The ℓ-Calogero-Bogoyavlensky-Schiff hierarchy and deformations of families of curves

黒木 玄

2002年8月11日　Preliminary Version 0.6.7*

目 次

*これは書きかけの草稿である. 少しづつ減ってはいるが, まだ大量に間違いを含むと思われるので自由に配布してはいけない. テータ函数表示の部分が未完.

1 The Sato Grassmannian

文字 w に関する複素係数形式 Laurent 級数体を $\mathbb{C}((w))$ と書き, 形式巾級数環を $\mathbb{C}[[w]]$ と書く. $H = \mathbb{C}((w))$, $H_0 = \mathbb{C}[[w]]$ と置く.

H の $\mathbb{C}$-subspace F に対して, 自然な写像の合成 $F \hookrightarrow H \twoheadrightarrow H/H_0$ を $j_F : F \to H/H_0$ と書き,

$$H^0(F) = \mathrm{Ker}(j_F : F \to H/H_0), \qquad H^1(F) = \mathrm{Coker}(j_F : F \to H/H_0)$$

と定める. $H^0(F)$, $H^1(F)$ が共に有限次元であるとき, j_F は Fredholm であると言う. そのとき, j_F の index を $\chi(F) = \dim H^0(F) - \dim H^1(F)$ と書く.

$\chi \in \mathbb{Z}$ に対して, index χ の Sato Grassmannian Gr^χ を

$$\mathrm{Gr}^\chi = \{\, F \subset H \mid F \text{ は Fredholm かつ } \chi(F) = \chi \,\}$$

と定める. $\mathrm{Gr} = \bigcup \mathrm{Gr}^\chi$ と置く. 以下では主に $\chi = 0$ の場合について考える.

$F \in \mathrm{Gr}^0$ が generic であるとは, $H^p(F) = 0$ $(p = 0, 1)$ が成立することであると定め,

$$\mathrm{Gr}^0_\emptyset = \{\, F \in \mathrm{Gr}^0 \mid F \text{ is generic} \,\}$$

と置く. H の $\mathbb{C}$-subspace F が $\mathrm{Gr}^0_\emptyset$ に含まれるための必要十分条件は, F が次の形の $\mathbb{C}$-basis を持つことである:

$$f_i = w^{-i} + \sum_{j \geq 0} a_{ij} w^j \qquad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

ここで $a_{ij} \in \mathbb{C}$ である. この形の F の basis は一意的である. すなわち, $\mathrm{Gr}^0_\emptyset$ の点の全体は $(a_{ij}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ によってパラメトライズされる. よって, $\mathrm{Gr}^0_\emptyset$ を無限次元の affine space と同一視できる.

実は Gr^0 は無限次元 affine spaces の貼り合わせによって構成された無限次元多様体とみなせる. しかし, このノートでは簡単のため主な議論を $\mathrm{Gr}^0_\emptyset$ を制限することによって, Gr^0 の無限次元多様体としての構造を用いない.

さて, ここで Gr 上の Kadomtsev-Petviashvili flow (KP flow) について簡単に説明しよう. Gr の無限次元多様体としての構造を用いない代数的な構成を次の section で説明する.

点 $F \in \mathrm{Gr}$ における Gr の tangent space は自然に $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F, H/F)$ と同一視される. 各 $i = 1, 2, \dots$ に対して, $-w^i$ の積が定める F から H/F への線形写像は点 F における tangent vector を定める. このようにして定まる Gr 上の可算個のベクトル場の全体を Kadomtsev-Petviashvili flow (KP flow) と呼ぶ.

無限個の時間変数 $t = (t_1, t_2, \dots)$ に依存する Gr 内の点 $F(t)$ が KP flow にしたがって動いているための必要十分条件は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_i} + w^{-i} \right) F(t) \subset F(t)$$

が成立していることである.

2 The Kadomtsev-Petviashvili hierarchy

この section では $\mathrm{Gr}^0_\emptyset$ に制限された KP flow を扱う.

R は整域であり, R には互いに可換な可算個の derivations $\partial/\partial t_i$ $(i = 1, 2, \dots)$ が作用していると仮定する.

$H_R = R((w))$ と置く. 形式 Laurent 級数の係数への ∂/dt_i の作用はそれらの H_R への作用を定める.

$R((w))\, e^\xi$ は形式的な元 e^ξ から生成される $R((w))$ 上の rank 1 の free module であるとする. $\partial/\partial t_i$ の $R((w))\, e^\xi$ への作用を

$$\frac{\partial}{\partial t_i}(f\, e^\xi) = \left(\frac{\partial f}{\partial t_i} + w^{-i} f\right) e^\xi \qquad \bigl(f \in R((w))\bigr)$$

と定める. 直観的には $\xi = t_1 w^{-1} + t_2 w^{-2} + \cdots$ である.

Definition 2.1 (generic KP flow) 以下の条件を満たす $H_R = R((w))$ の R-submodules の全体の集合を $\mathrm{KP}_\emptyset(R)$ と書く:

(G) F は次の形の R-free basis を持つ:

$$f_i = w^{-i} + \sum_{j \geq 0} a_{ij} w^j \qquad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

ここで $a_{ij} \in R$ である. (このとき, この形の F の R-free basis は一意的である.)

(KP) F は次を満たしている:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_i} + w^{-i}\right) F \subset F \qquad (i = 1, 2, \dots).$$

条件 **(G)** を genericity の条件と呼び, 条件 **(KP)** を KP flow の条件と呼び, 二つを合わせて generic KP flow の条件と呼ぶ. □

以下, $F \in \mathrm{KP}_\emptyset(R)$ と仮定する.

