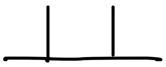
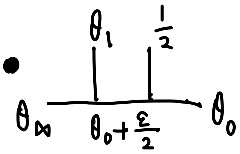
名古屋創　共形場理論とPainlevé方程式 2/4

黒木玄記

2018-05-09　(2-1)

昨日 ●  を定義した。 ← 共形ブロック。　以下，$c=1$とする。

$\Delta=\theta^2$に対応する線を $\downarrow^{\Delta}$ ではなく $\downarrow^{\theta}$ と書いたりすることにする。

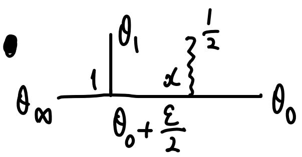
●  ← $\varepsilon=\pm 1$ は線形常微分方程式(BPZ eq.)をみたしていることを示した。

その方程式は3点確定特異点型ODE ＝ Gaussの超幾何微分方程式になる。

● Gaussの超幾何級数： $\displaystyle {}_2F_1\left({\alpha\ \beta \atop \gamma};x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}x^n.$　$\left((\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1).\right)$

● 収束半径は1.

∵ $\displaystyle \frac{(\alpha)_{n+1}(\beta)_{n+1}}{(\gamma)_{n+1}(n+1)!}\Big/\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(n+1)}\to 1\quad(n\to\infty).$　□

●  $\displaystyle = x^{\varepsilon\theta_0}(1-x)^{\theta_1}\times {}_2F_1\left({\varepsilon\theta_0+\theta_1-\theta_\infty+\frac12,\ \varepsilon\theta_0+\theta_1+\theta_\infty+\frac12 \atop 2\varepsilon\theta_0+1};x\right).$

← これが今日の目標。

Gaussの超幾何級数の性質

● ${}_2F_1\left({\alpha\ \beta \atop \gamma};x\right)$ は次をみたす：

① $\quad x(1-x)y''+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}y'-\alpha\beta=0\qquad\left(y'=\dfrac{dy}{dx}\right).$

この①をGaussの超幾何微分方程式と呼ぶ。

∵ $D=x\dfrac{\partial}{\partial x}$とおく。

$$(D+\alpha)\,{}_2F_1\left({\alpha\ \beta \atop \gamma};x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}(n+\alpha)x^n=\alpha\,{}_2F_1\left({\alpha+1,\ \beta \atop \gamma};x\right).$$

同様にして
$$(D+\beta)\,{}_2F_1\left({\alpha\ \beta \atop \gamma};x\right)=\beta\,{}_2F_1\left({\alpha,\ \beta+1 \atop \gamma};x\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(D+\gamma-1)\,{}_2F_1\left({\alpha\ \beta \atop \gamma};x\right)=\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}(\gamma+n-1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!}(\gamma+n-1)n x^{n-1}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_{n-1}(n-1)!}x^{n-1}=\alpha\beta\,{}_2F_1\left({\alpha+1,\ \beta+1 \atop \gamma};x\right).$$

したがって，

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(D+\gamma-1)-(D+\alpha)(D+\beta)\right]{}_2F_1\left({\alpha\ \beta \atop \gamma};x\right)=0.$$

← これを整理すれば①が得られる。　q.e.d.

$\boxed{\text{Th. [高野, §8.3]}}$ $D\subset\mathbb{C}$ を領域とし，$p_1(x), p_2(x)$ を D 上で正則な函数とし，微分方程式 ② $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$ を考える．このとき，

(i) ② の任意の解は D 内にくまなく解析接続される．

(ii) U を D の単連結部分領域とするとき，② の U 上の解全体は $\mathbb{C}$ 上の 2 次元線形空間をなす． □

① は次のように書き直される：

①′ $$y''+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}y'-\frac{\alpha\beta}{x(1-x)}y=0.$$

ゆえに，${}_2F_1\left({\alpha,\beta \atop \gamma};x\right)$ は $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ 内にくまなく解析接続される．

$\boxed{\text{Def.}}$ $f(x)$ を $B=\{x\in\mathbb{C}\mid 0<|x-c|<\varepsilon\}$ 上多価正則な函数とする．
$x=c$ が $f(x)$ の確定特異点であるとは，ある $N>0$ が存在して，任意の $\theta_1<\theta_2$ について

$$(x-c)^N f(x)\longrightarrow 0 \quad (x\to c,\ \theta_1<\arg(x-c)<\theta_2)$$

が成り立つことであると定める．そうでないとき $x=c$ は f の不確定特異点であるという． □

$\boxed{\text{Report}}$ $f(x)=x^\alpha$ とすると $x=0$ が $f(x)$ の確定特異点であることを示せ． □
$\left(x^\alpha=e^{\alpha\log x}\right)$.

