $\mathcal{M}$, $\mathcal{G}_k$ は次の形をしていることがわかる[16]:

$$\mathcal{M} = \sum_i \varepsilon_i^\vee E_{ii} + \sum_{i<j} x_{ji}E_{ij}, \quad \mathcal{G}_k = E + \frac{\varepsilon_k^\vee - \varepsilon_{k+1}^\vee}{x_{k+1,k}}E_{k+1,k}.$$

ここで x_{ji} は行列単位が満たす関係式 $[x_{ij}, x_{kl}] = \delta_{jk}x_{il} - \delta_{li}x_{kj}$ を満たしている. このとき, $x_{k+1,k}^{\alpha_i^\vee}$ の conjugation 作用を使って x_{ji} $(i<j)$ と $\varepsilon_i^\vee$ たちで生成される斜体に Weyl 群を作用させることができ, $s_k(\mathcal{M}) = \mathcal{G}_k\mathcal{M}\mathcal{G}_k^{-1}$ が成立していることも示せる. この結果は野海の本 [N] の定理 7.1 の A_∞ 型への拡張の量子化になっている. つまり上の定理は野海の本 [N] の定理 7.1 の A_∞ 型への拡張の q 差分版量子化になっている. □

[16] 厳密な議論をしていないが, 容易に正当化可能である.

2　長谷川 [H] の量子 Weyl 群双有理作用の再構成

2.1　梶原・野海・山田 [KNY] の q 差分版 Weyl 群双有理作用

梶原・野海・山田 [KNY] は q 差分版 Weyl 群双有理作用を $A_2^{(1)}$ 型の場合に構成した. その構成は一般の型に以下のように拡張される.

$A = [a_{ij}]_{i,j\in I}$ は対称化可能 GCM であるとし, Y, $\alpha_i^\vee$, α_i, d_i, d などの記号は第 1.1 節の通りとする.

ϵ_{ij} $(i, j \in I)$ は以下の性質を持つと仮定する:

$$\epsilon_{ji} = -\epsilon_{ij}, \qquad \epsilon_{ij} = \begin{cases} \pm 1 & (a_{ij} < 0), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

$\mathcal{A}^{\mathrm{cl}}$ は F_i $(i \in I)$ で生成される $\mathbb{F} = \mathbb{C}(q^{1/d})$ 上の多項式環と $d^{-1}Y$ の群環 $\mathbb{F}[d^{-1}Y] = \bigoplus_{\lambda\in d^{-1}Y} \mathbb{F}q^\lambda$ のテンソル積であるとする. 記号の簡単のため

$$a_i = q_i^{\alpha_i^\vee}$$

とおく. $\mathcal{A}^{\mathrm{cl}}$ には次によって Poisson 代数の構造が入る:

$$\{F_i, F_j\} = 2\eta\epsilon_{ij}(-d_i a_{ij})F_iF_j, \quad \{q^\lambda, q^\mu\} = 0, \quad \{q^\lambda, F_j\} = 0 \quad (\lambda, \mu \in Y).$$

ここで η は 0 でない任意定数である. $\mathcal{A}^{\mathrm{cl}}$ の商体を $Q(\mathcal{A}^{\mathrm{cl}})$ と表わす.

定理 2.1 (梶原・野海・山田 [KNY] の q 差分版の Weyl 群双有理作用)**.** $Q(\mathcal{A}^{\mathrm{cl}})$ の Poisson 代数としての自己同型 s_i を次によって定めることができる:

$$s_i(F_j) = F_j\left(\frac{1 + a_iF_i}{a_i + F_i}\right)^{\epsilon_{ij}(-a_{ij})}, \qquad s_i(q^\lambda) = q^{s_i(\lambda)} = q^{\lambda - \langle\lambda,\alpha_i\rangle\alpha_i^\vee}.$$

これによって Weyl 群 $W = \langle s_i\rangle_{i\in I}$ が $Q(\mathcal{A}^{\mathrm{cl}})$ に作用する. □

注意 2.2. 梶原・野海・山田 [KNY] は $A^{(1)}$ 型の場合に次の q-Painlevé IV 方程式の対称性として上の形の Weyl 群双有理作用を構成した:

$$\overline{F_i} = a_i a_{i+1} f_{i+1} \frac{1 + a_{i+2}f_{i+2} + a_{i+2}a_iF_{i+2}F_i}{1 + a_if_i + a_ia_{i+1}F_iF_{i+1}} \quad (i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}), \qquad \overline{q^\lambda} = q^\lambda \quad (\lambda \in Y),$$

ただし離散時間発展を $x \mapsto \bar{x}$ と書いた. □

2.2　長谷川 [H] の量子化の再構成

長谷川が [H] の第 1〜3 節で構成した前節の Weyl 群双有理作用の量子化を再構成しよう.

