量子化された τ 函数の正則性

黒木玄 (Gen Kuroki)

東北大学数学教室

日本数学会 2012 年 3 月 26 日〜29 日
東京理科大学神楽坂キャンパス
2012/05/10 Version 4.4
http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20120328QuantumTau.pdf

2012 年 3 月 28 日

何をやったか

$[a_{ij}]_{i,j\in I}$, 任意の対称化可能 GCM

$\downarrow$

Weyl 群双有理作用を量子化

[K] `math/0808.2604`

(野海・山田 [NY] `math.QA/0012028` の

定理 1.1 の量子化)

$\downarrow$

量子 τ 函数の導入とその正則性

(これが新結果, [NY] の定理 1.2 と 1.3 の量子化)

$q = 1$ の場合は完全にできており, q 差分版もかなりできている.
定式化は主に q 差分版で説明する (以下 q は genric と仮定).

(正準)量子化と q 差分化

[NY]　可換 Poisson 代数 $\mathbb{C}[\mathfrak{n}_-^*]$

$$\underbrace{\{f_i,\{\cdots\{f_i,\{f_i,}_{1-a_{ij}} f_j\}\}\cdots\}\} = 0, \quad \{A,B\} \text{ は Poisson 括弧}$$

量子化 ↓　↑ 古典極限

[K]　普遍展開環 $U(\mathfrak{n}_-)$

$$\underbrace{[f_i,[\cdots[f_i,[f_i,}_{1-a_{ij}} f_j]]\cdots]] = 0, \quad [A,B] = AB - BA$$

q 差分化 ↓　↑ $q \to 1$

[K]　量子展開環 $U_q(\mathfrak{n}_-)$

$$[f_i,[\cdots[f_i,[f_i,f_j]_{q(0)}]_{q(1)}\cdots]_{q(-a_{ij}-1)}]_{q(-a_{ij})} = 0,$$

$$q(k) = q_i^{2k+a_{ij}},\ q_i = q^{d_i},\ [A,B]_q = AB - qBA$$

設定

$[a_{ij}]_{i,j\in I}$ — 対称化可能 GCM.
$W = \langle s_i \mid i \in I \rangle$ — Weyl 群

f_i — f 変数, $U_q(\mathfrak{n}_-)$ の Chevalley 生成元の像.
$\alpha_i^\vee$ — パラメーター変数, simple coroots に対応.
$\tau_i = \exp(\partial/\partial\alpha_i^\vee)$ — 量子 τ 変数.

$\tilde{s}_i$ — $\alpha_i^\vee$ と τ_i のみを動かす自然な Weyl 群作用

Weyl 群双有理作用の量子化:

$$s_i(x) = f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i(x)f_i^{-\alpha_i^\vee}.$$

設定1/3: f 変数 (従属変数)

$[a_{ij}]_{i,j\in I}$ は d_i で対称化可能なGCMとし, 以下を仮定：

- $\widetilde{\mathcal{A}} = \langle f_i \mid i \in I \rangle_{\mathbb{C}(q)\text{-alg}}$ は整域.
- q-Serre 関係式:
  $[f_i, [\cdots [f_i, [f_i, f_j]_{q(0)}]_{q(1)} \cdots]_{q(-a_{ij}-1)}]_{q(-a_{ij})} = 0,$
  $q(k) = q_i^{2k+a_{ij}}$, $q_i = q^{d_i}$, $[A, B]_q = AB - qBA$.
- $\widetilde{\mathcal{A}}$ は Ore 条件を満たす.
  (有限型またはアフィン型ならば常に成立)

要するに $\widetilde{\mathcal{A}}$ は $U_q(\mathfrak{n}_-)$ の商 Ore 整域であると仮定.

$q=1$ の場合の量子 f 変数の例

$D_4^{(1)}$: $f_2 = \partial$, $f_i = x - a_i$ $(i = 0, 1, 3, 4)$, $\qquad \partial := d/dx$.

$B_3^{(1)}$: $f_0 = (x-a)^2$, $f_1 = \partial$, $f_2 = x$, $f_3 = x - b$.
$A_3^{(1)}$: $f_0 = \partial - a$, $\quad f_1 = \partial$, $f_2 = x$, $f_3 = x - b$.

$G_2^{(1)}$: $f_0 = (x-a)^3$, $f_1 = \partial$, $f_2 = x$.
$A_2^{(1)}$: $f_0 = \partial + x$, $\quad f_1 = \partial$, $f_2 = x$.