$\boxed{\text{Def.}}$ 線形微分方程式 $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$ …② のすべての解が $x=c$ を確定特異点に持つとき，$x=c$ は ② の確定特異点であるという． □

$\boxed{\text{Th.}}$ $x=c$ における $p_1(x), p_2(x)$ の極の位数をそれぞれ l, m とするとき，

$x=c$ が ② の確定特異点 $\Longleftrightarrow$ $l\leqq 1$ かつ $m\leqq 2$． □

$\boxed{\text{以下, } x=c=0 \text{ の場合を考える.}}$

$p_1(x) = \frac{a_{-1}}{x} + a_0 + a_1 x + \cdots$, $p_2(x) = \frac{b_{-2}}{x^2} + \frac{b_{-1}}{x} + b_0 + b_1 x + \cdots$

とおいて, ② の形式解を求めてみる.

$x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$ を ② に代入すると,

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} (\rho+n)(\rho+n-1)\, d_n x^{\rho+n-2} + \sum_{m=-1}^{\infty} a_m x^m \sum_{n=0}^{\infty} (\rho+n) d_n\, x^{\rho+n-1} + \sum_{m=-2}^{\infty} b_m x^m \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^{\rho+n}$$

$x^{\rho-2}$ の係数をみると, $(n=0,\ \ m=-1, n=0,\ \ m=-2, n=0)$

$$0 = \rho(\rho-1) + a_{-1}\rho + b_{-2} = 0. \qquad \cdots ③$$

この式より, ρ が求まる. 根を ρ_1, ρ_2 と書く. ③ を $x=0$ における ② の決定方程式と呼び, ρ_1, ρ_2 を特性指数と呼ぶ.

$\boxed{\mathrm{Th}_1}$ $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z}$ のとき, ② は次の形の線形独立な2つの解を $x=c$ の近くで持つ:

$$\begin{cases} g_1(x) = (x-c)^{\rho_1} \sum_{n=0}^{\infty} g_{1n} (x-c)^n, & g_{10} \neq 0. \\ g_2(x) = (x-c)^{\rho_2} \sum_{n=0}^{\infty} g_{2n} (x-c)^n, & g_{20} \neq 0. \end{cases}$$

ただし, 右辺の級数は $x=c$ の近くで絶対収束する. □

$\boxed{\text{Gauss の超幾何微分方程式の場合}}$

$\boxed{x=0}$ $a_{-1} = \gamma,\ b_{-2} = 0$ より, $\rho(\rho-1) + \gamma\rho = 0 \iff \rho = 0,\ 1-\gamma.$

$\boxed{x=1}$ $a_{-1} = \alpha+\beta+1-\gamma,\ b_{-2} = 0$ より,

$$\rho(\rho-1) + (\alpha+\beta+1-\gamma)\rho = 0 \iff \rho = 0,\ \gamma-\alpha-\beta.$$

$\boxed{x=\infty}$ $x = \frac{1}{t}$ として, $t=0$ での様子を調べると,

$$\rho(\rho-1) + (1-\alpha-\beta)\rho + \alpha\beta = (\rho-\alpha)(\rho-\beta) = 0 \iff \rho = \alpha, \beta.$$

特性指数

したがって, $\gamma,\ \gamma-\alpha-\beta,\ \alpha-\beta \notin \mathbb{Z}$ であれば $x = 0, 1, \infty$ で ① は

$$t^\rho \sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n \quad (\rho = \rho_1, \rho_2) \qquad \left(t = x,\ x-c,\ \frac{1}{x}\right)$$

の形の解を持つ.