$A = [a_{ij}]_{i,j\in I}$ は対称化可能 GCM であるとし, Y, $\alpha_i^\vee$, α_i, d_i, d などの記号は第 1.1 節の通りとし, ϵ_{ij} は前節の通りとする. $q_i = q^{d_i}$ とおく.

生成元 $f_i, k_i^{\pm 1}$ $(i \in I)$ と基本関係式

$$k_ik_j = k_jk_i, \quad k_i^{-1}k_i = k_ik_i^{-1} = 1,$$

$$k_i f_j k_i^{-1} = q_i^{-a_{ij}} f_j, \quad f_i f_j = q_i^{\epsilon_{ij}(-a_{ij})} f_j f_i \quad (i \neq j).$$

で定義される $\mathbb{F} = \mathbb{C}(q^{1/d})$ 上の代数を $\mathcal{B}_-$ と表わす．最後の関係式 $f_i f_j = q_i^{\epsilon_{ij}(-a_{ij})} f_j f_i$ $(i \neq j)$ は q-Serre 関係式の十分条件であり, 切断 q-Serre 関係式と呼ばれる．$\mathcal{B}_-$ は $U_q(\mathfrak{b}_-)$ の剰余環になっている．

$U_q(\mathfrak{b}_-)$ の coproduct の形は $\Delta(f_i) = f_i \otimes 1 + k_i^{-1} \otimes f_i$ であった．右辺の各々の項の $\mathcal{B}_- \otimes \mathcal{B}_-$ での像をそれぞれ f_{i1}, f_{i2} と表わす:

$$f_{i1} = f_i \otimes 1, \quad f_{i2} = k_i^{-1} \otimes f_i.$$

$f_{i\nu}$ たちから生成される $\mathcal{B}_- \otimes \mathcal{B}_-$ の部分代数を $\widetilde{\mathcal{A}}_{q,0}$ と表わす．$f_{i\nu}$ は以下の基本関係式を満たしている:

$$f_{1\nu} f_{j\nu} = q_i^{\epsilon_{ij}(-a_{ij})} f_{j\nu} f_{i\nu}, \quad f_{i2} f_{j1} = q_i^{a_{ij}} f_{j1} f_{i2}.$$

$d_i a_{ij}$ は i, j の交換で不変なので $q_i^{a_{ij}}$ も i, j の交換で不変であることに注意せよ．

$\widetilde{\mathcal{A}}_{q,0}$ と $d^{-1}Y$ の群環 $\mathbb{F}[d^{-1}Y] = \bigoplus_{\lambda \in d^{-1}Y} \mathbb{F} q^\lambda$ のテンソル積を $\widetilde{\mathcal{A}}_q$ と表わし, $\widetilde{\mathcal{A}}_{q,0}$, $\mathbb{F}[d^{-1}]$ とそららの $\widetilde{\mathcal{A}}_q$ での像を同一視しておく．$\widetilde{\mathcal{A}}_q$ の商体を $Q(\widetilde{\mathcal{A}}_q)$ と表わす．$Q(\widetilde{\mathcal{A}}_q)$ の元 a_i, g_i, F_i を次のように定める:

$$a_i = q_i^{\alpha_i^\vee}, \quad g_i = f_{i1}^{-1} f_{i2} \quad F_i = a_i^{-1} g_i.$$

F_i たちと q^λ $(\lambda \in d^{-1}Y)$ で生成される $Q(\widetilde{\mathcal{A}}_q)$ の部分代数を $\mathcal{A}_q$ と表わし, その商体を $Q(\mathcal{A}_q)$ と表わす．$\mathcal{A}_q$ は $g_i = a_i F_i$ たちと q^λ $(\lambda \in d^{-1}Y)$ からも生成される．g_i たちだけで生成される部分代数を $\mathcal{A}_{q,0}$ と表わす．これらは以下の基本関係式を満たしている:

$$F_i F_j = q_i^{2\epsilon_{ij}(-a_{ij})} F_j F_i, \quad q^0 = 1,\ q^\lambda q^\mu = q^{\lambda+\mu},\ q^\lambda F_i = F_i q^\lambda \quad (\lambda, \mu \in d^{-1}Y).$$

特に F_i たちも切断 q-Serre 関係式を満たしている．しかし F_i の非整数べきの conjugation 作用を使って長谷川の量子化を再構成することはできない．もっと複雑な構成が必要になる．