Definition 2.2 (Baker-Akhiezer module) F が自然に定める $R((w))\, e^\xi$ の R-submodule $F\, e^\xi$ を BA_F と書き, F に付随する Baker-Akhiezer module と呼ぶ:

$$\mathrm{BA}_F = F\, e^\xi.$$

BA_F の元を Baker-Akhiezer function と呼ぶ. □

Remark 2.3 条件 **(KP)** は次の条件と同値である:

(KP') BA_F は $\partial/\partial t_i$ の作用で閉じている:

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \mathrm{BA}_F \subset \mathrm{BA}_F \qquad (i = 1, 2, \dots).$$

この同値性は KP flow を代数幾何的に解釈するためのキーポイントになる. □

Definition 2.4 条件 **(G)** を用いて, $\Psi_F \in \mathrm{BA}_F$ を次のように定める:

$$\Psi_F = f_1\, e^{\xi} = (1 + a_{10}w + a_{11}w^2 + a_{12}w^3 + \cdots)w^{-1}\, e^{\xi}.$$

この Ψ_F を F に付随する normalized Baker-Akhiezer function もしくは wave function と呼ぶ.

$\partial = \partial_x = \partial/\partial t_1$ と置き, 常微分作用素環 $\mathcal{D}_R = R[\partial]$ を考える. 条件 **(KP)** と同値な条件 **(KP')** より, $\mathcal{D}_R$ は BA_F に自然に作用し, BA_F は $\mathcal{D}_R$-module とみなせる. 以上の準備のもとで次の結果が得られる.

Lemma 2.5 条件 **(G)**, **(KP)** のもとで, Baker-Akhiezer module BA_F はΨ_F から生成される $\mathcal{D}_R$ 上の rank 1 の free module である.

Proof. 条件 **(G)** より,

$$\partial^i \Psi_F \in (w^{-i-1} + R[[w]])\, e^{\xi} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

は BA_F の R-free basis である. □

擬微分作用素環 $\mathcal{E}_R$ を定義しよう. R-module として, $\mathcal{E}_R$ を

$$\mathcal{E}_R = R((\partial^{-1})) = \left\{ \sum_{i \le N} a_{-i}\partial^i \;\middle|\; a_{-i} \in R,\ N \in \mathbb{Z} \right\}$$

と定める. $\mathcal{E}_R$ の環構造を次が成立するように定める:

$$(f\partial^m)(g\partial^n) = \sum_{k \ge 0} \binom{m}{k} f g^{(k)} \partial^{m-k+n}, \qquad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}.$$

ここで, $m, n \in \mathbb{Z}$, $f, g \in R$, $g^{(k)} = \partial^k(g) = \partial^k g/\partial t_1^k$ である. $\mathcal{E}_R$ の環構造の定義式は $\mathcal{D}_R$ における Leibnitz rule の拡張になっている. よって, $\mathcal{D}_R$ は自然に $\mathcal{E}_R$ の部分環とみなせる.

$\mathcal{E}_R$ の $R((w))\, e^{\xi}$ への作用を次のように定める:

$$(f\partial^m)(g\, e^{\xi}) = \left(\sum_{k \ge 0} f g^{(k)} w^{-(m-k)} \right) e^{\xi} \qquad \bigl(f \in R,\ m \in \mathbb{Z},\ g \in R((w))\bigr).$$

この定義式は $\partial^i e^{\xi} = w^{-i} e^{\xi}$ の Leibnitz rule による自然な拡張である. この作用は $\mathcal{D}_R$ の $R((w))\, e^{\xi}$ への自然な作用の拡張になっている. 以上の記号のもとで次の結果が容易に得られる.

Lemma 2.6 $R((w))\, e^{\xi}$ は $\mathcal{E}_R$ 上の rank 1 の free module であり, 生成元として $w^{-1}\, e^{\xi}$ が取れる. □

この lemma より, $\Psi_F = W_F(w^{-1}\, e^{\xi})$ を満たす $W_F \in \mathcal{E}_R$ が唯一存在する. Ψ_F を

$$\Psi_F = (1 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots)w^{-1}\, e^{\xi}, \qquad a_i \in R$$

と書くとき,

$$W_F = 1 + a_1\partial^{-1} + a_2\partial^{-2} + \cdots .$$

この W_F を F に付随する wave operator と呼ぶ. F に付随する L-operator L_F を次のように定める:

$$L_F = W_F \partial W_F^{-1} \in \mathcal{E}_F.$$

L_F は次の形をしている:

$$L_F = \partial + u_1\partial^{-1} + u_2\partial^{-2} + \cdots, \qquad u_i \in R.$$

$\mathcal{E}_{R,+} = \mathcal{D}_R$, $\mathcal{E}_{R,-} = R[[\partial^{-1}]]\partial^{-1}$ と置くと, $\mathcal{E}_{R,\pm}$ は交換子 $[A,B] = AB - BA$ に関する $\mathcal{E}_R$ の Lie subalgebra であり, $\mathcal{E}_R = \mathcal{E}_{R,+} \oplus \mathcal{E}_{R,-}$ が成立する. $A \in \mathcal{E}_R$ に対して, $A_\pm \in \mathcal{E}_{R,\pm}$ を $A = A_+ - A_-$ という条件によって定める. P_- の前にマイナス符号が付いていることに注意せよ. A_+ は A の微分作用素部分であり, $-A_-$ は A の積分作用素部分である.

