Painlevé 系とその τ 函数の正準量子化

黒木玄 (Gen Kuroki)

東北大学数学教室

日本数学会 2015 年度秋季総合分科会
京都産業大学 2015 年 9 月 13 日 (日)〜16 日 (水)
2015/09/14 Version 1.2
http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/20150914QuantumPainleveTau.pdf

講演日 2015 年 9 月 14 日 (月)

だれでもできる

Painlevé 系とその “τ_i” の正準量子化

量子化によって
古典の場合には曖昧にすませていたことを
まじめに考え直さざるを得なくなる.

正準量子化とは

Classical mechanics ⟶ Quantum mechanics

Poisson brackets ⟶ non-commutativities

$\{p, x\} = 1 \longrightarrow [p, x] = px - xp = 1 \quad (p = \partial/\partial x$, 微分)

$\{\tau, x\} = \tau \longrightarrow \tau x \tau^{-1} = x + 1 \quad (\tau = e^{\partial/\partial x}$, 差分)

$\{\tau, a\} = \tau a \longrightarrow \tau a \tau^{-1} = qa \quad (a = q^x$, q 差分)

古典系の様々な良い性質を保ちながら量子化したい.

例: 微分版 Painlevé $\mathrm{P_{IV}}$ の量子化

$A_2^{(1)}$ 型の場合.

従属変数 $f_{i+3} = f_i$, パラメーター変数 $\alpha^\vee_{i+3} = \alpha^\vee_i$,

$[f_i, f_{i+1}] = 1$, $[\alpha^\vee_i, \alpha^\vee_j] = 0$, $[\alpha^\vee_i, f_j] = 0$.

$\mathrm{P_{IV}}$: $$\frac{\partial f_i}{\partial t} = f_i f_{i+1} - f_{i-1} f_i + \alpha^\vee_i$$

対称性 (Weyl 群作用):

$$s_i(f_i) = f_i, \quad s_i(f_{i\pm1}) = f_{i\pm1} \pm \frac{\alpha^\vee_i}{f_i},$$
$$s_i(\alpha^\vee_i) = -\alpha^\vee_i, \quad s_i(\alpha^\vee_{i\pm1}) = \alpha^\vee_i + \alpha^\vee_{i\pm1}.$$

非可換性以外は古典の場合と同じ.

例: 量子 $\mathrm{P_{IV}}$ への τ 変数の導入

量子化された τ 変数　$\tau_i = \exp(\partial/\partial\alpha_i^\vee)$　(差分作用素):

$$\tau_i \alpha_j^\vee \tau_i^{-1} = \alpha_j^\vee + \delta_{ij}, \quad \tau_i\tau_j = \tau_j\tau_i, \quad \tau_i f_j = f_j \tau_i.$$

対称性 (Weyl 群作用):

$$s_i(\tau_i) = f_i \frac{\tau_{i-1}\tau_{i+1}}{\tau_i}, \qquad s_i(\tau_j) = \tau_j \quad (j \not\equiv i \pmod 3).$$

対称性を用いて従属変数 f_i を τ 変数で表示できる:

$$f_i = \frac{s_i(\tau_i)\tau_i}{\tau_{i-1}\tau_{i+1}}.$$

非可換性以外は古典の場合と同じ.

しかし, τ 変数の非可換性の入れ方は新しい.

q 差分版では「古典の場合と同じ」とは言い難くなる (後述).

τ 変数は任意の対称化可能 GCM に付随する場合に導入可能.

まず Weyl 群双有理作用の部分を量子化したい

古典 Painlevé 系の対称性の典型的形は

$$s_i(f_j) = f_j \pm \frac{\alpha_i^\vee}{f_i}, \quad s_i(\tau_i) = f_i \frac{\tau_{i-1}\tau_{i+1}}{\tau_i}, \quad \text{etc.}$$

f_i は従属変数,
$\alpha_i^\vee$ はパラメーター変数 (← simple coroot に対応),
τ_i は τ 変数 (← $\exp$(fundamental weight) に対応).

これらを (正準) 量子化したい.

τ 変数も適切に非可換化する (New!)

Weyl群作用を作るための基本アイデア

Serre 関係式

$[f_1,[f_1,f_2]] = 0$　(例 $f_1 = \partial/\partial x$, $f_2 = x-1$)　や

$f_1^2 f_2 - (q+q^{-1}) f_1 f_2 f_1 + f_2 f_1^2 = 0$ (量子展開環) のとき,

Verma 関係式　$f_1^k f_2^{k+l} f_1^l = f_2^l f_1^{k+l} f_2^k$.

$\downarrow$

パラメーター変数への **Weyl** 群作用

$$\tilde{s}_i(\alpha_i^\vee) = \tilde{s}_i \alpha_i^\vee \tilde{s}_i^{-1} = -\alpha_i^\vee,$$

$$\tilde{s}_i(\alpha_j^\vee) = \tilde{s}_i \alpha_j^\vee \tilde{s}_i^{-1} = \alpha_i^\vee + \alpha_j^\vee \quad (i,j=1,2,\ i \neq j),$$

$$\tilde{s}_i(f_j) = \tilde{s}_i f_j \tilde{s}_i^{-1} = f_j$$ と仮定して,

$$\sigma_i := f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i$$

$\downarrow$

braid 関係式　$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$

非可換環の要素の変数べき

$\sigma := f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i$. 代数自己同型

$$x \mapsto s_i(x) = \sigma_i x \sigma_i^{-1} = f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i(x) f_i^{-\alpha_i^\vee}$$

で Weyl 群作用を構成可能.

