n-KdV-Bogoyavlensky 系の佐藤理論 Part 1

テータ函数解の構成の仕方

黒木 玄

2001 年 3 月 15 日*

目 次

*これはプレインテキスト版の日付である. TEX 版は 2001 年 1 月 17 日に作成された. 筆者の疑問や意見は 2001 年 3 月 15 日時点のものであり, 現在では解決や変化している場合がある.

1　無限次元 Grassmann 多様体

標数 0 の base field を C と書く. C は複素数体 $\mathbb{C}$ であったり, パラメーターの函数を含んだ体の場合もある. パラメーターを含む場合は C にはそのパラメーターに関する微分作用素が作用する.

$V := C((z^{-1}))$, $V_0 := C[[z^{-1}]]$ と置き, V の任意の部分空間 W に対して,

$$H^0(W) := V_0 \cap W, \quad H^1(W) := V/(V_0 + W)$$

と置く. 無限次元 Grassmann 多様体 GM を次のように定める:

$$\mathrm{GM} := \{\, W \mid W \text{ は } V \text{ の部分空間で } H^0(W),\, H^1(W) \text{ は有限次元} \,\}.$$

$W \in \mathrm{GM}$ に対して, W の Euler 数を次のように定める:

$$\chi(W) := \dim H^0(W) - \dim H^1(W).$$

GM は次のように connected components の直和に分解される:

$$\mathrm{GM} = \bigcup_{\chi\in\mathbb{Z}} \mathrm{GM}^\chi .$$

ここで,

$$\mathrm{GM}^\chi := \{\, W \in \mathrm{GM} \mid \chi(W) = \chi \,\}.$$

例えば, $C[z] \in \mathrm{GM}^1$, $zC[z] \in \mathrm{GM}^0$ である.

2　KP flow

以下, C には時間パラメーター $t_1, t_2, \dots$ が含まれていると仮定する.

GM に以下の条件によって定義される可算無限個の互いに可換なフローを KP flow と呼ぶことにする:

$$(\partial_i - z^i)W \subset W \quad (\partial_i := \partial/\partial t_i,\ i = 1, 2, 3, \dots).$$

この節に関してはひとまず詳しい説明を省略するが, このフローを charged Fermions などの言葉を用いて, τ 函数や BA 函数の言葉に翻訳することができ, 結果的に具体的に書き下された非線型微分方程式系 (KP hierarchy と呼ばれる) の解が得られる. ([DKJM] を見よ.)

その手続きの存在を認めれば, KP hierarchy の解は上のフローの解を構成することに帰着される.

$W \in \mathrm{GM}$ に対して,

$$A(W) := \{\, f \in C((z^{-1})) \mid fW \subset W \,\}$$

と置く. $A(W)$ は C 上の可換環をなす. W が t_i に関する KP flow で動かないための必要十分条件は $z^i \in A(W)$ (すなわち $z^iW \subset W$) が成立することである. だから, $A(W)$ が大きいほど W を初期条件とする KP flow の orbit は小さくなる.

3 n-reduced KP flow

$n = 1, 2, 3, \ldots$ について, $W \in \mathrm{GM}$ が n-reduced であるとは,

$$z^n W \subset W$$

が成立することであると定め, GM の中の n-reduced points 全体のなす無限次元部分多様体を n-GM と書くことにする.

KP flow は任意に固定された n に対する n-GM を保つ. KP flow を n-GM に制限したものを n-reduced KP flow もしくは n-KdV flow と呼ぶことにする.

$W \in \mathrm{GM}$ に対して, $z^{kn} W \subset W$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ なので, t_{kn}の方向のフローで W は固定される. よって, 意味のあるフローは n の倍数でない i に対する t_i に関するフローだけである.

n-KdV flow は以下と同値である:

$$\begin{aligned}
&z^n W \subset W, \\
&(\partial_i - z^i) W \subset W \quad (i \text{ は } n \text{ の倍数でない正の整数}).
\end{aligned}$$

例えば, 2-KdV flow は KdV hierarchy を与える.