$f_{i1} + f_{i2}$ たちも q-Serre 関係式を満たしている. 実は $f_{i1} + f_{i2}$ の非整数べきの conjugation 作用を使って, 長谷川の量子化を再構成することができる．

q シフト階乗を次のように定める:

$$(x)_{q,k} = (1+x)(1+q^2x)\cdots(1+q^{2(k-1)}x) \quad \text{for } k \in \mathbb{Z}_{\geqq 0},$$
$$(x)_{q,\infty} = (1+x)(1+q^2x)(1+qx^4)\cdots = \prod_{\mu=0}^{\infty}(1+q^{2\mu}x).$$

この定義が通常とは異なることに注意せよ．通常のそれは $(x;q)_k = \prod_{\mu=0}^{k-1}(1-q^\mu x)$ と定義される．一般に $yx = q^2 xy$ が成立しているとき, 次の q 二項定理が成立する:

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{k=0}^{n} q^{k(n-k)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} q^{k(n-k)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k(n-k)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-k} y^k.\end{aligned}$$

さらに x が可逆なとき $n=0,1,2,\dots$ に対して,

$$(x+y)^n = x^n(x^{-1}y)_{q,n} = x^n\frac{(x^{-1}y)_{q,\infty}}{(q^{2n}x^{-1}y)_{q,\infty}} = \frac{(q^{-2n}x^{-1}y)_{q,\infty}}{(x^{-1}y)_{q,\infty}}x^n.$$

この公式に登場する無限積は有限個の因子を除いて分子分母で打ち消し合って有限積になる.

q 二項定理を $f_{i2}f_{i1}=q_i^2f_{i1}f_{i2}$ に適用することによって次を示せる:

$$(f_{i1}+f_{i2})^n = \frac{(q_i^{-2n}g_i)_{q_i,\infty}}{(g_i)_{q_i,\infty}}f_{i1}^n \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

さらに $f_{i1}g_j = q_i^{(\epsilon_{ij}-1)a_{ij}}g_jf_{i1}$ より, 次が成立することがわかる:

$$(f_{i1}+f_{i2})^n g_i (f_{i1}+f_{i2})^{-n} = \phi_{ij}(q_i^n).$$

ここで $\phi_{ij}(x)\in Q(\mathcal{A}_{q,0}[x])$ は次の通り:

$$\phi_{ij}(x) = \begin{cases} g_j\left(\displaystyle\prod_{\nu=0}^{-a_{ij}-1}\frac{1+q_i^{2\nu}g_i}{1+q_i^{2\nu}x^{-2}g_i}\right) & \text{if } \epsilon_{ij}=+1, \\ x^{2(-a_{ij})}\left(\displaystyle\prod_{\nu=0}^{-a_{ij}-1}\frac{1+q_i^{2\nu}x^{-2}g_i}{1+q_i^{2\nu}g_i}\right)g_j & \text{if } \epsilon_{ij}=-1, \\ x^{-2}g_i & \text{if } i=j, \\ g_j & \text{if } a_{ij}=0. \end{cases}$$

$Q(\mathcal{A}_q)$ の代数自己同型 $\mathrm{Ad}((f_{i1}+f_{i2})^{\alpha_i^\vee})$ を次のように定めることができる:

$$\mathrm{Ad}((f_{i1}+f_{i2})^{\alpha_i^\vee})(g_i) = \phi_{ij}(q_i^{\alpha_i^\vee}) = \phi_{ij}(a_i), \quad \mathrm{Ad}((f_{i1}+f_{i2})^{\alpha_i^\vee})(q^\lambda) = q^\lambda \quad (\lambda\in d^{-1}Y).$$

さらに $Q(\mathcal{A}_q)$ の代数自己同型 $\tilde{s}_i$ を

$$\tilde{s}_i(g_i) = g_i, \quad \tilde{s}_i(q^\lambda) = q^{\lambda-\langle\lambda,\alpha_i\rangle\alpha_i^\vee} \quad (\lambda\in d^{-1}Y)$$

と定める. 以上の二種類の代数自己同型の合成 $s_i = \mathrm{Ad}((f_{i1}+f_{i2})^{\alpha_i^\vee})\circ\tilde{s}_i$ が求める Weyl 群作用である. 第 1.5 節と同様にしてこの s_i たちが $Q(\mathcal{A}_q)$ への Weyl 群作用を定めることを示せる. この作用を g_i ではなく, F_i の言葉で書き直すと次のようになる:

$$s_i(F_j) = \begin{cases} F_j\left(\displaystyle\prod_{\nu=0}^{-a_{ij}-1}\frac{1+q_i^{2\nu}a_iF_i}{a_i+q_i^{2\nu}F_i}\right) & \text{if } \epsilon_{ij}=+1, \\ \left(\displaystyle\prod_{\nu=0}^{-a_{ij}-1}\frac{a_i+q_i^{2\nu}F_i}{1+q_i^{2\nu}a_iF_i}\right)F_j & \text{if } \epsilon_{ij}=-1, \\ F_j & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$s_i(q^\lambda) = q^{\lambda-\langle\lambda,\alpha_i\rangle\alpha_i^\vee}, \quad \text{特に } s_i(a_j) = a_ja_i^{-a_{ij}}.$$

これらの公式はこの節で構成した Weyl 群作用が前節で説明した梶原・野海・山田 [KNY] は q 差分版 Weyl 群双有理作用の量子化になっていることを意味している. 長谷川が [H] の第 1〜3 節で別の方法を用いてこの量子化を構成している. つまり以上の構成は長谷川の量子 Weyl 群双有理作用の再構成になっている.