Report ① は $x=0$ で次を解に持つ：

$$y_1 = {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha\ \beta\\ \gamma\end{matrix};x\right),\qquad y_2 = x^{1-\gamma}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma\\ 2-\gamma\end{matrix};x\right),\qquad |x|<1.$$

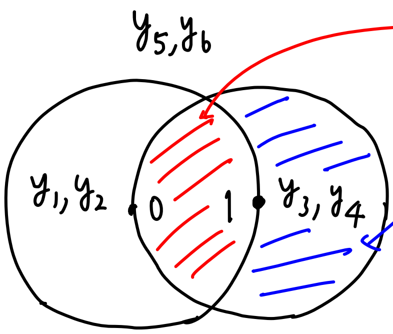
① は $x=1$ で次を解に持つ：

$$y_3 = {}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha\ \ \beta\\ \alpha+\beta-\gamma+1\end{matrix};1-x\right),\quad y_4 = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta\\ \gamma-\alpha+\beta+1\end{matrix};1-x\right),\quad |1-x|<1.$$

① は $x=\infty$ で次を解に持つ：

$$y_5 = x^{-\alpha}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\ \alpha-\gamma-1\\ \alpha-\beta+1\end{matrix};\frac{1}{x}\right),\quad y_6 = x^{-\beta}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\beta,\ \beta-\gamma+1\\ \beta-\alpha+1\end{matrix};\frac{1}{x}\right),\quad |x|>1.\qquad\square$$

$x=0,1,\infty$ での解の収束域は重なっている.



ここで、$[y_1, y_2] = [y_3, y_4]\begin{bmatrix} c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{bmatrix}$ と表わせる.

ここで、$[y_3, y_4] = [y_5, y_6]\begin{bmatrix} d_1 & d_2\\ d_3 & d_4\end{bmatrix}$ と表わせる.

↑ 接続行列.

接続行列を求めるためには <u>積分表示</u> を使う.

Prop. $|x|<1$ で ${}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha\ \beta\\ \gamma\end{matrix};x\right) = \dfrac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}\,dt.$

ただし, $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, $\mathrm{Re}(\gamma-\alpha)>0$ と仮定する.

さらに, $\arg t = 0$, $\arg(1-t)=0$, $\arg(1-xt)=0$ $(x=\frac{1}{2})$ とし, $x\neq\frac{1}{2}$ へは解析接続する.

証明 以下のように計算される：

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n\,n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)}\frac{(\beta)_n}{n!}x^n\\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma+n)}\frac{(\beta)_n}{n!}x^n = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}B(\alpha+n,\gamma-\alpha)\frac{(\beta)_n}{n!}x^n\\
&= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\frac{(\beta)_n}{n!}(xt)^n\,dt
\end{aligned}
$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta)_n}{n!}z^n = (1-z)^{-\beta}.$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}\,dt.$$

q.e.d.

Prop. $p, q \in \{0, 1, \frac{1}{x}, \infty\}$, $p \neq q$ とし, p から q への path をとり,

$$f_{pq}(x) = \int_p^q t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}\,dt$$ と定めると,

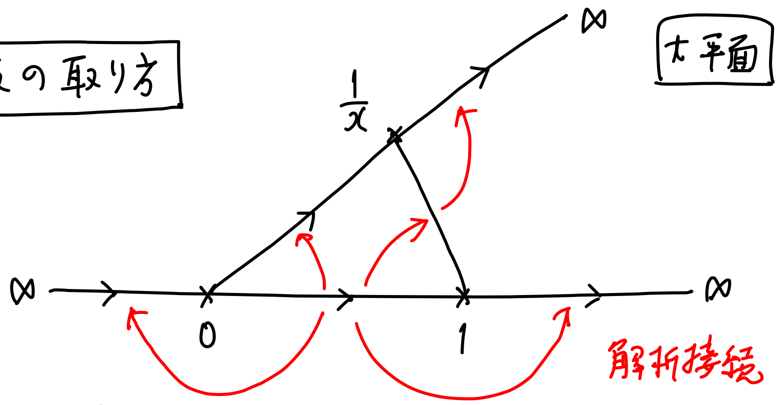
$f_{pq}(x)$ は Gauss の超幾何微分方程式の解になる.

(p, q の組み合わせは 6通り $y_1, \cdots, y_6$ にちょうどなる.)