4 n-Bogoyavlensky flow

以下, $n = 1, 2, 3, \ldots$ を任意に固定し, C には t_i とは別の時間パラメーター s_j $(j = 0, n, 2n, 3n, \ldots)$ が含まれていると仮定する.

n-Bogoyavlensky flow (簡単のために以下 n-B flow) は以下の式で定義される互いに可換な可算無限個のフローのことであると定義する:

$$(\partial'_j - z^j \partial'_0) W \subset W \quad (j = n, 2n, 3n, \ldots).$$

ここで, $\partial'_j = \partial/\partial s_j$ である. ベクトル空間の定義より $CW \subset W$ であり, $s_0 \in C$ なので, W が n-B flow の解であるとき, W は n-reduced である.

実際, $s_0 W \subset W$, $(\partial'_j - z^j \partial'_0) W \subset W$ のとき,

$$W \supset -[\partial'_j - z^j \partial'_0, s_0] W = z^j W.$$

j は n の倍数を動くことに注意せよ. したがって, n-Bogoyavlensky flow は GM 全体の上では定義されず, n-GM の上でのみ定義される.

注意 4.1 $j = 1, 2, 3, \ldots$ に対する $s_j W \subset W$ という条件は新たな reduction の条件を導かない. なぜならば,

$$[\partial'_j - z^{nj} \partial'_0, s_j] = 1 \in C$$

だからである. (KP flow の場合も同様である.) s_0 の場合は

$$[\partial'_j - z^{nj} \partial'_0, s_0] = -z^{nj} \notin C$$

なので reduction の条件を導いたのである. □

5　n-KdV-Bogoyavlensky flow

n-GM 上で定義された n-KdV flow と n-Bogoyavlensky flow は互いに可換である．それらのフローを合わせたものを n-KdV-Bogoyavlensky flow (以下簡単のため n-KdV-B flow) と呼ぶことにする．

n-KdV-B flow は以下の式によって定義される:

$$\begin{aligned}
&z^n W \subset W, \\
&(\partial_i - z^i) W \subset W \quad (i \text{ は } n \text{ の倍数でない正の整数}), \\
&(\partial'_j - z^j \partial'_0) W \subset W \quad (j \text{ は } n \text{ の倍数であるような正の整数}).
\end{aligned}$$

ここで, $\partial_i = \partial/\partial t_i$, $\partial'_j = \partial/\partial s_j$ である．

GM 上の点を, τ 函数や BA 函数に対応させる手続きを使えば, GM 上の n-KdV-B flow の解から, n-KdV-B hierarchy と呼ばれる具体的に与えられた非線型微分方程式系の解が得られる．

6　Krichever map の定義

GM の点は代数幾何的なデータから自然に構成される．その構成を Krichever construction と呼ぶ．以下はその説明である．

$\Xi = (X, p, z, L, t)$ は以下の幾何的データを表わすものとする:

- X は C 上の完備既約な代数曲線 (面倒なので非特異 (smooth) と仮定する)
- p は X 上の smooth point
- z^{-1} は点 p における完備化された局所環 $\hat{\mathcal{O}}_{X,p}$ の生成元:

$$\hat{\mathcal{O}}_{X,p} = C[[z^{-1}]].$$

  このとき, z を点 p における local coordinate と呼ぶことにする．(正確には z^{-1} をそのように呼ぶべきである．)
- L は X 上の torsion-free sheaf of rank 1 (X が非特異な場合は line bundle)
- t は点 p における L の stalk の完備化と $C[[z^{-1}]]$ の同型:

$$t : L_p \otimes_{\mathcal{O}_{X,p}} \hat{\mathcal{O}}_{X,p} \xrightarrow{\sim} C[[z^{-1}]].$$

  このとき, t を点 p における L の local trivialization と呼ぶことにする．

以上のデータに対して, $W = W(\Xi) \subset V = C((z^{-1}))$ を次のように定める:

$$W(\Xi) = H^0(X - \{p\}, L) \subset C((z^{-1})).$$

すなわち L の $X - \{p\}$ での global section (すなわち点 p のみに pole を許した meromorphic section) の空間 $H^0(X - \{p\}, L)$ を t を通して $C((z^{-1}))$ に埋め込んだものを $W(\Xi)$ と定義する．