$D_5^{(2)}$: $f_0 = (x-a)^2$, $f_1 = \partial$, $f_2 = x^2$.
$C_2^{(1)}$: $f_0 = \partial - a$, $\quad f_1 = \partial$, $f_2 = x^2$.

$A_2^{(2)}$: $f_0 = x^4$, $\qquad f_1 = \partial$. $\quad$ $q=1$ では多項式係数の微分
$A_1^{(1)}$: $f_0 = \partial + x^2$, $f_1 = \partial$. $\quad$ 作用素環の中で様々な例を作れる.

設定2/3: パラメーター $\alpha_i^\vee$ と τ 変数

パラメーター $\alpha_i^\vee$ ($i \in I$) は互いに可換.

量子 τ 変数 $\tau_i := \exp(\partial/\partial\alpha_i^\vee)$ (差分作用素),

$$\tau_i \alpha_j^\vee \tau_i^{-1} = \alpha_j^\vee + \delta_{ij}, \quad \tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i.$$

これらへの Weyl 群の自然な作用 ($\alpha_i^\vee$ = simple coroot):

$$\tilde{s}_i(\alpha_j^\vee) = \alpha_i^\vee - a_{ji}\alpha_i^\vee,$$

$$\tilde{s}_i(\tau_i) = \tau_i^{-1} \prod_{k \neq i} \tau_k^{-a_{ki}}, \quad \tilde{s}_i(\tau_j) = \tau_j \quad (i \neq j).$$

$$\mathcal{A} := \widetilde{\mathcal{A}} \otimes \mathbb{C}(q)[\, q_i^{\pm\alpha_i^\vee}, \tau_i \mid i \in I\,].$$

設定 3/3: Weyl 群双有理作用の量子化

$\mathcal{A} = \langle f_i, q_i^{\pm\alpha_i^\vee}, \tau_i \mid i \in I \rangle_{\mathbb{C}(q)\text{-alg}}$.

$\mathcal{A}$ も Ore 整域になる.

$\mathcal{A}$ の分数斜体 $Q(\mathcal{A})$ への Weyl 群作用:

$$s_i(x) := \begin{cases} f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i(x) f_i^{-\alpha_i^\vee} & (f_i \neq 0), \\ \tilde{s}_i(x) & (f_i = 0). \end{cases}$$

これが well-defined なことは
前論文 [K] `math/0808.2604` で示した.

量子Weyl群双有理作用の具体形

$$s_i(f_j) = \sum_{\nu=0}^{-a_{ij}} q_i^{(\nu+a_{ij})(\alpha_i^\vee-\nu)} \begin{bmatrix} \alpha_i^\vee \\ \nu \end{bmatrix}_{q_i} (\mathrm{ad}_q\, f_i)^\nu (f_j) f_i^{-\nu} \quad (i \neq j)$$

$$= q_i^{a_{ij}\alpha_i^\vee} f_j + q_i^{(1+a_{ij})(\alpha_i^\vee-1)} [\alpha_i^\vee]_{q_i} [f_i, f_j]_{q_i^{a_{ij}}} f_i^{-1} + \cdots$$

$$s_i(\tau_i) = f_i\, \tau_i^{-1} \prod_{k\neq i} \tau_k^{-a_{ki}},$$

$$s_i(\alpha_j^\vee) = \alpha_j^\vee - a_{ji}\alpha_i^\vee,$$

$$s_i(f_i) = f_i, \quad s_i(\tau_j) = \tau_j \quad (i \neq j),$$

$$[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}, \quad \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[x]_q [x-1]_q \cdots [x-k+1]_q}{[k]_q [k-1]_q \cdots [1]_q}.$$

fractional calculus との関係

一般に $q \neq 1$ であっても, A_2 型の f_1, f_2 について

$$f_1^{\alpha} f_2^{\alpha+\beta} f_1^{\beta} = f_2^{\beta} f_1^{\alpha+\beta} f_2^{\alpha}$$

が成立している (Verma 関係式).
$q = 1$, $f_1 = \partial = d/dx$, $f_2 = x$ と特殊化すると

$$\partial^{\alpha} x^{\alpha+\beta} \partial^{\beta} = x^{\beta} \partial^{\alpha+\beta} x^{\alpha}.$$

非整数回微分の一般化を Weyl 群双有理作用の量子化の枠組みは含んでいる.