$B_{F,i,\pm} \in \mathcal{E}_R$ $(i = 1, 2, 3, \dots)$ を

$$B_{F,i,\pm} = (L_F^i)_\pm = (W_F \partial^i W_F^{-1})_\pm$$

と定める. $B_{F,i,+}$ は次の形をしている:

$$B_{F,i,+} = \partial^i + b_{i2}\partial^{i-2} + \cdots + b_{ii}, \qquad b_{ij} \in R.$$

Theorem 2.7 (KP hierarchy) 任意の $F \in \mathrm{KP}_\emptyset(R)$ 対する $\Psi = \Psi_F$, $W = W_F$, $L = L_F$, $B_{i,\pm} = B_{F,i,\pm}$ について以下が成立する:

1. Linear equations:

$$L\Psi = w^{-1}\Psi, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial t_i} = B_{i,+}\Psi \quad (i = 1, 2, \dots).$$

2. Sato-Wilson equations:

$$\frac{\partial W}{\partial t_i} = B_{i,-}W = B_{i,+}W - W\partial^i \qquad (i = 1, 2, \dots).$$

3. Lax equations:

$$\frac{\partial L}{\partial t_i} = [B_{i,\pm}, L] \qquad (i = 1, 2, \dots).$$

4. Zero curvature equations:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_i} - B_{i,\pm},\ \frac{\partial}{\partial t_j} - B_{j,\pm}\right] = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \dots),$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial t_i} - B_{i,+},\ \frac{\partial}{\partial t_j} - B_{j,-}\right] = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \dots).$$

ここで $[\ ,\ ]$ は擬微分作用素の交換子である. 以上の方程式を KP hierarchy と呼ぶ.

Proof. $v = w^{-1}e^{\xi}$ と置く．このとき, $\partial v = w^{-1}v$, $\partial v/\partial t_i = w^{-i}v$, $\Psi = Wv$ が成立している．$L = W\partial W^{-1}$ より,

$$L\Psi = W\partial W^{-1}Wv = W\partial v = w^{-1}Wv = w^{-1}\Psi.$$

条件 **(KP')** と Lemma 2.5 より, $\partial\Psi/\partial t_i = B_i\Psi = B_iWv$ をみたす $B_i \in \mathcal{D}_R$ が唯一存在する．一方,

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t_i} = \frac{\partial}{\partial t_i}(Wv) = \frac{\partial W}{\partial t_i}v + Ww^{-i}v = \frac{\partial W}{\partial t_i}v + W\partial^i v = \left(\frac{\partial W}{\partial t_i} + W\partial^i\right)v.$$

よって, Lemma 2.6 より, $B_iW = \partial W/\partial t_u + W\partial^i$, すなわち

$$W\partial^i W^{-1} = B_i - \frac{\partial W}{\partial t_i}W^{-1}.$$

この式の右辺の第一項は $\mathcal{E}_{R,+} = \mathcal{D}_R$ に含まれ, 第二項は $\mathcal{E}_{R,-}$ に含まれる．よって,

$$B_i = (W\partial^i W^{-1})_+ = B_{i,+}, \qquad \frac{\partial W}{\partial t_i}W^{-1} = (W\partial^i W^{-1})_- = B_{i,-}.$$

この後者より,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial t_i} &= B_{i,-}W = (B_{i,+} - W\partial^i W^{-1})W = B_{i,+}W - W\partial^i, \\
\frac{\partial L}{\partial t_i} &= \frac{\partial}{\partial t_i}(W\partial W^{-1}) = \frac{\partial W}{\partial t_i}\partial W^{-1} - W\partial W^{-1}\frac{\partial W}{\partial t_i}W^{-1} \\
&= B_{i,-}W\partial W^{-1} - W\partial W^{-1}B_{i,-} = [B_{i,-}, L] \\
&= [B_{i,+} - L^i, L] = [B_{i,+}, L].
\end{aligned}$$

$\partial\Psi/\partial t_i = B_{i,+}\Psi$, $\partial W/\partial t_i = B_{i,-}W$ $(i = 1, 2, \dots)$ の compatibility より,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_i} - B_{i,\pm},\ \frac{\partial}{\partial t_j} - B_{j,\pm}\right] = 0.$$

この等式の $+$ の方に $\partial L/\partial t_i = [B_{i,+}, L]$ と同値な $[\partial/\partial t_i - B_{i,+},\ L^j] = 0$ を辺々加えれば次が出る:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_i} - B_{i,+},\ \frac{\partial}{\partial t_j} - B_{j,-}\right] = 0. \quad \square$$

Lemma 2.8 (ℓ-reduction) 以上の記号のもとで, 任意の $\ell = 2, 3, \dots$ に対して, 以下の条件は互いに同値である:

(1) $w^{-\ell}F \subset F$.
(2) ある $P \in \mathcal{D}_R$ が存在して, $w^{-\ell}\Psi_F = P\Psi_F$.
(3) L_F^{ℓ} は微分作用素である．すなわち, $L_F^{\ell} \in \mathcal{D}_R$.
(4) $\partial W_F/\partial t_{j\ell} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots)$.

これらの条件が成立するとき, F は ℓ-reduction の条件を満たしていると言う．

Proof. (1) $\Longrightarrow$ (2)．条件 (1) より, $w^{-\ell}\Psi_F \in \mathrm{BA}_F$. よって, Lemma 2.5 より, ある $P \in \mathcal{D}_R$ が存在して, $w^{-\ell}\Psi_F = P\Psi_F$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). 条件 (1) と $w^{-\ell}\,\mathrm{BA}_F \subset \mathrm{BA}_F$ は同値であり, 条件 (2) と Lemma 2.5 より,

$$w^{-\ell}\,\mathrm{BA}_F = w^{-\ell}\mathcal{D}_R\Psi_F = \mathcal{D}_R w^{-\ell}\Psi_F = \mathcal{D}_R P\Psi_F \subset \mathrm{BA}_F\,.$$

(2) $\Longrightarrow$ (3). Theorem 2.7 より $L_F^\ell \Psi_F = w^{-\ell}\Psi_F$ である. よって, 条件 (2) と Lemma 2.5 より $L_F^\ell = P \in \mathcal{D}_R$.