幾何学的データ Ξ に対して $W(\Xi) \in \mathrm{GM}$ を対応させる写像を Krichever map と呼ぶ．

例 6.1 $X = \mathbb{P}^1$, $p = \infty$, $X - \{p\} = \operatorname{Spec} C[z]$, $L = \mathcal{O}_X$ のとき, $W(\Xi) = C[z]$ である. □

例 6.2 $X - \{p\} = \operatorname{Spec} C[x, y]$ ($y^2 = f(x)$, f は奇数次の多項式), $z^2 = x$, $L = \mathcal{O}_X$ のとき, $W(\Xi) = C[x, y] = C[z^2, \sqrt{f(z^2)}]$. □

例 6.3 $X - \{p\} = \operatorname{Spec} C[x, y]$ ($y^2 = f(x)$, f は奇数次の多項式), $z^2 = x$ のとき, L, t を任意に取る. このとき, $W(\Xi)$ は $x = z^2$ と $y = \sqrt{f(z^2)}$ の積で閉じている. 特に, $W(\Xi)$ は 2-reduced である. □

例 6.4 逆に, $W = W(\Xi)$ が 2-reduced であれば Ξ はすぐ上の例にあるものでなければいけないことがわかる. (その理由: X 上の代数函数 f で点 p 以外では正則で, 点 p における極が 2 位であるとき, f は X から $\mathbb{P}^1$ への二重被覆であり, p は ∞ に写される.) □

7 Krichever map の性質

定理 7.1 $H^p(X, L) = H^p(W(\Xi))$.

証明. L の cohomology は X の covering として $X - \{p\}$ と $\operatorname{Spec} C[[z^{-1}]]$ に関する Čech cohomology で計算できるので,

$$\begin{aligned} H^0(X, L) &= C[[z^{-1}]] \cap H^0(X - \{p\}, L) &&= H^0(W(\Xi)), \\ H^1(X, L) &= C((z^{-1}))/(C[[z^{-1}]] + H^0(X - \{p\}, L)) &&= H^1(W(\Xi)). \quad \square \end{aligned}$$

系 7.2 $W(\Xi) \in \mathrm{GM}^{\chi(L)}$. □

実は $W = W(\Xi)$ は z と t の定数倍の不定性を除いて幾何学的データ Ξ を一意に決定してしまう. その理由を簡単に説明しよう.

定理 7.3 $W(\Xi)$ は z と t の定数倍の不定性を除いて Ξ を一意に決定する.

証明. (1) $A(W) = \{\, f \in C((z^{-1})) \mid fW \subset W \,\}$ と置いたことを思い出そう. 実は次が成立している:

$$A(W(\Xi)) = H^0(X - \{p\}, \mathcal{O}_X).$$

この式によって $W(\Xi)$ から $X - \{p\}$ の affine coordinate ring が復活する. その証明は以下の通り. まず, 簡単のため $W = W(\Xi)$ と置き, X の代数函数体を K と書くと,

$$\begin{aligned} K &= \{\, r/s \mid r, s \in H^0(X - \{p\}, L),\ s \neq 0 \,\} \\ &= \{\, r/s \mid r, s \in W,\ s \neq 0 \,\} \\ &\subset C((z^{-1})). \end{aligned}$$

$H^0(X - \{p\}, L)$ は $H^0(X - \{p\}, \mathcal{O}_X)$ の要素の積で閉じているので, $H^0(X - \{p\}, \mathcal{O}_X) \subset A(W)$ であることがすぐにわかる.

任意に $f \in A(W)$ を取る．このとき, 任意の $0 \neq s \in W$ に対して, $r = fs$ と置くと, $A(W)$ の定義より, $r \in W$ である．このとき, $f = r/s$, $r, s \in W$, $s \neq 0$ なので, $f \in K$ である．もしも, f が p 以外の極を持つとき, その点で 0 にならない $s \in H^0(X - \{p\}, L)$ を取れば $fs \notin H^0(X - \{p\}, L)$ となるので, $f \notin A(W)$ となる．よって, f は点 p 以外に極を持たない. 以上によって, $f \in H^0(X - \{p\}, \mathcal{O}_X)$ であることがわかった．これで, 上と逆の包含関係が示された.