設定 (再掲)

$[a_{ij}]_{i,j\in I}$ — 対称化可能 GCM.
$W = \langle s_i \mid i \in I \rangle$ — Weyl 群

f_i — f 変数, $U_q(\mathfrak{n}_-)$ の Chevalley 生成元の像.
$\alpha_i^\vee$ — パラメーター変数, simple coroots に対応.
$\tau_i = \exp(\partial/\partial\alpha_i^\vee)$ — 量子 τ 変数.

$\tilde{s}_i$ — $\alpha_i^\vee$ と τ_i のみを動かす自然な Weyl 群作用

Weyl 群双有理作用の量子化:

$$s_i(x) = f_i^{\alpha_i^\vee}\tilde{s}_i(x)f_i^{-\alpha_i^\vee}.$$

量子 τ 函数の定義

量子 τ 函数 = Weyl 群作用 (量子 τ 変数の単項式).

$W := \langle\, s_i \mid i \in I \,\rangle$, Weyl group.
$P := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\Lambda_i$, weight lattice.
$P_+ := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geqq 0}\Lambda_i$ = {dominant integral weights}.

$\tau^\nu := \prod_{i \in I} \tau_i^{\nu_i}$ $\quad (\nu = \sum_{i \in I} \nu_i \Lambda_i)$.

$WP_+ = \{\, w(\mu) \mid w \in W, \ \mu \in P_+ \,\}$, Tits cone.

$w(\mu) \in WP_+$ に対して量子 τ 函数 $\tau_{w(\mu)}$ を

$$\tau_{w(\mu)} = w(\tau^\mu)$$

によって定める. $\tau_{w(\mu)}$ は $w(\mu)$ のみによる.

定義からただちにわかること

以下 $w \in W$, $\mu \in P_+$ であるとする.

- $f_i, q_i^{\alpha_i^\vee}$ たちのある非可換有理式 $\phi_{w(\mu)}$ によって, $\tau_{w(\mu)} = \phi_{w(\mu)} \tau^{w(\mu)}$ と書ける.
- この $\phi_{w(\mu)}$ の古典極限は野海・山田 [NY] `math.QA/0012028` で τ-cocycle と呼ばれている.
- しかし, 量子版では $\phi_{w(\mu)}$ と $\tau^{w(\mu)}$ が一般には可換でないので, 量子版の $\phi_{w(\mu)}$ は cocycle condition を満たさない.

非自明なこと: τ 函数の正則性

- 野海・山田 [NY] `math.QA/0012028` は「τ-cocycle が f_i ついて多項式になること」(古典 τ 函数の正則性) をソリトンの佐藤理論の枠組みで証明している.
- ゆえに, 量子 τ 函数の正則性も成立していると予想されるが, かなり非自明.
- しかし, $q = 1$ の場合は Kac-Moody 代数の表現の translation fucntor を用いて量子 τ 函数の正則性を証明できる！

論理的な包含関係

$$T^{\lambda}_{\lambda+\mu}(M(w \circ \mu)) = M(w \circ (\lambda+\mu)) \text{ for all } \lambda \in P_+ \quad \Rightarrow \quad$$ 量子 $\tau_{w(\mu)}$ の正則性

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$\Downarrow$ 古典極限

$\Downarrow$

ソリトンの佐藤理論

$\Downarrow$

Jacobi-Trudi 型公式 $\Rightarrow$ 古典 $\tau_{w(\mu)}$ の正則性

$\Downarrow$

$\Downarrow$ 特殊化

$\Downarrow$

Painlevé 方程式の多項式解

YV, 岡本, 梅村, . . .

量子 τ 函数の自明な計算例

$i \neq j$ のとき

$$\tau_{\Lambda_j} = \tau_j,$$

$$\tau_{s_j(\Lambda_j)} = s_j(\tau_j) = f_j^{\alpha_j^\vee} \tau^{s_j(\Lambda_j)} f_j^{-\alpha_j^\vee} = f_j^{\alpha_j^\vee} f_j^{-(\alpha_j^\vee - 1)} \tau^{s_j(\Lambda_j)} = f_j \tau^{s_j(\Lambda_j)},$$