(3) $\Longrightarrow$ (2). 条件 (3) より, $P = L_F^\ell \in \mathcal{D}_R$ と置けば良い.

(3) $\Longrightarrow$ (4). 条件 (3) より, $P = L_F^\ell \in \mathcal{D}_R$ と置くと, $B_{j\ell,-} = (P^j)_- = 0$. よって, Theorem 2.7 より $\partial W_F/\partial t_{j\ell} = 0$.

(4) $\Longrightarrow$ (3). 条件 (4) と Theorem 2.7 より $B_{\ell,-} = 0$ であるから, $L_F^\ell \in \mathcal{D}_R$ である. □

Definition 2.9 (ℓ-KdV hierarchy) ℓ-reduction の条件を KP hierarchy に課したものを ℓ-KdV hierarchy と呼ぶ. 特に $\ell = 2$ のとき単に KdV hierarchy と呼ぶ. $\mathrm{KdV}_\emptyset^\ell(R)$ を次のように定める:

$$\mathrm{KdV}_\emptyset^\ell(R) = \{\, F \in \mathrm{KP}_\emptyset(R) \mid F \text{ は } \ell\text{-reduction の条件を満たしている} \,\} \quad \square$$

Theorem 2.7 および Lemma 2.8 から次の結果がただちに得らえる.

Corollary 2.10 (ℓ-KdV hierarchy) 任意の $F \in \mathrm{KdV}_\emptyset^\ell(R)$ に対して, $\lambda = w^{-\ell}$, $P = P_F = L_F^\ell$, $\Psi = \Psi_F$, etc. は Theorem 2.7 の結果の他に以下を満たしている:

1. P は次の形の微分作用素である:

$$P = \partial^\ell + p_2\partial^{\ell-2} + p_3\partial^{\ell-3} + \cdots + p_\ell, \qquad p_i \in R.$$

2. $P\Psi = \lambda\Psi$.
3. $\partial P/\partial t_i = [B_{i,\pm}, P] \quad (i = 1, 2, \dots)$. □

Definition 2.11 以下の条件を満たす $\Psi \in R((w))\,e^\xi$ の全体の集合を $\mathrm{WF}_\emptyset^{\mathrm{KP}}(R)$ と表わす:

(a) $\Psi = (1 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots)w^{-1}\,e^\xi \in (1 + R[[w]])w^{-1}\,e^\xi$.
(b) ある $B_i \in \mathcal{D}_R = R[\partial]$ $(i = 1, 2, \dots)$ が存在して, $\partial\Psi/\partial t_i = B_i\Psi$.

Lemma 2.6 より, このような B_i は存在すれば一意的に定まる. WF は wave functions の略である. □

Theorem 2.12 任意の $F \in \mathrm{KP}_\emptyset(R)$ に対して, $\Psi_F \in \mathrm{WF}_\emptyset^{\mathrm{KP}}(R)$ である. 逆に, 任意の $\Psi \in \mathrm{WF}_\emptyset^{\mathrm{KP}}(R)$ に対して, $H_R = R((w))$ の R-submodule F_Ψ を $F_\Psi\,e^\xi = \mathcal{D}_R\Psi$ という条件によって定めると, $F_\Psi \in \mathrm{KP}_\emptyset(R)$ である. これによって, $F \in \mathrm{KP}_\emptyset(R)$ と $\Psi \in \mathrm{WF}_\emptyset^{\mathrm{KP}}(R)$ は一対一に対応している:

$$\mathrm{KP}_\emptyset(R) \cong \mathrm{WF}_\emptyset^{\mathrm{KP}}(R).$$

Proof. Ψ_F の定義および Thoerem 2.7 より, $F \in \mathrm{KP}_\emptyset(R)$ に対して $\Psi_F \in \mathrm{WF}_\emptyset^{\mathrm{KP}}(R)$ である.

任意に $\Psi \in \mathrm{WF}_{\emptyset}^{\mathrm{KP}}(R)$ を取る．このとき, $\partial^i\Psi \in w^{-i-1}(1+R[[w]])\,e^{\xi}$ であるから, $\partial^i\Psi$ ($i=0,1,2,\dots$) は $\mathcal{D}_R\Psi$ の R-free basis をなす．よって, F_Ψ は条件 **(G)** を満たしている．任意の $A \in \mathcal{D}_R$ に対して,

$$\frac{\partial}{\partial t_i}(A\Psi) = \frac{\partial A}{\partial t_i}\Psi + AB_i\Psi \in \mathcal{D}_R\Psi.$$

よって, $\mathcal{D}_R\Psi$ が条件 **(KP')** を満たしているので, F_Ψ は条件 **(KP)** を満たしている． □

Definition 2.13 各 $\ell = 2,3,\dots$ に対して, 集合 $\mathrm{WF}_{\emptyset}^{\mathrm{KdV},\ell}(R)$ を次のように定める:

$$\mathrm{WF}_{\emptyset}^{\mathrm{KdV},\ell}(R) = \{\, \Psi \in \mathrm{WF}_{\emptyset}^{\mathrm{KP}}(R) \mid w^{-\ell}\Psi \in \mathcal{D}_R\Psi \,\}. \quad \square$$

Corollary 2.10 と Theorem 2.12 から次の結果がただちに得られる．

Corollary 2.14 $\mathrm{KdV}_{\emptyset}^{\ell}(R) \cong \mathrm{WF}_{\emptyset}^{\mathrm{KdV},\ell}(R)$. □