古典極限は q, q^λ, $\lambda\in d^{-1}Y$ のそれぞれを $e^{\hbar\eta}$, $e^{\eta\lambda}$, $\hbar^{-1}\lambda\in\hbar^{-1}d^{-1}Y$ で置き換えて $\hbar\to 0$ の極限を考えればよい. この古典極限で前節の結果 (F_i たちの Poisson 括弧および定理 2.1) がすべて再現される. (極限を取った後に $q=e^\eta$, $q^\lambda = e^{\eta\lambda}$, $a_i = e^{\alpha_i^\vee}$ と置く.)

参考文献

[BK] Berenstein, Arkady and Kazhdan, David. Geometric and unipotent crystals. GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999). Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part I, 188–236.
http://arxiv.org/abs/math/9912105

[H] Hasegawa, Koji. Quantizing the Bäcklund transformations of Painlevé equations and the quantum discrete Painlevé VI equation. Preprint 2007.
http://arxiv.org/abs/math/0703036

[KNY] Kajiwara, Kenji, Noumi, Masatoshi and Yamada, Yasuhiko. A study on the fourth q-Painleve equation. J. Phys. A 34 (2001), no. 41, 8563–8581.
http://arxiv.org/abs/nlin/0012063

[K1] 黒木玄. 可積分系およびモノドロミー保存系の量子化と離散化について. 研究会「時代精神としての数理物理」, 2003 年 11 月 25 日 (火)〜28 日 (金), 名古屋大学経済学部第 1 講義室での講演.
http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20031125Nagoya.pdf

[K2] 黒木玄. Quantum dressing chain に関するノート. 未完成のノート 2004 年 8 月 7 日.
http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/quantum_dressing_chain-01.pdf

[K3] 黒木玄. $n \times n$ の L-operator の q 差分版 (1). ノート 2004 年 9 月 30 日.
http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/q-L-operator-01.pdf

[K4] 黒木玄. $n \times n$ の L-operator の q 差分版 (2). ノート 2004 年 10 月 12 日.
http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/q-L-operator-02.pdf

[K5] Kuroki, Gen. Quantum groups and quantizations of isomonodromic systems. Talk at Exploration of New Structures and Natural Constructions in Mathematical Physics, Graduate School of Mathematics (Room 509), Nagoya University, March 5–8, 2007.
http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/200703QIMS.pdf

[K6] Kuroki, Gen. Quantum groups and quantization of Weyl group symmetries of Painlevé systems. Preprint 2008, to appear in Advanced Studies in Pure Mathematics, Proceedings of "Exploration of New Structures and Natural Constructions in Mathematical Physics", Nagoya University, March 5–8, 2007.
http://arxiv.org/abs/0808.2604

[L] Lusztig, George, Introduction to quantum groups, Progress in Mathematics, 110, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993, xii+341 pp.

[Na1] Nagoya, Hajime. Quantum Painleve systems of type $A_l^{(1)}$. Internat. J. Math. 15 (2004), no. 10, 1007–1031.

[Na2] Nagoya, Hajime. Quantum Painleve systems of the type $A_{n-1}^{(1)}$ with higher degree Lax operators. Internat. J. Math. 18 (2007), no. 7, 839–868.

[N] 野海正敏, パンルヴェ方程式 —対称性からの入門—, 数学の風景 4, 朝倉書店, 2000, 204 pp.

[NY1] Noumi, Masatoshi and Yamada, Yasuhiko. Affine Weyl groups, discrete dynamical systems and Painlevé equations. Comm. Math. Phys. 199 (1998), no. 2, 281–295.
`http://arxiv.org/abs/math/9804132`

[NY2] Noumi, Masatoshi and Yamada, Yasuhiko. Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$. Funkcial. Ekvac. 41 (1998), no. 3, 483–503.
`http://arxiv.org/abs/math/9808003`

[NY3] Noumi, Masatoshi and Yamada, Yasuhiko. Birational Weyl group action arising from a nilpotent Poisson algebra. Physics and combinatorics 1999 (Nagoya), 287–319, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001.
`http://arxiv.org/abs/math/0012028`