$$\tau_{s_i s_j(\Lambda_j)} = s_i s_j(\tau_j) = f_i^{\alpha_i^\vee} f_j \tau^{s_i s_j(\Lambda_j)} f_i^{-\alpha_i^\vee} = f_i^{\alpha_i^\vee} f_j f_i^{-\alpha_i^\vee - a_{ij}} \tau^{s_j s_i(\Lambda_i)}$$

$$= \left(q_i^{a_{ij}\alpha_i^\vee} f_j f_i^{-a_{ij}} + q_i^{(1+a_{ij})(\alpha_i^\vee - 1)} [\alpha_i^\vee]_{q_i} [f_i, f_j]_{q_i^{a_{ij}}} f_i^{-a_{ij}-1} + \cdots \right) \tau^{s_j s_i(\Lambda_i)}.$$

たとえば $a_{ij} = -1$, $d_i = 1$ のとき

$$\tau_{s_i s_j(\Lambda_j)} = s_i s_j(\tau_j) = \left(q^{-\alpha_i^\vee} f_j f_i + [\alpha_j^\vee]_q [f_i, f_j]_{q^{-1}} \right) \tau^{s_j s_i(\Lambda_i)}$$

$$= \left([1 - \alpha_i^\vee]_q f_j f_i + [\alpha_i^\vee]_q f_i f_j \right) \tau^{s_j s_i(\Lambda_i)}.$$

ここまでは量子 τ 函数の正則性は自明.

量子 τ 函数の非自明な計算例

$q=1$, A_3 型: $[f_1,f_2]=[f_2,f_3]=1$, $[f_1,f_3]=0$.

$w_\nu := s_{i_\nu}\cdots s_{i_2}s_{i_1}$, $\quad (i_1,i_2,\dots,i_6):=(1,2,3,1,2,1)$.

$\beta_\nu := w_{\nu-1}^{-1}(\alpha_{i_\nu}^\vee) = s_{i_1}\cdots s_{i_{\nu-1}}(\alpha_{i_\nu}^\vee)$.

$\beta_1=\alpha_1^\vee, \beta_2=\alpha_1^\vee+\alpha_2^\vee, \beta_3=\alpha_1^\vee+\alpha_2^\vee+\alpha_3^\vee, \beta_4=\alpha_2^\vee, \beta_5=\alpha_2^\vee+\alpha_3^\vee, \beta_6=\alpha_3^\vee$,

$\tau_{w_\nu(\Lambda_1)} = \tilde{w}_\nu(X_\nu)\tau^{w_\nu(\Lambda_1)}$ を満たす X_ν は以下のように計算される:

$$X_1 = f_1^{-\beta_1} f_1^{\beta_1+1} = f_1,$$

$$X_2 = f_2^{-\beta_2} X_1 f_2^{\beta_2+1} = \left(f_1+\frac{\beta_2}{f_2}\right)f_2 = f_1f_2+\beta_2,$$

$$X_3 = f_3^{-\beta_3} X_2 f_3^{\beta_3+1} = \left(f_1\left(f_2+\frac{\beta_3}{f_3}\right)+\beta_2\right)f_3 = f_1f_2f_3+\beta_3f_1+\beta_2f_3,$$

$$X_4 = f_1^{-\beta_4} X_3 f_1^{\beta_4} = f_1\left(f_2-\frac{\beta_4}{f_1}\right)f_3+\beta_3f_1+\beta_2f_3 = f_1f_2f_3+\beta_3f_1+(\beta_2-\beta_4)f_3,$$

$$\begin{aligned} X_5 &= f_2^{-\beta_5} X_4 f_2^{\beta_5} = \left(f_1+\frac{\beta_5}{f_2}\right)f_2\left(f_3-\frac{\beta_5}{f_2}\right)+\beta_3\left(f_1+\frac{\beta_5}{f_2}\right)+(\beta_2-\beta_4)\left(f_3-\frac{\beta_5}{f_2}\right) \\ &= f_1f_2f_3+(\beta_3-\beta_5)f_1+(\beta_2-\beta_4+\beta_5)f_3+\underbrace{(-\beta_2+\beta_4-\beta_5+\beta_3)}_{\text{キャンセルして消える}}\frac{\beta_5}{f_2}, \end{aligned}$$

$$X_6 = f_1f_2f_3+\beta_6f_1+(\beta_3-\beta_6)f_3.$$

一般の量子 τ 函数

量子 τ 函数の定義から次の表示がすぐに導かれる:

$$\tau_{w(\mu)} = \tilde{w}(A^{-1}B)\tau^{w(\mu)}.$$

ただし, 簡約表示 $w = s_{i_N} \cdots s_{i_2} s_{i_1}$ に対して

$$\begin{aligned} A &= f_{i_1}^{\beta_1} \cdots f_{i_N}^{\beta_N}, \\ B &= f_{i_1}^{\beta_1 + \langle \beta_1, \mu \rangle} \cdots f_{i_N}^{\beta_N + \langle \beta_N, \mu \rangle}, \\ \beta_\nu &= s_{i_1} \cdots s_{i_{\nu-1}}(\alpha_{i_\nu}^\vee) \in \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geqq 0} \alpha_i^\vee. \end{aligned}$$

量子 $\tau_{w(\mu)}$ の正則性 $\iff$ $A^{-1}B$ が f_i に関する多項式.

A, B の正体 (1)

以下 $\widetilde{\mathcal{A}} = U_q(\mathfrak{n}_-)$ (または $\widetilde{\mathcal{A}} = U(\mathfrak{n}_-)$) と仮定する.

$\langle \alpha_i^\vee, \rho \rangle = 1$ $(i \in I)$, $\lambda = \sum \lambda_i \Lambda_i \in P_+$ とする.

$\alpha_i^\vee$ に $\lambda_i + 1$ を代入する操作を $X \mapsto X_\lambda$ と書く.
f_i たちの積の順序の反転を $X \mapsto X'$ と書く. すると

$$A'_\lambda = F^\lambda_{w\circ\lambda}, \quad B'_\lambda = F^{\lambda+\mu}_{w\circ(\lambda+\mu)}.$$

ここで $w \circ \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$ (shifted action),

$$F^\lambda_{w\circ\lambda} = f_{i_N}^{\langle \alpha_{i_N}^\vee, s_{i_1}\cdots s_{i_{N-1}}\circ\lambda\rangle+1} \cdots f_{i_2}^{\langle \alpha_{i_1}^\vee, s_{i_1}\circ\lambda\rangle+1} f_{i_1}^{\langle \alpha_{i_1}^\vee, \lambda\rangle+1}.$$

$\tau_{w(\mu)}$ の正則性 $\iff$ $F^{\lambda+\mu}_{w\circ(\lambda+\mu)} \in U(\mathfrak{n}_-) F^\lambda_{w\circ\lambda}$ $(\forall \lambda \in P_+)$.

A, B の正体(2)

$(*)$ $F^{\lambda+\mu}_{w\circ(\lambda+\mu)} \in U(\mathfrak{n}_-)F^{\lambda}_{w\circ\lambda}$ を示したい.

Verma module を $M(\lambda) = U_q(\mathfrak{n}_-)v_\lambda$ と書く. このとき

$$F^{\lambda}_{w\circ\lambda}v_\lambda = f_{i_N}^{\langle\alpha^\vee_{i_N}, s_{i_1}\cdots s_{i_{N-1}}\circ\lambda\rangle+1}\cdots f_{i_2}^{\langle\alpha^\vee_{i_1}, s_{i_1}\circ\lambda\rangle+1} f_{i_1}^{\langle\alpha^\vee_{i_1}, \lambda\rangle+1} v_\lambda$$

は $M(\lambda)$ の weight $w\circ\lambda$ の singular vector になる:

$$M(w\circ\lambda) = U(\mathfrak{n}_-)F^{\lambda}_{w\circ\lambda}v_\lambda.$$

もしも $M(w\circ\lambda) \subset M(\lambda)$ と $M(w\circ(\lambda+\mu)) \subset M(\lambda+\mu)$ を関係付けることができれば $(*)$ を示せるだろう。

translation functor

$q = 1$ と仮定.
μ に対応する可積分表現を $L(\mu) = U(\mathfrak{n}_-)u_\mu$ と書く.
Kac-Moody 代数の表現としての直和分解

$$M \otimes L(\mu) = \bigoplus_{\nu} \mathrm{pr}_\nu(M \otimes L(\mu)), \quad M \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{O}_\lambda$$

を用いて, $T^\lambda_{\lambda+\mu}(M) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{O}_{\lambda+\mu}$ を次のように定める:

$$T^\lambda_{\lambda+\mu}(M) = \mathrm{pr}_{\lambda+\mu}(M \otimes L(\mu)) \subset M \otimes L(\mu).$$