したがって, $A(W(\Xi)) = H^0(X - \{p\}, \mathcal{O}_X)$.

$X - \{p\} = \operatorname{Spec} H^0(X - \{p\}, \mathcal{O}_X)$ なので, $X - \{p\}$ が (したがって X と p が) $W = W(\Xi)$ の言葉で書けることがわかった:

$$X - \{p\} = \operatorname{Spec} A(W(\Xi)).$$

(2) L の $X - \{p\}$ 上への制限は W を $A(W) = H^0(X - \{p\}, \mathcal{O}_X)$ 上の加群とみなしたものに対応する sheaf である.

さらに, L の点 p での stalk は $L_p = C[[z^{-1}]] \cap W(\Xi)$ と書ける.

これで L が $W = W(\Xi)$ の言葉で書けることがわかった.

(3) z と t については省略. (点 p における local coordinate z の取り方の自由度は

$$f(z^{-1}) \in C[[z^{-1}]], \quad f(0) = 0, \quad f'(0) \neq 0$$

なる f を z^{-1} に代入する操作の分だけあり, L の点 p における local trivialization t の取り方の自由度は

$$g(z^{-1}) \in C[[z^{-1}]], \quad g(0) \neq 0$$

なる g を t にかけ算する分だけあることに注意せよ.) □

定理 7.4 幾何学的データ Ξ に対応する W = W(Ξ) から得られる τ 函数や BA 函数は曲線 X に付随する Jacobian theta 函数を用いて具体的に表わされる． □

この結果については, [KNTY], [ADKP] を見よ．より抽象的に言えば, 幾何学的データのモジュライから GM への Krichever map がそれぞれの上の determinant line bundles のあいだの map に持ち上がるということである.

これは Riemann 面上の共形場理論における Boson や Fermion の相関函数は theta 函数で書けるという定理の特殊な場合であるとみなせる. Boson の相関函数については, [U] の Chapter II などを参照せよ[1].

8 n-KdV-Bogoyavlensky flow の特殊解の構成法の概略

問題は, $W = W(\Xi)$ と置いたとき,

$$\begin{aligned}
&z^n W \subset W, \\
&(\partial_i - z^i) W \subset W \quad (i \text{ は } n \text{ の倍数でない正の整数}), \\
&(\partial'_j - z^j \partial'_0) W \subset W \quad (j \text{ は } n \text{ の倍数であるような正の整数}).
\end{aligned}$$

[1] Baker-Akhieser 函数のテータ函数表示については [Kr], [Du] が基本文献である．τ 函数のテータ函数表示については [SW] が基本文献であり, 多成分 KP 系の場合は [Ma] を見よ．文献 [KNTY], [ADKP], [AD] も参照せよ.

をみたしているような幾何学的データ Ξ をどのように構成するかである．もしも, そのようなデータが構成できれば定理 7.4 を用いて, n-KdV-Bogoyavlensky hierarchy の theta 函数解が得られる．

以下, $W = W(\Xi)$ と仮定する．

8.1 $z^n W \subset W$ について

系 8.1 $z^n W \subset W$ が成立するための必要十分条件は以下が成立することである:

- 点 p にのみ n 位の極を持つ X 上の代数函数 f が存在する．
- 点 p における local coordinate z は $f = cz^n$ (c は 0 でない定数) となるように取ってある．

証明. 定理 7.3 の証明の (1) より,

$$H^0(X - \{p\}, \mathcal{O}_X) = A(W) = \{\, f \in C((z^{-1})) \mid fW \subset W \,\}$$

であるから, この補題が成立することはすぐにわかる． □

そこで, さらに $z^n W \subset W$ を仮定する．

例 8.2 $n = 2$ のとき．$z^2 W \subset W$ であるための必要十分条件は, ある奇数次の多項式 $f(x)$ によって, $X - \{p\}$ が

$$X - \{p\} = \{(x, y) \mid y^2 = f(x)\,\} = \operatorname{Spec} C[x, \sqrt{f(x)}]$$

