ランダムウォーク関係の母函数

X_kは独立同分布な実数値確率変数であるとし, $S_n = X_1+\cdots+X_n$ とおく(ランダムウォーク). $S_0 := 0$.

X_kの特性函数を $\varphi(t) = E[e^{itX_k}]$ と書くと, X_kの独立性より, $E[e^{itS_k}] = \varphi(t)^k$.

$A \subset \mathbb{R}$ に対して, T_Aを次のように定める:

$$T_A := \begin{cases} k & \text{if } S_1\in A, S_2\in A, \dots, S_{k-1}\in A, S_k\notin A, \ k=1,2,3,\dots \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

T_AはS_nがAの外に出る最初の時刻. $v^\infty = 0$と考える

S_kの特性函数の母函数 $\displaystyle\sum_{k=0}^\infty v^k E[e^{itS_k}] = \sum_{k=0}^\infty v^k\varphi(t)^k = \frac{1}{1-v\varphi(t)}$

を $0\leqq k < T_A$ と $T_A \leqq k$ に分割すると,

① $$\frac{1}{1-v\varphi(t)} = E\left[\sum_{k=0}^\infty v^k e^{itS_k}\right] = E\left[\sum_{k=0}^{T_A-1} v^k e^{itS_k}\right] + E\left[\sum_{k=T_A}^\infty v^k e^{itS_k}\right],$$

② $$(\text{右辺第2項}) = E\left[v^{T_A}e^{itS_{T_A}}\sum_{k=0}^\infty v^k e^{itS_k}\right] = E\left[v^{T_A}e^{itS_{T_A}}\right]E\left[\sum_{k=0}^\infty v^k e^{itS_k}\right] = \frac{E\left[v^{T_A}e^{itS_{T_A}}\right]}{1-v\varphi(t)},$$

③ $$(\text{右辺第1項}) = \sum_{k=0}^\infty v^k E\left[e^{itS_k}1_{k<T_A}\right], \quad k<T_A \iff S_1\in A,\dots,S_k\in A,$$

この中で $S_k\in A$

④ $$E\left[v^{T_A}e^{itS_{T_A}}\right] = 1 + \sum_{k=1}^\infty v^k E\left[e^{itS_k}1_{T_A=k}\right], \quad T_A = k \Rightarrow S_k\notin A,$$

この中で $S_k\notin A$

⑤ $$\frac{1}{1-v\varphi(t)} = \exp\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{v^n}{n}\varphi(t)^n\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^\infty\frac{v^n}{n}E\left[e^{itS_n}\right]\right)$$
$$= \exp\left(\sum_{n=1}^\infty\frac{v^n}{n}E\left[e^{itS_n}1_{S_n\in A}\right]\right)\exp\left(\sum_{n=1}^\infty\frac{v^n}{n}E\left[e^{itS_n}1_{S_n\notin A}\right]\right).$$

②を①に代入して整理すると, $$E\left[\sum_{k=0}^{T_A-1}v^k e^{itS_k}\right] = \frac{1-E\left[v^{T_A}e^{itS_{T_A}}\right]}{1-v\varphi(t)}.$$

⑤より, $$E\left[\sum_{k=0}^{T_A-1}v^k e^{itS_k}\right]\exp\left(\sum_{n=1}^\infty\frac{v^n}{n}E\left[e^{itS_n}1_{S_n\notin A}\right]\right) = \exp\left(\sum_{n=1}^\infty\frac{v^n}{n}E\left[e^{itS_n}1_{S_n\in A}\right]\right)\left(1-E\left[v^{T_A}e^{itS_{T_A}}\right]\right),$$

台がAに含まれる函数と台がA^cに含まれる函数のFourier変換が一致するのは0の場合に限ることより,

$$E\left[\sum_{k=0}^{T_A-1}v^k e^{itS_k}\right] = \exp\left(\sum_{n=1}^\infty\frac{v^n}{n}E\left[e^{itS_n}1_{S_n\in A}\right]\right), \quad 1-E\left[v^{T_A}e^{itS_{T_A}}\right] = \exp\left(-\sum_{n=1}^\infty\frac{v^n}{n}E\left[e^{itS_n}1_{S_n\notin A}\right]\right).$$

$$E\left[\sum_{k=0}^{T_A-1} v^k e^{itS_k}\right] = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^n}{n} E\left[e^{itS_n} 1_{S_n \in A}\right]\right), \quad 1 - E\left[v^{T_A} e^{itS_{T_A}}\right] = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^n}{n} E\left[e^{itS_n} 1_{S_n \notin A}\right]\right).$$