環 A の可逆元 f の変数 γ によるべき f^γ とは何か？

(1) 可算直積環 $A^{\mathbb{Z}}$ に A を対角的に埋め込んで同一視:

$$A \ni a = (a)_{k\in\mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z}}.$$

(2) f^γ の定義と γ の $A^{\mathbb{Z}}$ への埋め込み方:

$$f^\gamma = (f^k)_{k\in\mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z}}, \quad \gamma = (k)_{k\in\mathbb{Z}} \in A^{\mathbb{Z}}.$$

middle convolution

$D_4^{(1)}$ 型の場合で説明:

$$f_2 = \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad f_i = x - t_i \quad (i = 0, 1, 3, 4)$$

$i = 0, 1, 3, 4$ について, $[f_2, f_i] = 1$ なので

$$s_2(f_i) = f_i + \alpha_2^\vee f_2^{-1}, \qquad s_2(\tau_2) = f_2 \frac{\tau_0\tau_1\tau_3\tau_4}{\tau_2}.$$

すなわち

$$s_2(x) = x - \alpha_2^\vee \partial_x{}^{-1}, \qquad s_2(\tau_2) = \partial_x \frac{\tau_0\tau_1\tau_3\tau_4}{\tau_2}.$$

$f_2{}^\gamma = \partial_x{}^\gamma$ の Euler 変換による実現:

$$\partial_x{}^\gamma f(x) = {}_aD_x^\gamma f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\gamma)} \int_a^x (x-y)^{-\gamma-1} f(y)\, dy.$$

注意: f_i, f_j のどちらかが 1 ならば, Vema 関係式は常に成立するので, 欠けてしまって足りなくなった分の f_i は 1 として補充可能.

従属変数への s_i の作用の有理性

(1) $[f_1,[f_1,f_2]]=0$ (例 $f_1=\partial/\partial x,\ f_2=x-a$) のとき

$$f_1{}^{\gamma} f_2 f_1{}^{-\gamma} = f_2 + [f_1,f_2]\frac{\gamma}{f_1} = (1-\gamma)f_2 + \gamma f_1 f_2 f_1{}^{-1}.$$

特に $[f_1,f_2]=\pm 1$ ならば $f_1{}^{\gamma} f_2 f_1{}^{-\gamma} = f_2 \pm \dfrac{\gamma}{f_1}$.

欲しい形の公式が出て来た!

(2) $f_1{}^2 f_2 - (q+q^{-1}) f_1 f_2 f_1 + f_2 f_1{}^2 = 0$ のとき

$$\begin{aligned} f_1{}^{\gamma} f_2 f_1{}^{-\gamma} &= q^{\pm\gamma} f_2 + (f_1 f_2 - q^{\pm 1} f_2 f_1)\frac{[\gamma]_q}{f_1} \\ &= [1-\gamma]_q f_2 + [\gamma]_q f_1 f_2 f_1{}^{-1} \end{aligned}$$

ここで $[\gamma]_q = \dfrac{q^{\gamma}-q^{-\gamma}}{q-q^{-1}}$. q 差分版でもよい公式が得られる!

τ 変数の非可換性をどう定めるか?

量子従属変数 $f_i \longrightarrow$ Serre 関係式もしくは Verma 関係式

量子パラメーター変数 $\alpha_i^\vee \longrightarrow$ 互いにおよび従属変数と可換

量子 τ 変数は何とどのように非可換であるべきか?

量子 τ 変数 $\tau_i \longrightarrow$ 互いにおよび f_j と可換.

しかし, 量子 τ 変数は量子パラメーター変数とは非可換 (New!)

$$\tau_i \alpha_j^\vee \tau_i^{-1} = \alpha_j^\vee + \delta_{ij}.$$

すなわち　$\tau_i = \exp(\partial/\partial\alpha_i^\vee)$　パラメーターの差分作用素!

τ 変数への Weyl 群作用の拡張

$\tilde{s}_i$ の τ_j への作用を定めれば, s_i の τ_j への作用も定まる.
$\tilde{s}_i$ への $\alpha_j^\vee$ への作用は $\partial/\partial\alpha_j^\vee$ への作用に自然に拡張される.