3 The ℓ-Calogero-Bogoyavlensky-Schiff hierarchy

Section 2 の記号と仮定をそのまま引き継ぐ．

この section では, 整域 R には $\partial/\partial t_i$ の他に derivations $\partial/\partial y$, $\partial/\partial s_j$ ($j=1,2,\dots$) が作用しており, それらは互いに全て可換であるとする．さらに, ある $y \in R$ で $\partial y/\partial y = 1$, $\partial y/\partial t_i = 0$, $\partial y/\partial s_j = 0$ を満たすものが存在すると仮定する．$\partial_y = \partial/\partial y$ と書く．

$R((w))\,e^{\xi}$ に $\partial/\partial y$, $\partial/\partial s_j$ の作用を

$$\frac{\partial}{\partial y}(f\,e^{\xi}) = \frac{\partial f}{\partial y}\,e^{\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial s_j}(f\,e^{\xi}) = \frac{\partial f}{\partial s_j}\,e^{\xi} \qquad \bigl(f \in R((w))\bigr)$$

と定める．直観的には $\xi = t_1w^{-1} + t_2w^{-2} + \cdots$ なのであった．上の定義は $\partial/\partial y$ と $\partial/\partial s_j$ が t_i と w に自明に作用することを意味している．

Definition 3.1 (generic ℓ-CBS flow) Definition 2.1 の条件 **(G)**, **(KP)** の他に次の条件 **(ℓ-CBS)** を満たす $H_R = R((w))$ の R-submdules F の全体の集合を $\mathrm{CBS}_{\emptyset}^{\ell}(R)$ と書くことにする:

(ℓ-CBS) F は次を満たしている:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_j} + w^{-j\ell}\frac{\partial}{\partial y}\right)F \subset F \qquad (j=1,2,\dots).$$

この条件と条件 **(KP)** を合わせたものを ℓ-Calogero-Bogoyavlensky-Schiff flow (ℓ-CBS) の条件と呼ぶ．さらに, 条件 **(G)** を追加したものを generic ℓ-CBS flow の条件と呼ぶ． □

以下, $\ell = 2,3,\dots$ を任意に固定し, $F \in \mathrm{CBS}_{\emptyset}^{\ell}(R)$ と仮定する．

Lemma 3.2 $F \in \mathrm{CBS}_{\emptyset}^{\ell}(R)$ は ℓ-reduction の条件を満たしている．

Proof. $y \in R$ より $yF \subset F$ であることおよび条件 **(ℓ-CBS)** より,

$$F \supset \left[\frac{\partial}{\partial s_j} + w^{-j\ell}\frac{\partial}{\partial y},\ y\right]F = w^{-j\ell}F. \quad \square$$

Remark 3.3 条件 **(KP)** と同値な条件 **(KP')** の条件 **(ℓ-CBS)** に対する類似物を考えよう. もしも,

$$\eta = s_1 w^{-\ell} + s_2 w^{2\ell} + \cdots$$

が意味を持ち, F に属する函数に含まれる y に $y + \eta$ を代入することが許されるならば, 条件 **(ℓ-CBS)** は次の条件と同値である:

(ℓ-CBS') BA_F の属する全て函数に含まれる y に $y + \eta$ を代入して得られる函数空間は $\partial / \partial s_j$ の作用で閉じている:

$$\frac{\partial}{\partial s_j} \left(\mathrm{BA}_F \left|_{y \mapsto y+\eta} \right. \right) \subset \mathrm{BA}_F \left|_{y \mapsto y+\eta} \right. \qquad (j = 1, 2, \dots).$$

この同値性は ℓ-CBS flow を代数幾何的に解釈するためのキーポイントになる. □

Section 2 で定義した Ψ_F, W_F, L_F の他に擬微分作用素 λ, P_F, Q_F, $C_{F,j,\pm}$ $(j = 1, 2, \dots)$ を次のように定める:

$$\lambda = w^{-\ell}, \qquad P_F = L_F^{\ell}, \qquad Q_F = \frac{\partial W_F}{\partial y} W_F^{-1},$$
$$C_{F,j,\pm} = \left(Q_F P_F^j \right)_\pm = \left(\frac{\partial W_F}{\partial y} \partial^{j\ell} W^{-1} \right)_\pm .$$

Lemma 3.2 より, $P_F = B_{F,\ell,+}$ であるから, 特に P_F は ℓ 階の微分作用素である. 定義より, $C_{F,j,+}$ は $j\ell - 1$ 階の微分作用素であり, $Q_F \in \mathcal{E}_{R,-}$ である.

Theorem 3.4 (ℓ-CBS hierarchy) 任意の $F \in \mathrm{CBS}_{\emptyset}^{\ell}(R)$ に対する $\Psi = \Psi_F$, $W = W_F$, $B_{i,\pm} = B_{F,i,\pm}$, $P = P_F$, $Q = Q_F$, $C_{j,\pm} = C_{F,j,\pm}$ について, 以下が成立している:

1. Linear equations:

$$P\Psi = \lambda\Psi,$$
$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = Q\Psi,$$
$$\frac{\partial \Psi}{\partial t_i} = B_{i,+}\Psi \qquad (i = 1, 2, \dots),$$
$$\frac{\partial \Psi}{\partial s_j} = C_{j,-}\Psi = C_{j,+}\Psi - \lambda^j \frac{\partial \Psi}{\partial y} \qquad (j = 1, 2, \dots).$$

2. Sato-Wilson equations:

$$\frac{\partial W}{\partial y} = QW,$$
$$\frac{\partial W}{\partial t_i} = B_{i,-}W = B_{i,+}W - W\partial^i \qquad (i = 1, 2, \dots),$$
$$\frac{\partial W}{\partial s_j} = C_{j,-}W = C_{j,+}W - \frac{\partial W}{\partial y}\partial^{j\ell} \qquad (j = 1, 2, \dots).$$