特に $t=0$ のとき, ④, ⑤ より,

$$E\left[\sum_{k=0}^{T_A-1} v^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} v^k E\left[1_{k<T_A}\right] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} v^k P(k<T_A) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} v^k P(S_1 \in A, \dots, S_k \in A)$$

$$\shortparallel$$

$$E\left[\frac{1-v^{T_A}}{1-v}\right] = \frac{1-E[v^{T_A}]}{1-v},$$

$$E\left[v^{T_A}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} v^k E\left[1_{T_A=k}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} v^k P(T_A=k) = \sum_{k=1}^{\infty} v^k P(S_1 \in A, \dots, S_{k-1} \in A, S_k \notin A).$$

ゆえに

$$\begin{cases} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} v^k P(S_1 \in A, \dots, S_k \in A) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^n}{n} P(S_n \in A)\right), & \longleftarrow (☆) \\ 1 - \sum_{k=1}^{\infty} v^k P(S_1 \in A, \dots, S_{k-1} \in A, S_k \notin A) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^n}{n} P(S_n \notin A)\right). \end{cases}$$

N_n, L_n を次のように定める:

$$N_n = \#\{k=1,2,\dots,n \mid S_k > 0\},$$

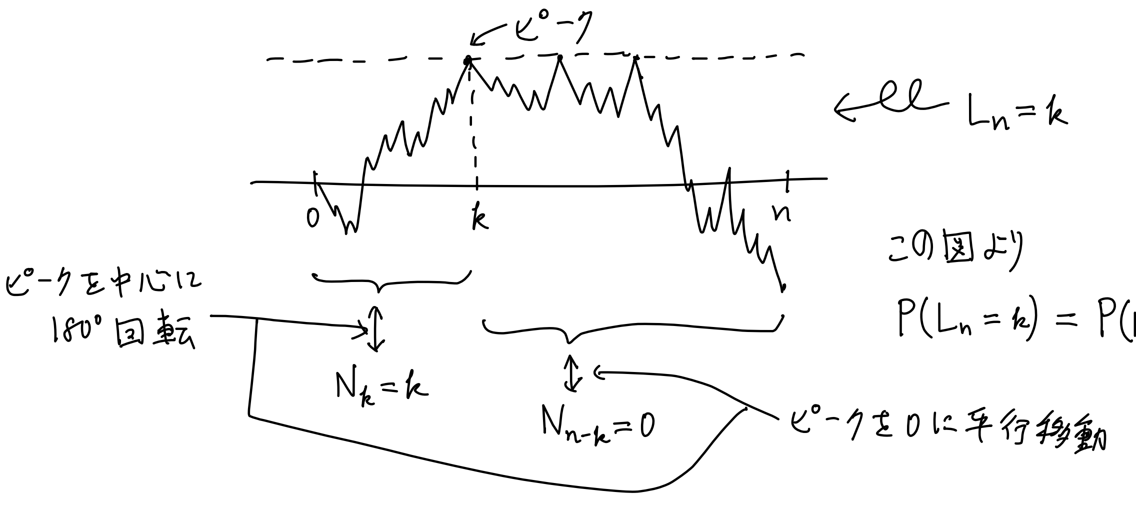
特に $\begin{cases} N_k = k \iff S_1 > 0, \dots, S_k > 0, \\ N_k = 0 \iff S_1 \leqq 0, \dots, S_k \leqq 0. \end{cases}$

$$L_n = \begin{cases} \min\{k=1,\dots,n \mid S_k = \max\{S_1,\dots,S_n\}\} & (S_k > 0 \text{ for some } k=1,\dots,n), \\ 0 & (S_k \leqq 0 \text{ for all } k=1,\dots,n), \end{cases}$$

等価原理より, $P(N_n=k) = P(L_n=k) = P(N_k=k)P(N_{n-k}=0)$.

$$\begin{cases} (☆) \text{ で } A=(0,\infty) \text{ とすると}, \quad 1 + \sum_{k=1}^{\infty} v^k P(N_k=k) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^n}{n} P(S_n>0)\right), \\ (☆) \text{ で } A=(-\infty,0] \text{ とすると}, \quad 1 + \sum_{k=1}^{\infty} v^k P(N_k=0) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v^n}{n} P(S_n \leqq 0)\right). \end{cases}$$

これがほしい結果



この図より

$$P(L_n=k) = P(N_k=k)P(N_{n-k}=0)$$