と表わされ, $p = \infty$ における local coordinate z^{-1} が

$$x = z^2$$

を満たしていることである． □

$n > 2$ の場合はこのように単純ではない．

8.2 $(\partial_i - z^i)W \subset W$ について

この条件を満たすように W の t_i 依存性を決めるのは易しい．(KP hierarchy の理論はよく整備されている.)　結果的に X の Jacobian の上の linear な flow を定める．

$(\partial_i - z^i)W \subset W$ が成立するための必要十分条件は L の t_i 依存性が以下のように定められていることである．

まず, X の被覆を

$$X = (X - \{p\}) \cup U, \quad (\text{ここで } U \text{ は formal disk } \operatorname{Spec} C[[z^{-1}]])$$

と取り, L の $X - \{p\}$ への制限と L の U への制限の貼り合わせ方を t_i に依存して変化させる．具体的には, $t_i = 0$ のときの貼り合わせ函数に$\exp(t_i z^i)$ をかけたものを t_i における貼り合わせ函数とみなす．

この点に関しては [KNTY], [ADKP] および [Mu] の Section 2 を参考にせよ．

8.3 $(\partial'_j - z^j\partial'_0)W \subset W$ について

$W = W(\Xi)$ がこれを満たすように Ξ の s_j 依存性を決定するのがこの節の問題である.

以下, 記号の簡単のため

$$\delta_j := \partial'_j - z^j\partial'_0 = \frac{\partial}{\partial s_j} - z^j\frac{\partial}{\partial s_0}$$

と置く. このとき, 扱うべき条件は

$$\delta_j W \subset W$$

と表わされる. δ_j は $C((z^{-1}))$ に自然に作用していることに注意せよ.

この条件を満たすように幾何学的データ Ξ の s_j 依存性を決めなければいけない. そうするためには KP flow の場合と違って, line bundle L だけではなく curve $X - \{p\}$ の変形を考えなければいけない.

定理 7.3 の証明の (1) より $X - \{p\} = \operatorname{Spec} A(W)$ だったので, まず, $\delta_j W \subset W$ が成立するために $A(W)$ が s_j にどのように依存してなければいけないかを調べよう.

$A(W)$ の定義は

$$A(W) = \{\, f \in C((z^{-1})) \mid fW \subset W \,\}$$

であった. よって, $\delta_j W \subset W$ が成立しているとき, $f \in A(W)$ ならば,

$$\delta_j(f)W = [\delta_j, f]W \subset W \text{ かつ } \delta_j(f) \in C((z^{-1}))$$

なので, $\delta_j(f) \in A(W)$ である. よって, $\delta_j W \subset W$ が成立しているためには,

$$\delta_j A(W) \subset A(W)$$

が成立していることが必要である.

$A(W)$ の C 上の可換環としての生成元 x_l $(l = l, \dots, L)$ を任意に取る. このとき, $\delta_j A(W) \subset A(W)$ が成立するための必要十分条件は,

$$\delta_j(x_l) \in A(W) = C[x_1, \dots, x_l] \quad (l = 1, \dots, L) \tag{$*$}$$

が成立することである.

目標である $\delta_j W \subset W$ であるための必要十分条件について考えよう.

$W = H^0(X - \{p\}, L)$ の $A(W)$ 上の加群としての生成元 g_m $(m = 1, \dots, M)$ を任意に取る. このとき, W の任意の要素は g_m たちの $A(W)$ 係数の一次結合の形で書けるので, 上の条件 $(*)$ のもとで, $\delta_j W \subset W$ が成立するための必要十分条件は

$$\delta_j(g_m) \in W = A(W)g_1 + \cdots + A(W)g_M \quad (m = 1, \dots, M) \tag{$**$}$$

が成立することである. 以上によって次の結果が得られた.