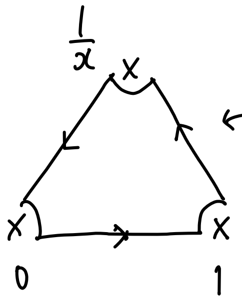
証明法1 部分積分を使う. □

証明法2 積分変数を置換して … □

分枝の取り方



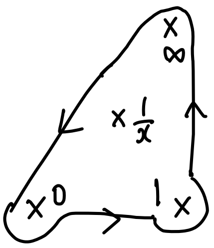
1



← これ上の積分は0なので

$$f_{01} + f_{1,\frac{1}{x}} - f_{0,\frac{1}{x}} = 0.$$

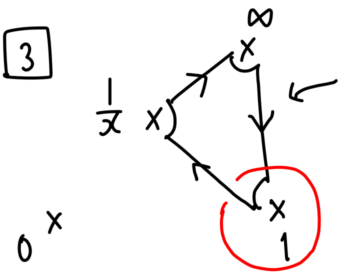
2



← これ上の積分も0なので

$$f_{01} + f_{1\infty} + f_{\infty 0} = 0.$$

3

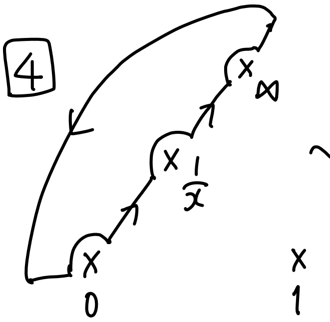


← これ上の積分も0なので

$(1-t)^{\gamma-\alpha-1}$ の解析接続

$$-f_{1\infty} + e^{2\pi i(\gamma-\alpha)} f_{1,\frac{1}{x}} + e^{2\pi i(\gamma-\alpha)} f_{\frac{1}{x},\infty} = 0.$$

$\boxed{4}$



$t^{\alpha-1}$ の解析接続

$$\rightsquigarrow\quad f_{\infty 0} + e^{2\pi i(-\alpha)} f_{0,\frac{1}{x}} + e^{2\pi i(\beta-\alpha)} f_{\frac{1}{x},\infty} = 0$$

6個の f_{pq} があり，線形関係が4個得られた．2個の f_{pq} で残りの4個が書ける．

f_{pq} と y_i たちの関係は以下の通り．

$\boxed{\text{Prop.}}$

$$\begin{cases} f_{01} = B(\alpha, \gamma-\alpha)\, y_1, \quad f_{\frac{1}{x},\infty} = e^{\pi i(\alpha+\beta-\gamma+1)} B(\beta-\gamma+1, 1-\beta)\, y_2, \\ f_{\infty 0} = e^{\pi i(1-\alpha)} B(\alpha, \beta-\gamma+1)\, y_3, \quad f_{1,\frac{1}{x}} = e^{\pi i(\alpha-\gamma+1)} B(\gamma-\alpha, 1-\beta)\, y_4, \\ f_{0,\frac{1}{x}} = B(\alpha, 1-\beta)\, y_5, \quad f_{1\infty} = e^{\pi i(\gamma-\alpha-\beta-1)} B(\beta-\gamma+1, \gamma-\alpha)\, y_6. \end{cases}$$

□

$\boxed{\text{計算例}}$ y_1 を y_5, y_6 で表わそう．

$$f_{01} \underset{\boxed{1}}{=} -f_{1,\frac{1}{x}} + f_{0,\frac{1}{x}} \underset{\boxed{3}}{=} -\left(e^{2\pi i(\alpha-\gamma)} f_{1\infty} - f_{\frac{1}{x},\infty}\right) + f_{0,\frac{1}{x}}$$

$$\underset{\boxed{4}}{=} -e^{2\pi i(\alpha-\gamma)} f_{1\infty} + \left(-e^{2\pi i(\alpha-\beta)} f_{\infty 0} - e^{2\pi i(-\beta)} f_{0,\frac{1}{x}}\right) + f_{0,\frac{1}{x}}$$

$$\underset{\boxed{2}}{=} -e^{2\pi i(\alpha-\gamma)} f_{1\infty} - e^{2\pi i(\alpha-\beta)}\left(-f_{01} - f_{1\infty}\right) + \left(1 - e^{2\pi i(-\beta)}\right) f_{0,\frac{1}{x}}$$

$$\therefore\quad f_{01} = \frac{1-e^{2\pi i(-\beta)}}{1-e^{2\pi i(\alpha-\beta)}} f_{0,\frac{1}{x}} + \frac{e^{2\pi i(\alpha-\beta)} - e^{2\pi i(\alpha-\gamma)}}{1-e^{2\pi i(\alpha-\beta)}} f_{1\infty}.$$

$$\therefore\quad y_1 = \frac{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} e^{-\pi i\alpha} y_5 + \frac{\Gamma(\alpha-\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} e^{-\pi i\beta} y_6.$$

□

後で共形ブロックに合わせたこの手の公式を書く．

Riemannスキーム

Gaussの超幾何は $x=0,1,\infty$ に確定特異点を持ち, それぞれの特性指数は

$$(0, 1-\gamma),\quad (0, \gamma-\alpha-\beta),\quad (\alpha, \beta)$$

であった. これを次のように書く:

$$\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta \end{matrix}\right\},$$

← これをGaussの超幾何微分方程式の Riemannスキーム と呼ぶ.