3. Lax equations:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial P}{\partial y} = [Q, P], \\
&\frac{\partial P}{\partial t_i} = [B_{i,\pm}, P] \qquad (i = 1, 2, \dots), \\
&\frac{\partial P}{\partial s_j} = [C_{j,-}, P] = [C_{j,+}, P] - \frac{\partial P}{\partial y} P^j \qquad (j = 1, 2, \dots).
\end{aligned}
$$

4. Zero curvature equations: X, Y は

$$
P, \quad \frac{\partial}{\partial y} - Q, \quad \frac{\partial}{\partial t_i} - B_{i,\pm} \quad (i = 1, 2, \dots), \quad \frac{\partial}{\partial s_j} - C_{i,-} \quad (j = 1, 2, \dots)
$$

のどれかであるとする. このとき,

$$
[X, Y] = 0, \qquad \left[\frac{\partial}{\partial s_j} - C_{j,+},\ X \right] = -\frac{\partial X}{\partial y} P^j \quad (j = 1, 2, \dots).
$$

以上の方程式と Theorem 2.7 の方程式を合わせたものと, ℓ-Calogero-Bogoyavlensky-Schiff hierarchy (ℓ-CBS hierarchy) と呼ぶ. その compatibilty condition として Theorem 2.7 に述べたもの以外の zero curvature equations も成立している.

Proof. Theorem 2.7 で示されてない等式だけを示せばよい. $v = w^{-1} e^{\xi}$ と置く. このとき, $\partial v / \partial s_j = \partial v / \partial y = 0$, $\Psi = W v$ が成立している. よって, $\partial W / \partial y = Q W$ より, $\partial \Psi / \partial y = Q \Psi$ が出る. Theorem 2.7 より, $L = L_F = W \partial W^{-1}$ について $L \Psi = w^{-1} \Psi$ が成立するので,

$$
P\Psi = L^{\ell} \Psi = w^{-\ell} \Psi = \lambda \Psi.
$$

条件 (**ℓ-CBS**) と Lemma 2.5 より, $\partial \Psi / \partial s_j + \lambda^j \partial \Psi / \partial y = C_j \Psi = C_j W v$ をみたす $C_j \in \mathcal{D}_R$ が唯一存在する. 一方,

$$
\frac{\partial \Psi}{\partial s_j} + \lambda^j \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \left(\frac{\partial W}{\partial s_j} + \frac{\partial W}{\partial y} \partial^{j\ell} \right) v.
$$

よって, Lemma 2.6 より, $\partial W / \partial s_j + \partial W / \partial y \, \partial^{j\ell} = C_j W$ であるから,

$$
\frac{\partial W}{\partial y} \partial^{j\ell} W^{-1} = C_j - \frac{\partial W}{\partial s_j} W^{-1}.
$$

この式の右辺の第一項は $\mathcal{E}_{R,+} = \mathcal{D}_R$ に含まれ, 第二項は $\mathcal{E}_{R,-}$ に含まれる. よって,

$$
C_j = \left(\frac{\partial W}{\partial y} \partial^{j\ell} W^{-1} \right)_+ = C_{j,+}, \qquad \frac{\partial W}{\partial s_j} W^{-1} = \left(\frac{\partial W}{\partial y} \partial^{j\ell} W^{-1} \right)_- = C_{j,-}.
$$

この後者の式より, $\partial W / \partial s_j = C_{j,-} W$, $\partial \Psi / \partial s_j = C_{j,-} \Psi$ が出る. そして,

$$
C_{j,-} W = \left(C_{j,+} - \frac{\partial W}{\partial y} \partial^{j\ell} W^{-1} \right) W = C_{j,+} W - \frac{\partial W}{\partial y} \partial^{j\ell}.
$$

$\partial L/\partial t_i = [B_{i,\pm}, L]$ と $P = L^\ell$ より, $\partial P/\partial t_i = [B_{i,\pm}, P]$ が出る. $P = W\partial^\ell W^{-1}$ と $\partial W/\partial s_j = C_{j,-}W$ より, $\partial P/\partial s_j = [C_{j,-}, P]$ が出る. $P = W\partial^\ell W^{-1}$ と $\partial W/\partial y = QW$ より, $\partial P/\partial y = [Q, P]$ が出る. よって,

$$[C_{j,-}, P] = [C_{j,+} - QP^j, P] = [C_{j,+}, P] - [Q, P]P^j = [C_{j,+}, P] - \frac{\partial P}{\partial y}P^j.$$

以上によって, linear equations, Sato-Wilson equations, Lax equations が全て示された.

Linear equations の compatibility より, $B_{i,\pm}$ の $\pm$ を $+$ に制限すると, $[X, Y] = 0$ が成立することがわかる. Sato-Wilson equations の compatibility より, X, Y が P 以外であるとし, $B_{i,\pm}$ の $\pm$ を $-$ に制限すると, $[X, Y] = 0$ が成立することがわかる. Lax equations と $X = P$ と他の Y の可換性は同値である. $\partial/\partial t_i - B_{i,+}$ と $\partial/\partial t_j - B_{t_j,-}$ の可換性は Theorem 2.7 ですでに示されている. $[\partial/\partial y - Q, X] = 0$ より $[Q, X] = \partial X/\partial y$ であり, $[P, X] = 0$ であるから,

$$[QP^j, X] = [Q, X]P^j = \frac{\partial X}{\partial y}P^j.$$

この等式を $[\partial/\partial s_j - C_{j,-},\ X] = 0$ から辺々引くと,

$$-\frac{\partial X}{\partial y}P^j = \left[\frac{\partial}{\partial s_j} - C_{j,-} - QP^j,\ X\right] = \left[\frac{\partial}{\partial s_j} - C_{j,+},\ X\right]. \quad \square$$