A_3 型: $\quad \tilde{s}_2(\alpha_2^\vee) = -\alpha_2^\vee, \quad \tilde{s}_2(\alpha_j^\vee) = \alpha_2^\vee + \alpha_j^\vee \quad (j = 1, 3)$ ならば

$\tilde{s}_2\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_2^\vee}\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha_1^\vee} - \frac{\partial}{\partial\alpha_2^\vee} + \frac{\partial}{\partial\alpha_3^\vee}$ であり, $\quad \tau_i = \exp\left(\frac{\partial}{\partial\alpha_i^\vee}\right)$ なので

$$\tilde{s}_2(\tau_2) = \frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2}.$$

さらに $\quad \tau_2 f_2^{\alpha_2^\vee} \tau_2^{-1} = f_2^{\alpha_2^\vee + 1} \quad$ (τ_2 は $\alpha_2^\vee$ を 1 ずらす) を使うと

$$s_2(\tau_2) = f_2^{\alpha_2^\vee} \tilde{s}_2(\tau_2) f_2^{-\alpha_2^\vee} = f_2^{\alpha_2^\vee} \frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2} f_2^{-\alpha_2^\vee}$$
$$= \frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2} f_2^{\alpha_2^\vee + 1} f_2^{-\alpha_2^\vee} = \frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2} f_2 = f_2 \frac{\tau_1\tau_3}{\tau_2}$$

欲しい形の公式が出て来た!

一般の対称化可能 GCM で OK

q 差分版でも OK.

任意の対称化可能 GCM に付随する場合

$U_q(\mathfrak{g}) \longrightarrow$ 下三角 $U_q(\mathfrak{n}_-) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle \longrightarrow$ 従属変数.

simple coroot $\alpha_i^\vee \longrightarrow$ パラメーター変数　従属変数とは可換とみなす

fundamental weight $\Lambda_i \longrightarrow \partial/\partial\alpha_i^\vee \longrightarrow \tau_i = \exp(\partial/\alpha_i^\vee) \longrightarrow \tau$ 変数

$\alpha_i^\vee, \tau_j$ たちには自然に Weyl 群が作用 (それを $\tilde{s}_i$ と書く).

欲しい Weyl 群 $W = \langle s_1, \dots, s_m \rangle$ の作用は

$$s_i(x) = f_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i(x) f_i^{-\alpha_i^\vee}$$

τ 変数への Weyl 群作用の結果の多項式性

整ウェイト $\lambda = \sum_i \lambda_i \Lambda_i \in P$ ($\lambda_i \in \mathbb{Z}$) に対して $\tau^\lambda = \prod_i \tau_i^{\lambda_i}$ とおく.

定理: $w \in W$ と dominant integral weight $\mu \in P_+$ に対して

$$w(\tau^\mu) = (f_i,\ q^{\pm\alpha_i^\vee}\ \text{たちの非可換多項式}) \times \tau^{w(\mu)}.$$

Kac-Moody 版では

$$w(\tau^\mu) = (f_i,\ \alpha_i^\vee\ \text{たちの非可換多項式}) \times \tau^{w(\mu)}.$$

証明には
Kac-Moody 代数の表現論の translation functor (Deodhar-Gabber-Kac 1982) と
quantization of Lie bialgebras (Etingof-Kazhdan 2008, “VI”) を使う.

translation functor の応用

$\mu, \lambda \in P_+$ (dominant integral weight),　$w \in W$　とする.
$w \circ \lambda = w(\lambda + \rho) - \rho$,　shifted action.

可積分表現 $L(\mu)$ を tensor して部分加群を取る操作で定義される translation functor を $T = T_\lambda^\mu$ と書く [DGK].
$w \in W$ と Verma 加群 $M(\lambda)$ について

$$M(w \circ \lambda) \subset M(\lambda), \quad T(M(w \circ \lambda)) \subset M(w \circ \lambda) \otimes L(\mu),$$
$$T(M(w \circ \lambda)) = M(w \circ (\lambda + \mu)),$$

ゆえに次の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccc} M(\lambda) \otimes L(\mu) & \longleftarrow & M(w \circ \lambda) \otimes L(\mu) \\ \uparrow & & \uparrow \\ M(\lambda + \mu) & \longleftarrow & M(w \circ (\lambda + \mu)). \end{array}$$

[EK] の結果よりこの形の可換図式は U_q の場合にも存在する.

$w(\tau^\mu)$ の多項式性の証明のスケッチ

$$\begin{array}{ccc} M(\lambda)\otimes L(\mu) & \longleftarrow & M(w\circ\lambda)\otimes L(\mu) \\ \uparrow & & \uparrow \\ M(\lambda+\mu) & \longleftarrow & M(w\circ(\lambda+\mu)). \end{array}$$

この可換図式から $w(\tau^\mu)$ の多項式性が得られる.

$M(w\circ\lambda)$ の h.w. vector の $M(\lambda)$ での像を $f_w(\lambda)\, v_\lambda$ と書く.

$w(\tau^\mu)$ の中の変数 $\alpha_i^\vee$ に $\lambda_i = \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}_{\geqq 0}$ を代入したものは本質的に $f_w(\lambda+\mu) f_w(\lambda)^{-1}$ (2 つの singular vectors の比) に一致し,

$$\text{上の可換図式} \implies f_w(\lambda+\mu) \in f_w(\lambda) U_q(\mathfrak{n}_-).$$

$f_w(\lambda+\mu) f_w(\lambda)^{-1}$ は割り切れ, $w(\tau^\mu)$ は多項式になる.

共形場理論と量子群

以上の単純な枠組みは
野性的に登場する Painlevé 系の量子化
を理解するためにはまだ不十分!

Bäcklund 変換 (Weyl 群作用) の部分だけではなく,
Painlevé 方程式の部分はどうなっているのか？

Painlevé 系の Lax 表示や Sato-Wilson 表示は?