このようにして translation functor $T^\lambda_{\lambda+\mu}$ が定められる.
このとき, 次が成立している:

$$T^\lambda_{\lambda+\mu}(M(w \circ \lambda)) = M(w \circ (\lambda + \mu))$$

量子 τ 函数の正則性の証明法

同一視 $v_{w\circ(\lambda+\mu)} = F^{\lambda+\mu}_{w\circ(\lambda+\mu)} v_{\lambda+\mu}$, $v_{\lambda+\mu} = v_\lambda \otimes u_\mu$ によって

$$M(w\circ(\lambda+\mu)) \subset M(\lambda+\mu) \subset M(\lambda)\otimes L(\mu).$$

$$M(w\circ\lambda)\otimes L(\mu) \supset T^{\lambda}_{\lambda+\mu}(M(w\circ\lambda)) = M(w\circ(\lambda+\mu))$$

より $\quad F^{\lambda+\mu}_{w\circ(\lambda+\mu)}(v_\lambda\otimes u_\mu) \in M(w\circ\lambda)\otimes L(\mu).$

そして $\quad F^{\lambda+\mu}_{w\circ(\lambda+\mu)}(v_\lambda\otimes u_\mu) = (F^{\lambda+\mu}_{w\circ(\lambda+\mu)} v_\lambda)\otimes u_\mu + \cdots .$

ゆえに $\quad F^{\lambda+\mu}_{w\circ(\lambda+\mu)} v_\lambda \in M(w\circ\lambda) = U(\mathfrak{n}_-) F^{\lambda}_{w\circ\lambda} v_\lambda.$

これで $q=1$ での量子 τ 函数の正則性が証明された.

q 差分版の量子 τ 函数の正則性

q は generic と仮定したので,
$U_q(\mathfrak{g})$ の Verma module の構造は
$q = 1$ の場合と同じ.

よって q 差分版の量子 τ 函数の正則性は
$U_q(\mathfrak{g})$ の表現の translation functor の存在と
公式 $T^{\lambda}_{\lambda+\mu}(M(w \circ \lambda)) = M(w \circ (\lambda + \mu))$ に帰着される.

少なくとも有限型では OK(Joseph の本 (1995)).

問題: Jacobi-Trudi 型公式の量子化?

古典の場合はソリトンの佐藤理論の枠組みを用いて古典 τ 函数が「行列式表示」を持つことを用いてその正則性 (多項式性) が証明される.

その証明の副産物として古典 τ 函数の「Jacobi-Trudi 型公式」が得られる.

量子の場合は完全に異なる方法で量子 τ 函数の正則性が証明されたので, 副産物として「Jacobi-Trudi 型公式」は得られない.

問題: τ 函数の Jacobi-Trudi 型公式の量子化?

論理的な包含関係 (再掲)

$T^{\lambda}_{\lambda+\mu}(M(w\circ\mu))$
$= M(w\circ(\lambda+\mu))$ $\Rightarrow$ 量子 $\tau_{w(\mu)}$ の正則性
for all $\lambda \in P_+$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

ソリトンの佐藤理論 $\Downarrow$ 古典極限

$\Downarrow$ $\Downarrow$

Jacobi-Trudi 型公式 $\Rightarrow$ 古典 $\tau_{w(\mu)}$ の正則性

$\Downarrow$

$\Downarrow$ 特殊化

$\Downarrow$

Painlevé 方程式の多項式解

YV, 岡本, 梅村, ...

量子 q-Hirota-Miwa 方程式 (1)

GCM は $A^{(1)}_{n-1}$ 型であるとする ($n \geqq 3$).

$f_{i+n} = f_i, \quad f_i^2 f_{i\pm1} - (q+q^{-1}) f_i f_{i\pm1} f_i + f_{i\pm1} f_i^2 = 0.$

$\alpha^\vee_{i+n} = \alpha^\vee_i, \quad \delta^\vee := \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^\vee_i, \quad \tau_{i+n} = \tau_i.$

$\widetilde{W} = \langle\, s_i, \pi \mid i \in I \rangle, \quad \pi(x_i) = x_{i+1} \ (x = f, \alpha^\vee, \tau),$

$T_i := s_{i-1} \cdots s_1 \pi s_{n-1} s_i \ \ (i = 1, \dots, n), \quad T_i T_j = T_j T_i.$