Remark 3.5 $P \in \mathcal{D}_R$ が $P = \partial^\ell + u_2\partial^{\ell-2} + \cdots + u_\ell$ の形の ℓ 階の微分作用素であり, $Q \in \mathcal{E}_{R,-}$ であるとし, $C_{j,\pm} = (QP^j)_\pm$ と置く. このとき, $\partial P/\partial y = [Q, P]$ が成立しているならば,

$$[C_{j,-}, P] = [C_{j,+}, P] - \frac{\partial P}{\partial y}P^j$$

は高々 $\ell - 2$ 階の微分作用素になる. 実際, 左辺は高々 $\ell - 2$ 階の擬微分作用素であり, 右辺は微分作用素である. $\square$

Remark 3.6 $\tilde{\mathcal{D}} = R[\partial_x, \partial_y]$ は $\partial_x = \partial/\partial t_1$ だけではなく, $\partial_y = \partial/\partial y$ をも含む R 係数の線型偏微分作用素環であるとし, $\tilde{\mathcal{E}} = R[\partial_y]((\partial_x^{-1}))$ は ∂_y を含む擬微分作用素環であるとする. 自然に $\tilde{\mathcal{D}}$ は $\tilde{\mathcal{E}}$ の部分環とみなせる. $\tilde{\mathcal{E}}_+ = \tilde{\mathcal{D}}$, $\tilde{\mathcal{E}}_- = R[\partial_y][[\partial_x^{-1}]]\partial_x^{-1}$ と置くと, $\tilde{\mathcal{E}}_\pm$ は交換子に関して $\tilde{\mathcal{E}}$ の Lie 部分環をなし, $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}_+ \oplus \tilde{\mathcal{E}}_-$ (線型直和) が成立している. $A \in \tilde{\mathcal{E}}$ に対して, $A_\pm \in \tilde{\mathcal{E}}_\pm$ を $A = A_+ - A_-$ という条件によって定める.

Theorem 3.4 の記号のもとで, $\hat{Q}$ を次のように定める:

$$\hat{Q} = \partial_y - Q = W\partial_y W^{-1} \qquad (\tilde{\mathcal{E}} \text{ の中の積}).$$

このとき, $P = W\partial^\ell W^{-1} \in \mathcal{D}$ なので,

$$\begin{aligned}
(W\partial_y\partial_x^{j\ell}W^{-1})_- &= (\hat{Q}P^j)_- = (\partial_y P^j - QP^j)_- = -C_{j,-}, \\
(W\partial_y\partial_x^{j\ell}W^{-1})_+ &= (\hat{Q}P^j)_+ = (\partial_y P^j - QP^j)_+ = \partial_y P^j - C_{j,+}.
\end{aligned}$$

よって, Theorem 3.4 の Sato-Wilson equations は次の様に統一的な形式に書き直せる:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial t_i} &= (L^i)_- W \quad = (L^i)_+ W - W\partial^i & &(i = 1, 2, \dots), \\
-\frac{\partial W}{\partial s_j} &= (\hat{Q}P^j)_- W = (\hat{Q}P^j)_+ W - W\partial_y\partial_x^{j\ell} & &(j = 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

ここで, $L = W\partial_x W^{-1}$, $\hat{Q} = W\partial_y W^{-1}$, $P = L^\ell \in \mathcal{D}$ である[1]. □

Remark 3.7 Theorem 3.4 における ℓ-CBS hierarchy は [3] における ℓ-Bogoyavlensky hierarchy と同じものである. □

Definition 3.8 以下の条件を満たす $\Psi \in R((w))\,e^\xi$ の全体の集合を $\mathrm{WF}_\emptyset^{\mathrm{CBS},\ell}(R)$ と表わす:

(a) $\Psi = (1 + a_1 w + a_2 w^2 + \cdots)w^{-1}\,e^\xi \in (w^{-1} + R[[w]])\,e^\xi$.
(b) ある $B_i \in \mathcal{D}_R$ $(j = 1, 2, \dots)$ が存在して, $\partial\Psi/\partial t_i = B_i\Psi$.
(c) ある $P \in \mathcal{D}_R$ が存在して, $w^{-\ell}\Psi = P\Psi$.
(d) ある $C_j \in \mathcal{D}_R$ $(j = 1, 2, \dots)$ が存在して, $\partial\Psi/\partial s_j = C_j\Psi - w^{-j\ell}\partial\Psi/\partial y$.

Lemma 2.6 より, このような B_i, P, C_j は存在すれば Ψ に対して一意的に定まる. □

Theorem 3.9 任意の $F \in \mathrm{CBS}_\emptyset^\ell(R)$ に対して, $\Psi_F \in \mathrm{WF}_\emptyset^{\mathrm{CBS},\ell}(R)$ である. 逆に, 任意の $\Psi \in \mathrm{WF}_\emptyset^{\mathrm{CBS},\ell}(R)$ に対して, $H_R = R((w))$ の R-submodule F_Ψ を $F_\Psi\,e^\xi = \mathcal{D}_R\Psi$ という条件によって定めると, $F_\Psi \in \mathrm{CBS}_\emptyset^\ell(R)$ である. これによって, $F \in \mathrm{CBS}_\emptyset^\ell(R)$ と $\Psi \in \mathrm{WF}_\emptyset^{\mathrm{CBS},\ell}(R)$ は一対一に対応している:

$$\mathrm{CBS}_\emptyset^\ell(R) \cong \mathrm{WF}_\emptyset^{\mathrm{CBS},\ell}(R).$$