それらもろもろの量子化の表現論的な理解?

以下では共形場理論や量子群との関係について説明する.

微分版 Painlevé 系の量子化 = 共形場理論

Schlesinger 系 (1 階連立の場合) の量子化
= Knizhnik-Zamolodchikov 方程式 (WZW model)

Garnier 系 (2 階単独の場合) の量子化
= 退化場 $\varphi_{1,2}$, $\varphi_{2,1}$ に付随する BPZ 方程式

特異点の量子化 = primary field φ

2 階単独の場合のみかけの特異点の量子化 = 退化場 $\varphi_{1,2}$

https://twitter.com/genkuroki/status/448159501808439296

予想: 任意の共形場理論は **Painlevé** 系の量子化とみなせる!

共形場理論での Weyl 群作用と量子 τ 変数のことはよくわかっていない.

大事なことなので繰り返す

予想: すべての共形場理論は

Painlevé 系の量子化と
みなせるだろう

すでに膨大な量の CFT の例があり,
古典 Painlvé 系もたくさんある.

q 差分化版 Painlevé IV $q\mathrm{P_{IV}}$ の古典版

例として以下の場合を扱おう.

$A_2^{(1)}$ 型の場合.

従属変数 $F_{i+3} = F_i$,　パラメーター変数 $a_{i+3} = a_i$

$$q\mathrm{P_{IV}}: \quad T_{q\mathrm{P_{IV}}}(F_i) = a_i a_{i+1} F_{i+1} \frac{1 + a_{i-1}F_{i-1} + a_{i-1}a_i F_{i-1} F_i}{1 + a_i F_i + a_i a_{i+1} F_i F_{i+1}},$$

$$T_{q\mathrm{P_{IV}}}(a_i) = a_i.$$

対称性 (Weyl 群作用):

$$s_i(F_i) = F_i, \quad s_i(F_{i\pm1}) = F_{i\pm1}\left(\frac{1 + a_i F_i}{a_i + F_i}\right)^{\pm1},$$

$$s_i(a_i) = a_i^{-1}, \quad s_i(a_{i\pm1}) = a_i a_{i\pm1}.$$

見た目が微分版と全然違う!

q 差分版 Painlevé IV $q\mathrm{P_{IV}}$ の量子化

$$F_i F_{i+1} = q^2 F_{i+1} F_i, \quad a_i a_j = a_j a_i, \quad a_i F_j = F_j a_i.$$

量子 $q\mathrm{P_{IV}}$ (離散時間発展):

$$\begin{aligned} T_{q\mathrm{P_{IV}}}(F_i) &= (1 + q^2 a_{i-1} F_{i-1} + q^2 a_{i-1} a_i F_{i-1} F_i) \\ &\quad \times a_i a_{i+1} F_{i+1} \\ &\quad \times (1 + q^2 a_i F_i + q^2 a_i a_{i+1} F_i F_{i+1})^{-1} \\ T_{q\mathrm{P_{IV}}}(a_i) &= a_i. \end{aligned}$$

対称性 (Weyl 群作用):

$$\begin{aligned} &s_i(F_i) = F_i, \\ &s_i(F_{i-1}) = F_{i-1} \frac{a_i + F_i}{1 + a_i F_i}, \quad s_i(F_{i+1}) = \frac{1 + a_i F_i}{a_i + F_i} F_{i+1}, \\ &s_i(a_i) = a_i^{-1}, \quad s_i(a_{i\pm 1}) = a_i a_{i\pm 1}. \end{aligned}$$

見た目が微分版と全然違う! 量子群を使って非自明に構成した!

量子化だけではなく, q 差分化も!

微分版の量子化の公式は古典の場合とほぼ同じ.
特別な道具を使わない直接的な計算で色々わかる.

q 差分版の量子化を直接的構成は難しい.
適切な非可換性の入れ方さえわからないことが多い.

量子群の助けを借りる!

q 差分版 Painlevé IV $q\mathbf{P}_{\mathrm{IV}}$ を例に説明する.

以下の構成はまだかなり複雑.

1. 量子群の L-operator を定義

“$RLL = LLR$”

量子 L-operator から $q\mathrm{P_{IV}}$ の量子化へ 1

$A_2^{(1)}$ 型の R 行列:

$$R(z) = (q - q^{-1}z) \sum_i E_{ii} \otimes E_{ii} + (1 - z) \sum_{i \neq j} E_{ii} \otimes E_{jj}$$
$$+ (q - q^{-1}) \sum_{i<j} (E_{ij} \otimes E_{ji} + zE_{ji} \otimes E_{ij}).$$

i, j は $1, 2, 3$ を動く. E_{ij} は 3×3 の行列単位.