$T^\nu = \prod_i T_i^{\nu_i}, \quad \nu = \sum_i \nu_i \varepsilon_i \in L := \bigoplus_i \mathbb{Z}\varepsilon_i.$

$\alpha^\vee_i(\nu) := T^\nu(\alpha^\vee_i) = \alpha^\vee_i + (\nu_{i+1} - \nu_i)\delta^\vee.$

$\tau_i(\nu) := \tau_{T^\nu(\Lambda_i)} = T^\nu(\tau_i)$ は量子 q-Hirota-Miwa 方程式を満たす:

$$
\begin{aligned}
&[\alpha^\vee_{i+1}(\nu)]_q \tau_i(\nu + \varepsilon_i) \tau_i(\nu + \varepsilon_{i+1} + \varepsilon_{i+2}) \\
+ &[\alpha^\vee_i(\nu)]_q \tau_i(\nu + \varepsilon_{i+2}) \tau_i(\nu + \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}) \\
= &[\alpha^\vee_i(\nu) + \alpha^\vee_{i+1}(\nu)]_q \tau_i(\nu + \varepsilon_{i+1}) \tau_i(\nu + \varepsilon_i + \varepsilon_{i+2})
\end{aligned}
$$

注意: 勝手に積の順番を入れ替えてはいけない!

量子 q-Hirota-Miwa 方程式 (2)

量子 Hirota-Miwa 方程式は次の両辺に T^ν を作用させた結果:

$$[\alpha_{i+1}^\vee]_q \tau_i\, s_i s_{i+1}(\tau_{i+1}) + [\alpha_i^\vee]_q s_{i+1} s_i(\tau_i) \tau_{i+1} = [\alpha_i^\vee + \alpha_{i+1}^\vee]_q s_i(\tau_i) s_{i+1}(\tau_{i+1})$$

この公式の証明は Weyl 群作用の定義を使った簡単な計算.

$$s_i(\tau_i) = f_i \frac{\tau_{i-1}\tau_{i+1}}{\tau_i}, \quad s_{i+1}(\tau_{i+1}) = f_{i+1} \frac{\tau_i \tau_{i+2}}{\tau_{i+1}},$$

$$s_i s_{i+1}(\tau_{i+1}) = \left([1 - \alpha_i^\vee]_q {\color{red} f_{i+1} f_i} + [\alpha_i^\vee]_q f_i f_{i+1}\right) \frac{\tau_{i-1}\tau_{i+2}}{\tau_i},$$

$$s_{i+1} s_i(\tau_i) = \left([1 - \alpha_{i+1}^\vee]_q f_i f_{i+1} + [\alpha_{i+1}^\vee]_q {\color{red} f_{i+1} f_i}\right) \frac{\tau_{i-1}\tau_{i+2}}{\tau_{i+1}}.$$

計算の途中で $\tau_i \alpha_i^\vee = (\alpha_i^\vee + 1)\tau_i$ を使う.

$$\tau_i\, s_i s_{i+1}(\tau_{i+1}) = (-[\alpha_i^\vee]_q {\color{red} f_{i+1} f_i} + [\alpha_i^\vee + 1]_q f_i f_{i+1}) \tau_{i-1}\tau_{i+2},$$

$$s_{i+1} s_i(\tau_i) \tau_{i+1} = ([1 - \alpha_{i+1}^\vee]_q f_i f_{i+1} + [\alpha_{i+1}^\vee]_q {\color{red} f_{i+1} f_i}) \tau_{i-1}\tau_{i+2}.$$

最後に

- 懸案だった τ 函数の量子化ができたことによって，野海正俊著『パンルヴェ方程式　対称性からの入門』の結果の量子化が相当にできた感じになっている．しかし Jacobi-Trudi 型明示公式の量子化はまだ．
- 量子群を用いて q 差分版量子化もかなりできている．
- 長谷川浩司, `math/0703036`. q 差分版 Weyl 群双有理作用の量子 dilog を用いた量子化．問題: この場合の量子 τ 函数?
- 量子 Weyl 群双有理作用の理論は非整数べキ $f_i^{\alpha_i^\vee}$ を使うので fractional calculus (middle convolution) と関係している．
- 今月の始めに聞いた名古屋創氏の最近の仕事．量子 Painlevé 方程式 II〜VI への fractional calculus の応用．
- 問題: 共形場理論における量子 τ 函数?