一般に $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上の3点 $0,1,\infty$ に確定特異点を持つ $\underbrace{}_{\text{2階の}}$ 線形常微分方程式の Riemannスキームを次のように書く:

$$\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ \lambda_+ & \mu_+ & \nu_+ \\ \lambda_- & \mu_- & \nu_- \end{matrix}\right\},\qquad \lambda_+ + \lambda_- + \mu_+ + \mu_- + \nu_+ + \nu_- = 1.$$

(Fuchsの定理).

例えばこれの解に x^α をかけたものは次のRiemannスキームのODEをみたす:

$$\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ \lambda_+ + \alpha & \mu_+ & \nu_+ - \alpha \\ \lambda_- + \alpha & \mu_- & \nu_- - \alpha \end{matrix}\right\},$$

$(1-x)^\alpha$ をかけると

$$\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ \lambda_+ & \mu_+ + \alpha & \nu_+ - \alpha \\ \lambda_- & \mu_- + \alpha & \nu_- - \alpha \end{matrix}\right\},$$

したがって, 解に $x^{-\lambda_+}(1-x)^{-\mu_+}$ をかけると Gaussの超幾何のRiemannスキーム

$$\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \nu_+ - \lambda_+ - \mu_+ \\ \lambda_- - \lambda_+ & \mu_- - \mu_+ & \nu_- - \lambda_+ - \mu_+ \end{matrix}\right\}$$

が得られる. すなわち, $x^{-\lambda_+}(1-x)^{-\mu_+}$ をかけるとGaussの超幾何微分方程式の解になる. これで3点 $0,1,\infty$ に確定特異点を持つ2階の線形ODEの解は Gaussの超幾何函数で書ける.

$\boxed{\text{Prop.}}$ Riemannスキームが $\begin{Bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ \lambda_+ & \mu_+ & \nu_+ \\ \lambda_- & \mu_- & \nu_- \end{Bmatrix}$ $\begin{pmatrix} \lambda_+ + \mu_+ + \nu_+ \\ + \lambda_- + \mu_- + \nu_- = 1 \end{pmatrix}$ である $\mathbb{P}^1$ 上の確定特異点型の2階の線形微分方程式を考える. このとき, $x=0, 1, \infty$ における局所解は次のように書ける:

$\boxed{x=0}$
$$u_\pm = x^{\lambda_\pm}(1-x)^{\mu_+} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \lambda_\pm + \mu_+ + \nu_+, \ \lambda_\pm + \mu_+ + \nu_- \\ \pm(\lambda_+ - \lambda_-) + 1 \end{matrix} ; x\right),$$

$\boxed{x=1}$
$$v_\pm = x^{\lambda_+}(1-x)^{\mu_\pm} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \lambda_+ + \mu_\pm + \nu_+, \ \lambda_+ + \mu_\pm + \nu_- \\ \pm(\mu_+ - \mu_-) + 1 \end{matrix} ; 1-x\right),$$

$\boxed{x=\infty}$
$$w_\pm = \left(\frac{1}{x}\right)^{\nu_\pm}(1-x)^{\mu_+} {}_2F_1\left(\begin{matrix} \lambda_+ + \mu_+ + \nu_\pm, \ \lambda_+ + \mu_+ + \nu_\pm \\ \pm(\nu_+ - \nu_-) + 1 \end{matrix} ; \frac{1}{x}\right).$$

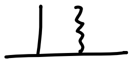
さらに, これらの接続行列は次で与えられる:

$$[u_+, u_-] = [v_+, v_-]\begin{bmatrix} F_{++} & F_{+-} \\ F_{-+} & F_{--} \end{bmatrix} = [w_+, w_-]\begin{bmatrix} B_{++} & B_{+-} \\ B_{-+} & B_{--} \end{bmatrix},$$