$A_2^{(1)}$ 型の量子 L-operator の定義は "$RLL = LLR$":
3×3 行列 $L(z)$ の成分は非可換環の元,

$$R(z/w)L(z)^1 L(w)^2 = L(w)^2 L(z)^1 R(z/w),$$
$$L(z)^1 = L(z) \otimes 1, \quad L(w)^2 = 1 \otimes L(w).$$

2-1. 二重対角型上三角 L-operators の積

$$L(z) = L_1(z)L_2(z)$$

2-2. 上三角な $L(z)$ の対角部分 L_0 を二重化

$$\widetilde{L}(z) = L_1(z)L_2(z)L_0$$

量子 L-operator から $q\mathrm{P_{IV}}$ の量子化へ 2

次のような二重対角型の上三角 L-operator を考える:

$$L_k(z) = \begin{bmatrix} a_{1k} & b_{1k} & 0 \\ 0 & a_{2k} & b_{2k} \\ zb_{3k} & 0 & a_{3k} \end{bmatrix}$$

より正確に言えば, 各々の $L_k(z)$ に関する "$RLL = LLR$" 関係式と
$L_k(z)^1 L_l(w)^2 = L_l(w)^2 L_k(z)^1 \quad (k \neq l)$ 　成分の可換性
を定義関係式とする代数を考える.

$L_0 := (L_1(z)L_2(z)$ の対角部分$) = \mathrm{diag}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3)$ $(\tilde{a}_i = a_{i1}a_{i2})$.

$L_1(z)L_2(z)$ の対角部分 $L_0 = \mathrm{diag}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3)$ を "二重化":

$$\widetilde{L}(z) = L_1(z)L_2(z)L_0 = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1^2 & b_1 & c_1 \\ zc_2 & \tilde{a}_2^2 & b_2 \\ zb_3 & zc_3 & \tilde{a}_3^2 \end{bmatrix}.$$

補足: $L(z) = L_1(z)L_2(z)$ の対角部分 L_0 を二重化した $\widetilde{L}(z) = L(z)L_0$ を考える理由は以下の Lax 表示の存在.

$$f_i := \frac{(L_0^{-1}\widetilde{L}(z)L_0^{-1}\text{ の }(i, i+1)\text{ 成分})}{q^{-1} - q} = (q^{-1} - q)^{-1}\tilde{a}_i^{-1} b_i \tilde{a}_{i+1}^{-1}.$$

f_i たちは q-Serre 関係式をみたしている.

$$\mathcal{G}_i := E + (c^2 - 1)\tilde{a}_{i+1}^2 b_i^{-1} E_{i+1,i},$$
$$\mathcal{G}'_i := E + (c^{-2} - 1) b_i^{-1}\tilde{a}_i^2 E_{i+1,i}, \quad c := q^{-\gamma} \quad \text{とおくと}$$

$$f_i^{\gamma}\widetilde{L}(z) f_i^{-\gamma} = \mathcal{G}_i \widetilde{L}(z) \mathcal{G}'_i.$$

$\widetilde{L}(z)$ は量子化された幾何クリスタルともみなせる.

3-1. $\widetilde{L}(z)$ の対角行列による相似変換で c_i の部分を 1 または中心元 r にする.

$$\widetilde{L}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_1^2 & b_1 & c_1 \\ zc_2 & \tilde{a}_2^2 & b_2 \\ zb_3 & zc_3 & \tilde{a}_3^2 \end{bmatrix} \mapsto \widetilde{C}\widetilde{L}(z)\widetilde{C}^{-1} \begin{bmatrix} t_1^2 & \hat{b}_1 & 1 \\ rz & t_2^2 & \hat{b}_2 \\ rz\hat{b}_3 & zc_3 & t_3^2 \end{bmatrix}$$

3-2. 二重対角行列の積 $X(z)Y(rz)$ に分解する.

$$\widetilde{C}\widetilde{L}(z)\widetilde{C}^{-1} = X(z)Y(rz)$$

量子 L-operator から qP_{IV} の量子化へ 3

$\widetilde{C} := \mathrm{diag}(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3) := \mathrm{diag}(1, c_1c_3, c_1)$,

$\widetilde{C}' := \mathrm{diag}(\tilde{c}_3 b_{31}, \tilde{c}_1 b_{11}, \tilde{c}_2 b_{21})$,

$r := c_1c_3c_2 \in$ center,

$t_i := \tilde{c}_i \tilde{a}_i \tilde{c}_i^{-1}$.

$$X(z) := \widetilde{C} L_1(z) \widetilde{C}'^{-1}, \quad Y(rz) := \widetilde{C}' L_2(z) L_0 \widetilde{C}^{-1}.$$

$$X(z) = \begin{bmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ 0 & x_2 & 1 \\ z & 0 & x_3 \end{bmatrix}, \quad Y(rz) = \begin{bmatrix} y_1 & 1 & 0 \\ 0 & y_2 & 1 \\ rz & 0 & y_3 \end{bmatrix}.$$

このとき

$$X(z)Y(rz) = \widetilde{C}\widetilde{L}(z)\widetilde{C}^{-1} = \begin{bmatrix} t_1^2 & x_1 + y_2 & 1 \\ rz & t_2^2 & x_2 + y_3 \\ rz(x_3 + r^{-1}y_1) & z & t_3^2 \end{bmatrix}.$$

前ページの続き.