定理 8.3 $W = W(\Xi)$ のとき, $A(W)$ の C 上の可換環としての生成元 x_l $(l = 1, \dots, L)$ と W の $A(W)$ 上の加群としての生成元 g_m $(m = 1, \dots, M)$ を任意に取る. このとき, $\delta_j W \subset W_j$ が成立するための必要十分条件は以下の 2 つの条件が成立することである:

$(*)$ $\delta_j(x_l) \in A(W) = C[x_1, \dots, x_l] \quad (l = 1, \dots, L)$

$(**)$ $\delta_j(g_m) \in W = A(W)g_1 + \cdots + A(W)g_M \quad (m = 1, \dots, M)$ $\square$

9　$n=2$ の場合

$W=W(\Xi)$ が 2-reduced であるための必要十分条件は, x のある多項式 f が存在して,

$$
\begin{aligned}
&X-\{p\}=\{\,(x,y)\mid y^2=f(x)\,\},\\
&f(x)=(x-e_1)\cdots(x-e_{2g+1}) \quad (e_k\in C,\ 0\neq c\in C),\\
&x=z^2
\end{aligned}
$$

が成立することである. (X が smooth であるためには e_k が互いに異なることが必要である. X の genus は g である.)

このとき, $A(W)=C[x,y]$ (ただし $y^2=f(x)$ という relation を仮定) である.

定理 9.1 $\delta_j A(W)\subset A(W)$ (j は正の偶数) が成立するための必要十分条件は,

$$\delta_j(e_k)|_{x=e_k}=\frac{\partial e_k}{\partial s_j}-e_k^{j/2}\frac{\partial e_k}{\partial s_0}=0 \quad (k=1,\dots,2g+1) \tag{$*$}$$

が成立することである.

証明. $A(W)=C[x,y]$, $y^2=f(x)$, $x=z^2$ より, $\delta_j A(W)\subset A(W)$ (j は正の偶数) が成立するための必要十分条件は,

$$\delta_j(y)=\frac{\partial y}{\partial s_j}-x^{j/2}\frac{\partial y}{\partial s_0}\in C[x,y] \quad (j \text{ は正の偶数})$$

が成立することである. e_k が s_j に依存していることに注意しながら計算すれば, $\delta_j(y)$ は次のような形になることがわかる:

$$\delta_j(y)=\frac{y}{2}\sum_{k=1}^{2g+1}\frac{-\delta_j(e_k)}{x-e_k}.$$

よって, $\delta_j A(W)\subset A(W)$ が成立するための必要十分条件は

$$g_j:=\sum_{k=1}^{2g+1}\frac{\delta_j(e_k)}{x-e_k}\in\frac{C[x,y]}{y} \tag{$*$'}$$

である. $C[x,y]$ の商体を $C(x,y)$ と書くと,

$$C(x,y)=C(x)\oplus yC(x)=C(x)\oplus C(x)/y$$

という直和分解が成立する. よって,

$$C[x,y]/y=C[x]\oplus C[x]/y$$

が成立する. δ_j の定義より $g_j\in C(x)$ であることがわかる. したがって, ($*$') が成立するための必要十分条件は $g_j\in C[x]$ が成立することである. そして, そのための必要十分条件は g_j の $x=e_k$ における留数

$$\operatorname*{Res}_{x=e_k} g_j\,dx=\delta_j(e_k)|_{x=e_k}=\frac{\partial e_k}{\partial s_j}-e_k^{j/2}\frac{\partial e_k}{\partial s_0}$$

が全て消えることである. □

注意 9.2 $e_k = u$ に関する方程式 $(*)$ は, 定数でない任意の 2 変数函数 $F(u, v)$ について,

$$F(u, s_0 + u^{j/2} s_j) = 0$$

が成立していれば満たされる. すべての s_j を同時に考える場合は

$$F(u, s_0 + \sum u^{j/2} s_j) = 0 \quad (\text{j は正の偶数を走る})$$

を考えれば良い. □

次に $\delta_j W \subset W$ であるための必要十分条件について考えよう.