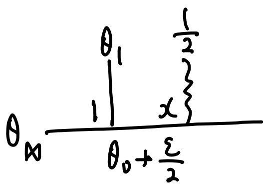
$$F_{\varepsilon\varepsilon'} = \frac{\Gamma(-\varepsilon(\mu_+ - \mu_-))\Gamma(\varepsilon'(\lambda_+ - \lambda_-) + 1)}{\Gamma(\lambda_{\varepsilon'} + \mu_\varepsilon + \nu_+)\Gamma(\lambda_{\varepsilon'} + \mu_\varepsilon + \nu_-)},$$

$$B_{\varepsilon\varepsilon'} = \frac{\Gamma(-\varepsilon(\nu_+ - \nu_-))\Gamma(\varepsilon'(\lambda_+ - \lambda_-) + 1)}{\Gamma(\lambda_{\varepsilon'} + \mu_+ + \nu_{-\varepsilon})(\lambda_{\varepsilon'} + \mu_- + \nu_{-\varepsilon})} e^{-\pi i(\lambda_{\varepsilon'} + \nu_\varepsilon)}.$$

□

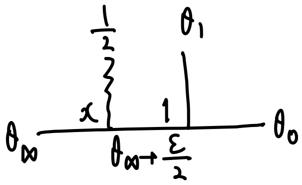
これで共形ブロック  についてすでにわかっていることになる.

$\leftarrow \varepsilon = \pm 1$



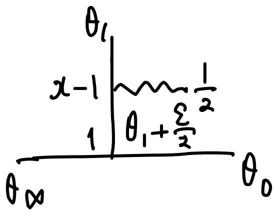
$$= x^{(\theta_0 + \frac{\varepsilon}{2})^2 - \frac{1}{4} - \theta_0^2}(1 + O(x)) = x^{\varepsilon\theta_0}(1 + O(x)) \quad \text{as } x \to 0.$$

ゆえに, $x=0$ での特性指数は $\pm\theta_0$.



$$= x^{\theta_\infty^2 - \frac{1}{4} - (\theta_\infty + \frac{\varepsilon}{2})^2}\left(1 + O\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) = x^{-\varepsilon\theta_\infty - \frac{1}{2}}\left(1 + O\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) \quad \text{as } x \to \infty.$$

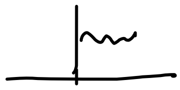
ゆえに, $x=\infty$ での特性指数は $\mp\theta_\infty - \frac{1}{2}$.



$x=0$のケースと同様にして,

$$= (x-1)^{\varepsilon\theta_1}(1 + O(x-1)) \quad \text{as } x \to 1.$$

ゆえに $x=1$ での特性指数は $\pm\theta_1$.

前ページの  の定義

$u\in M_{\Delta_2}$ に対して, $\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(u,z) : M_{\Delta_1}\to M_{\Delta_3}$ を次の条件で定める:

radial ordered product

$$\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(|\Delta_2\rangle ; z) = \Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(z),$$

$$\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(T(w-z)u, z) = \overbrace{\underset{|w|>|z|}{T(w)\,\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(u,z)} = \underset{|w|<|z|}{\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(u,z)\,T(w)}}^{= R[T(w)\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(u,z)]}$$

□

例 $u = L_n|\Delta_2\rangle$ に対して, $\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(u,z)$ は次のように計算される:

$$\begin{aligned}\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(T(w-z)|\Delta_2\rangle, z) &= R[T(w)\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(z)] \\ &= \left[\frac{\Delta_2}{(w-z)^2} + \frac{1}{w-z}\frac{\partial}{\partial z}\right]\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(z) + {:}T(w)\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(z){:}\ .\end{aligned}$$

$T(w-z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (w-z)^{-n-2} L_n$ であったので

$$\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(L_n|\Delta_2\rangle, z) = \begin{cases} 0 & (n>0), \\ \Delta_2\,\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(z) & (n=0), \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(z) & (n=-1), \\ \dfrac{1}{(-n-2)!}{:}\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial z}\right)^{-n-2}T(z)\right)\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(z){:} & (n\leqq -2). \end{cases}$$

□

注 特に $\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(L_{-2}|\Delta_2\rangle, z) = {:}T(z)\Phi^{\Delta_2}_{\Delta_3\Delta_1}(z){:}$