インデックスの拡張: $x_{i+3} = r^{-1}x_i, \quad y_{i+3} = r^{-1}y_i, \quad t_{i+3} = r^{-1}t_i.$

基本関係式: $\mu = 1, 2$ に対して,

$$x_i y_i = y_i x_i = t_i^2,$$

$$x_i x_{i+\mu} = q^{(-1)^{\mu-1}2} x_{i+\mu} x_i, \qquad x_i y_{i+\mu} = q^{-(-1)^{\mu-1}2} y_{i+\mu} x_i,$$

$$y_i y_{i+\mu} = q^{(-1)^{\mu-1}2} y_{i+\mu} y_i, \qquad y_i x_{i+\mu} = q^{-(-1)^{\mu-1}2} x_{i+\mu} y_i,$$

t_i は t_j, x_j, y_j と可換.

この関係式は "3" を 3 以上の奇数に一般化しても成立している.

以上は $(m, n) = (3, 2)$ の場合.
互いに素な (m, n) の場合に一般化可能.
$n > 2$ の場合にも "$xy = q^{2a}yz$" 型の関係式になる $(a = 0, \pm 1)$.

4. 量子化された変数 t_i, x_i, y_i には
$\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ が双有理作用!

$$\widetilde{W}(A_2^{(1)}) = \langle s_0, s_1, s_2, \pi \rangle$$

$$\widetilde{W}(A_1^{(1)}) = \langle r_0, r_1, \varpi \rangle$$

$\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の作用:

$$
\begin{aligned}
&s_i(x_i) = (x_i + y_{i+1})x_{i+1}(y_i + x_{i+1})^{-1},\\
&s_i(x_{i+1}) = (x_i + y_{i+1})^{-1}x_i(y_i + x_{i+1}),\\
&s_i(y_i) = (y_i + x_{i+1})y_{i+1}(x_i + y_{i+1})^{-1},\\
&s_i(y_{i+1}) = (y_i + x_{i+1})^{-1}y_i(x_i + y_{i+1}),\\
&s_i(x_{i+2}) = x_{i+2}, \quad s_i(y_{i+2}) = y_{i+2},\\
&s_i(t_i) = t_{i+1}, \quad s_i(t_{i+1}) = t_i, \quad s_i(t_{j+2}) = t_{j+2},\\
&\pi(x_i) = x_{i+1}, \quad \pi(y_i) = y_{i+1}, \quad \pi(t_i) = t_{i+1}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Q_i := y_{i+2}y_{i+1} + y_{i+2}x_i + x_{i+1}x_i,\\
&r_1(x_i) = r^{-1}Q_{i+1}^{-1}y_iQ_i,\\
&r_1(y_i) = rQ_{i+1}x_iQ_i^{-1},\\
&r_1(t_i) = t_i, \quad \varpi(x_i) = y_i, \quad \varpi(y_i) = x_i, \quad \varpi(t_i) = t_i.
\end{aligned}
$$

前ページの続き

$\widetilde{W}(A_2^{(1)}) \times \widetilde{W}(A_1^{(1)})$ の作用の Lax 表示

$i = 1, 2$ に対して, $g_i = (t_i^2 - t_{i+1}^2)/(x_i + y_{i+1})$, $G_i = E + g_i E_{i+1,i}$, $G'_i = \varpi(G_i)$ とおく. $\Lambda(z) = E_{12} + E_{23} + zE_{31}$ とおく. このとき,

$$s_i(X(z)) = G_i X(z) G_i'^{-1},$$
$$s_i(Y(z)) = G'_i Y(z) G_i^{-1},$$
$$\pi(X(z)) = \Lambda(z) X(z) \Lambda(z)^{-1}$$

$$r_1(X(z)Y(rz)) = X(z)Y(rz),$$
$$r_1 : x_{i+2}x_{i+1}x_i \leftrightarrow y_{i+3}y_{i+2}y_{i+1},$$
$$\varpi : X(z) \leftrightarrow Y(z).$$

これらの条件で作用が一意に特徴付けられる.

5. $$a_i := \frac{t_i}{t_{i+1}} \quad \text{(パラメーター変数)},$$

$$F_i := \frac{x_{i+1}x_i}{t_{i+1}t_i} \quad \text{(従属変数)},$$

$$T_{q\mathrm{P_{IV}}} := r_1\varpi \quad \text{(離散時間発展)}.$$

このようにおくと次ページの公式が成立.

周期性: $F_{i+3} = F_i, \quad a_{i+3} = a_i.$

$$F_i F_{i+1} = q^2 F_{i+1} F_i, \quad a_i a_j = a_j a_i, \quad a_i F_j = F_j a_i.$$

量子 $q\mathrm{P_{IV}}$ (離散時間発展):

$$\begin{aligned} T_{q\mathrm{P_{IV}}}(F_i) &= (1 + q^2 a_{i-1} F_{i-1} + q^2 a_{i-1} a_i F_{i-1} F_i) \\ &\quad \times a_i a_{i+1} F_{i+1} \\ &\quad \times (1 + q^2 a_i F_i + q^2 a_i a_{i+1} F_i F_{i+1})^{-1} \\ T_{q\mathrm{P_{IV}}}(a_i) &= a_i. \end{aligned}$$

対称性 (Weyl 群作用):

$$\begin{aligned} &s_i(F_i) = F_i, \\ &s_i(F_{i-1}) = F_{i-1} \frac{a_i + F_i}{1 + a_i F_i}, \quad s_i(F_{i+1}) = \frac{1 + a_i F_i}{a_i + F_i} F_{i+1}, \\ &s_i(a_i) = a_i^{-1}, \quad s_i(a_{i\pm1}) = a_i a_{i\pm1}. \end{aligned}$$