そのためには, $W = H^0(X - \{p\}, L)$ の $C[x, y] = H^0(X - \{p\}, \mathcal{O}_X)$ 上の加群としての生成元 g_m を任意に取り, $\delta_j(g_m) \in W$ という条件を課せば良い.

g_m が具体的に x, y の式で書かれているなら, $\delta_j(g_m) \in W$ という条件も上の $(*)$ のような形で具体的に書ける.

おそらく, degree g の generic divisor を考える場合が一番簡単である.

10 問題

注意 10.1 以上の方法は SDYM hierarchy の場合も全く同様に適用できる. (SDYM については高崎金久などの仕事や佐藤幹夫講義録の p.365 以降と p.397 以降を参照することになる. しかし, 本当の基本文献を私は知らない.)

残った問題は以下の通り.

問題 10.2 上では $n = 2$ の場合に $W = W(\Xi)$ のとき $\delta_j A(W) \subset A(W)$ となるための必要十分条件を求めたが, そのまま同様の議論を続けて, $n = 2$ の場合に $\delta_j W \subset W$ となるための必要十分条件を同様の形で求めよ. □

おそらく, 結局上と同様に $(*')$ のような “pole equation” の形で書けてしまうのだと思う. 少なくとも generic な場合は.)

問題 10.3 上の $n = 2$ の場合の結果を $n > 2$ に拡張せよ. □

$n = 2$ の場合は hyperelliptic curve で済んだので計算もおそろしく簡単だったが, $n > 2$ の場合は少々面倒になる.

点 p のみで n 位の極を持ち他では正則な有理型函数 ϕ を持つコンパクト Riemann 面 X について, $X - \{p\}$ の affine coordinate ring を

$$x = \phi = z^n \text{ の有利函数体 } C(x) \text{ の代数拡大体の部分環}$$

として具体的に実現せよ (上の場合は $C[x, y]$ $(y^2 = f(x))$ と実現した) という問題を最初に解かなければいけない. こういう曲線の代数幾何はよくわかっているはずなのですがどうなんでしょうか?

問題 10.4 問題 10.2 と問題 10.3 の解答を参考にして, 任意の $n \geq 2$ について $\delta_j W \subset W$ の必要十分条件を求め, n-KdV-B hierarchy の (難しい場合は generic なものに限って) theta 函数解をの全てを構成せよ. □

問題 10.5 “pole equation” $(*)$ の幾何学的意味? □

参考文献

[AD] E. Arbarello and C. De Concini: Abelian varieties, infinite-dimensional Lie algebras, and head equation, Proc. of Symp. Pure Math. 53 (1991), 1–31

[ADKP] E. Arbarello, C. De Concini, V. G. Kac, and C. Procesi: Moduli spaces of curves and representation theory, Commun. Math. Phys. **117**, 1–36 (1988)

[DKJM] E. Date, M. Kashiwara, M. Jimbo, T. Miwa: Transformation groups for soliton equations, Nonlinear integrable systems—classical theory and quantum theory (Kyoto, 1981), 39–119, World Sci. Publishing, Singapore, 1983.

[Du] B. A. Dubrovin: Theta functions and non-linear equations, Russian Math. Surveys 36:2 (1981), 11–92

[KNTY] N. Kawamoto, Y. Namikawa, A. Tsuchiya, and Y. Yamada: Geometric realization of conformal field theory on Riemann surfaces, Commun. Math. Phys. **116**, 247–308 (1988)

[Kr] I. M. Krichever: Methods of algebraic geometry in the theory of non-linear equations, Russian Math. Surveys 32:6 (1977), 185–213

[Ma] A. Maffei: The multicomponent KP and Fay trisecant formula, International Mathematical Research Notices, 1996, No.16, 769–791

[Mu] D. Mumford: An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg-de Vries equation and related non-linear equations, Proc. of Intl. Symp. on Alg. Geom., Kyoto 1977, 115–153

[SW] G. Segal and G. Wilson: Loop groups and equations of KdV type, Publ. Math. IHES, 61, 1985, 5–65

[U] Kenji Ueno: On conformal field theory[2], Vector bundles in algebraic geometry (Durham, 1993), 283–345, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 208, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995

[2] `http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/preprint/preprint94.html` でも読める