$f_i := (q^{-1} - q)^{-1} \tilde{a}_i^{-1} b_i \tilde{a}_{i+1}^{-1}$,
$\hat{f}_i := (q^{-1} - q)^{-1} t_i^{-1} (x_i + y_{i+1}) t_{i+1}^{-1}$,
$\widehat{L}(z) := X(z)Y(rz)$ とおくと,

$$\widehat{L}(z) = \begin{bmatrix} t_1^2 & (q^{-1} - q) t_1 t_2 \hat{f}_1 & 1 \\ rz & t_2^2 & (q^{-1} - q) t_2 t_3 \hat{f}_2 \\ rz(q^{-1} - q) t_3 t_4 \hat{f}_3 & z & t_3^2 \end{bmatrix}.$$

$\tilde{s}_i(t_i) = t_{i+1}$, $\tilde{s}_i(t_{i+1}) = t_i$, $\tilde{s}_i(t_{i+2}) = t_{i+2}$, $\tilde{s}_i(\hat{f}_i) = \hat{f}_i$ と定めると,

$$s_i(\widehat{L}(z)) = f_i^{\alpha_i^\vee} \widehat{L}(z) f_i^{-\alpha_i^\vee} = \hat{f}_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i(\widehat{L}(z)) \hat{f}_i^{\alpha_i^\vee}.$$

ここで $a_i = t_i / t_{i+1} = q^{-\alpha_i^\vee}$.

Lax 表示とは

微分版:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = AL - LA.$$

離散版:　　離散変換 ρ について

$$\rho(L) = gLg^{-1}.$$

Weyl 群作用の Lax 表示 1

$T_{z,r}$:= (差分作用素 $z \mapsto rz$) とし,

$$\widehat{M}(z) := X(z)T_{z,r}Y(z)T_{z,r} = \widehat{L}(z)T_{z,r}^2$$

とおく. このとき,

$$s_i(\widehat{M}(z)) = G_i(z)\widehat{M}(z)G_i(z)^{-1}.$$

ここで

$$G_1(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_2(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & g_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad G_3(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & rz^{-1}g_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$g_i = \frac{[\alpha_i^\vee]_q}{\hat{f}_i}, \quad [\alpha_i^\vee]_q = \frac{a_i^{-1} - a_i}{q - q^{-1}}, \quad q^{-\alpha_i^\vee} = a_i = \frac{t_i}{t_{i+1}}.$$

$$\pi(t_i) = t_{i+1}, \quad \pi(\hat{f}_i) = \hat{f}_{i+1}, \qquad t_{i+3} = r^{-1} t_i, \qquad \hat{f}_{i+3} = r\hat{f}_i.$$

$$\Lambda_3(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ z & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \pi(\widehat{M}(z)) &= (\Lambda_3(z) T_{z,r}) \widehat{M}(z) (\Lambda_3(z) T_{z,r})^{-1} \\ &= \Lambda_3(z) \widehat{L}(rz) \Lambda_3(r^2 z)^{-1} T_{z,r}^2. \end{aligned}$$

$$\pi \longleftrightarrow \Lambda_3(z) T_{z,r}$$

Sato-Wilson 表示とは

Gauss 分解 $G_- \times G_+ \to G$ を通して

群 G 上の簡単な方程式を

群 G_-, G_+ 上の
複雑な方程式に書き直したもの

ソリトン系や Painlevé 系の基礎!

Sato-Wilson 表示とは 2

Lie 群 G とその部分群 $G_\pm$ について, $G_- \times G_+ \to G$, $(x_-, x_+) \mapsto x = x_-^{-1} x_+$ が G の単位元の近傍での局所微分同相を定めると仮定する.
G, $G_\pm$ の Lie 環を $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_\pm$ と書くと, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$.
単位元の近傍で以下が成立している.

微分方程式: $x_- P x_-^{-1} = B_+ - B_-$, $P \in \mathfrak{g}$, $B_\pm \in \mathfrak{g}_\pm$ のとき

$$\frac{\partial x}{\partial t} = Px \iff \frac{\partial x_+}{\partial t} = B_+ x_+ \ \text{and}\ \frac{\partial x_-}{\partial t} = B_+ x_- - x_- P.$$

P は時間に依存しないとする. $B_\pm$ は初期条件と時間に依存する.

離散対称性: $x_+ \sigma = g_-^{-1} g_+$, $\sigma \in G$, $g_\pm \in G_\pm$ のとき

$$\rho(x) = x\sigma \iff \rho(x_+) = g_- x_+ \sigma \ \text{and}\ \rho(x_-) = g_- x_-.$$

σ は時間に依存しないとする.
時間発展 $\partial x / \partial t = Px$ と離散変換 $\rho(x) = x\sigma$ は互いに可換.

Sato-Wilson 表示 $\Longrightarrow$ Lax 表示

前ページの設定のもとで,
$x_- P x_-^{-1} = B_+ - B_-$, $\quad P \in \mathfrak{g}$, $\quad B_\pm \in \mathfrak{g}_\pm$,
$x_+ \sigma = g_-^{-1} g_+$, $\quad \sigma \in G$, $\quad g_\pm \in G_\pm$ $\quad h \in G_+$ かつ

$$\rho(h) = \sigma^{-1} h \sigma$$

のとき (たとえば h は対角行列で σ は置換行列),

$$L := x_+ h x_+^{-1}$$

とおくと, $\quad \partial x/\partial t = Px$, $\quad \rho(x) = x\sigma$ $\quad$ のとき,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [B_+, L], \qquad \rho(L) = g_- L g_-^{-1}.$$

微分方程式が差分方程式の場合も同様.

Lax 表示から Sato-Wilson 表示へ

上三角行列 L の対角部分を $h = D$ と書く.

$L = ZDZ^{-1}$ を満たす上三角行列 $x_+ = Z$ は一意的ではない.

Z の対角部分は L から決まらない (Z の不定性はちょうどそれ).

τ 変数は本質的に上三角行列 $Z = x_+$ の対角成分の座標である.

すべてが可換な場合は易しい.

量子化された非可換な場合には整合性が色々非自明になる.

しかし、我々が扱っている場合について
実際に計算してみると色々うまく行っている！

τ 変数の導入

τ 変数 τ_0, z_1, z_2, z_3 を次の関係式で導入する:

$$\tau_0 r = q^{-1} r \tau_0, \quad \tau_0 t_j = t_j \tau_0, \quad z_i r = r z_i, \quad z_i t_j = q^{-\delta_{ij}} t_j z_i,$$
$$\tau_0 z_i = z_i \tau_0, \quad z_i z_j = z_j z_i, \quad \tau_0 \hat{f}_j = \hat{f}_j \tau_0, \quad z_i \hat{f}_j = \hat{f}_j z_i.$$

さらに　$z_{i+3} = z_i, \quad \tau_i = \tau_{i-1} z_i$　によってインデックスを拡張.
s_i, π の作用を以下のように τ 変数に拡張できる:

$$s_i(\tau_i) = \hat{f}_i \frac{\tau_{i-1}\tau_{i+1}}{\tau_i}, \quad s_i(\tau_j) = \tau_j \quad (i, j = 0, 1, 2,\ i \neq j),$$
$$\pi(\tau_i) = \tau_{i+1}.$$

$$s_i(x) = \hat{f}_i^{\alpha_i^\vee} \tilde{s}_i(x) \hat{f}_i^{-\alpha_i^\vee}$$

Sato-Wilson 表示 1

$D(t) := \mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3)$.

$\exists! U(z)$: z の形式べき級数を成分に持つ 3×3 行列,
$U(0)$ は対角成分がすべて 1 の上三角行列,

$$\widehat{M}(z) = U(z)(D(t)T_{z,r})^2 U(z)^{-1}.$$

$D_Z := \mathrm{diag}(z_1, z_2, z_3)$.

$Z(z) := U(z)D_Z$.

このとき　$\widehat{M}(z) = Z(z)(D(qt)T_{z,r})^2 Z(z)^{-1}$.

Sato-Wilson 表示 2(終)

行列 S_i^g, S_i を次のように定める:

$$S_1^g = \begin{bmatrix} 0 & g_1^{-1} & 0 \\ -g_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2^g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2^{-1} \\ 0 & -g_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & -[\alpha_1^\vee + 1]_q & 0 \\ [\alpha_1^\vee - 1]_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -[\alpha_2^\vee + 1]_q \\ 0 & [\alpha_2^\vee - 1]_q & 0 \end{bmatrix}.$$

このとき以下が成立している:

$$\widehat{M}(z) = Z(z)(D(qt)T_{z,r})^2 Z(z)^{-1} = Z(z)D(qt)^2 Z(r^2 z)^{-1} T_{z,r}^2,$$

$$s_i(U(z)) = G_i U(z) S_i^g,$$

$$s_i(D_Z) = (S_i^g)^{-1} D_Z S_i,$$

$$s_i(D(t)T_{z,r}) = S_i^{-1} D(t) T_{z,r} S_i$$

$$s_i(Z(z)) = G_i Z(z) S_i.$$

量子 q 差分 Painlevé 系と量子群の関係

m, n は互いに素と仮定

(1) $L_k(z) \leftarrow A^{(1)}_{m-1}$ 型の二重対角上三角 L-operators

(2) $L(z) = L_1(z) \cdots L_n(z) \leftarrow$ 上三角 L-operator

(3) $\widetilde{L}(z) = L(z)L_0 \leftarrow$ 対角部分 L_0 を二重化

(4) $\widehat{L}(z) = \widetilde{C}\widetilde{L}(z)\widetilde{C}^{-1} \leftarrow$ 対角行列で最高次成分を定数化 (m, n は互いに素)

(5) $\widehat{L}(z) = X_1(z)X_2(rz) \cdots X_n(r^{n-1}z) \leftarrow$ 再度 n 個に分解

(6) $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1}) \times \widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ 作用とその Lax 表示

(7) $\widetilde{W}(A^{(1)}_{n-1})$ の格子部分の作用が q 差分版量子 Painlevé 系

(8) $\widetilde{W}(A^{(1)}_{m-1})$ の作用がその対称性

(9) 対称性の Sato-Wilson 表示がわかっている