Proof. Theorem 3.4 と Corollary 2.14 および条件 (**ℓ-CBS**) と条件 (**ℓ-CBS'**) の同値性より, 任意の $\Psi \in \mathrm{WF}_\emptyset^{\mathrm{CBS},\ell}(R)$ に対して, $F_\Psi\,e^\xi = \mathcal{D}_R\Psi$ が $\partial/\partial s_j + w^{-j\ell}\partial/\partial y$ の作用で閉じていることを示せば十分である. しかし, 任意の $P \in \mathcal{D}_R$ に対して,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial s_j} + w^{-j\ell}\frac{\partial}{\partial y}\right)(P\Psi) &= \left(\frac{\partial P}{\partial s_j} + w^{-j\ell}\frac{\partial P}{\partial y}\right)\Psi + P\left(\frac{\partial}{\partial s_j} + w^{-j\ell}\frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi \\
&= \frac{\partial P}{\partial s_j}\Psi + \frac{\partial P}{\partial y}P^j\Psi + PC_j\Psi \in \mathcal{D}_R\Psi.
\end{aligned}$$

ここで, 1 行目の右辺から 2 行目への変形には Definition 3.8 の条件 (c),(d) を使った. □

4 Line bundle の変形と KP hierarchy

この section では, 固定された complex curve 上の line bundles のある種の変形から, KP hierarchy の Baker-Akhiezer functions を構成する方法を説明する. この section における構成は本質的に D. Mumford の [5] の Section 2 の再定式化である.

この section において, 幾何学的データ $Z = (X, P, w, L, \iota)$ は以下のようなものだとする:

- X は genus g の smooth compact complex analytic curve (i.e. compact Riemann surface) である.
- P は X の点である.

[1] $y \mapsto -y$ (i.e. $\partial_y \mapsto -\partial_y$) と置換すれば Sato-Wilson equations における $-\partial W/\partial s_j = (\hat{Q}P^j)_- W$ の左辺の負号を消すことができる. おそらく負号を消すようにした方が良いのだが, 書き直すのが面倒なのでそのままにしておく.

- w は P を含む X 内の開円板 U 上の座標で $w(P)=0$ を満たすものであり, 正則同型 $w : U \xrightarrow{\sim} U_R$ を定める. ここで, $R>0$, $U_R = \left\{ w \in \mathbb{C} \;\middle|\; |w| < R \right\}$ である.
- L は X 上の degree $g-1$ の generic な holomorphic line bundle である. ここで, L が generic であるとは $H^p(X,L)=0$ $(p=1,2)$ が成立していることである. このような L の同型類の全体は $\mathrm{Pic}^{g-1}(X)$ の affine open subset をなす[2].
- ι は L の U 上の trivialization である. ι は層の同型 $\iota : L|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U$ を定める[3].

さらに, $\dot{X}$, $\dot{U}$, $\dot{U}_R$ を次のように定める:

$$\dot{X} = X - P, \qquad \dot{U} = \dot{X} \cap U = U - P, \qquad \dot{U}_R = U_R - \{0\}.$$

X は $\dot{X}$ と U_R を $w : \dot{U} \xrightarrow{\sim} \dot{U}_R$ で貼り合わせることによって構成されているとみなせる. 以下, $\dot{U} = \dot{U}_R$ とみなす. 自然に $w^{-1}\mathbb{C}[w^{-1}] \subset \mathcal{O}_{\dot{U}}$ とみなせる.

Lemma 4.1 X 上の degree $g-1$ の line bundle L について次の 2 条件は互いに同値である:

(1) L は generic である.
(2) $\phi \in H^0(X, L(*P))$ に対して, $\iota(\phi) \in H^0(U, \mathcal{O}_U(*P))$ の極部分 $\iota_{\mathrm{pole}}(\phi) \in w^{-1}\mathbb{C}[w^{-1}]$ を対応させる写像は同型写像を定める:

$$\iota_{\mathrm{pole}} : H^0(X, L(*P)) \xrightarrow{\sim} w^{-1}\mathbb{C}[w^{-1}].$$

この lemma の条件 (2) と Definition 2.1 の条件 **(G)** を比較せよ. □

Proof. 層のコホモロジー論より, L の U 上での trivialization が定める自然な写像

$$H^0(X, L(*P)) \to H^0(U, \mathcal{O}_U(*P))/H^0(U, \mathcal{O}_U) \cong w^{-1}\mathbb{C}[w^{-1}]$$

の kernel と cokernel はそれぞれ $H^0(X,L)$ と $H^1(X,L)$ に一致する. よって, L が generic であることと上の写像が同型であることは同値である. □

4.1　曲線上の line bundle の変形

Line bundle L はその $\dot{X}$ 上への制限 $L|_{\dot{X}}$ と開円板 U 上の trivial line bundle $\mathcal{O}_U$ を L の U 上での trivialization から定まる同型 $\iota_{\dot{U}} : L|_{\dot{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\dot{U}}$ によって貼り合わせることによって構成されているとみなせる.

埋め込み $\mathbb{C}^N \hookrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ を $(a_1, \dots, a_N) \mapsto (a_1, \dots, a_N, 0)$ によって定め, $\mathbb{C}^N$ の inductive limit を $\mathbb{C}^\infty$ と書く:

$$\mathbb{C}^\infty = \operatorname*{ind\,lim}_{N\to\infty} \mathbb{C}^N = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathbb{C}^N.$$

ただし, $\mathbb{C}^\infty$ には $\mathbb{C}^N$ の通常の位相から誘導される位相を入れておく. すなわち, $\mathbb{C}^\infty$ の部分集合 Ω が open であるための必要十分条件は, 任意の N について $\Omega \cap \mathbb{C}^N$ が $\mathbb{C}^N$ で open になることである.

[2] $\mathrm{Pic}^d(X)$ は X 上の degree d の line bundles の同型類全体のなす Picard variety である.
[3] $\mathcal{O}_{U_R}$ は U_R 上の正則函数の層である.

$\mathbb{C}^\infty$ と 複素多様体 M の直積 $\mathcal{M} = \mathbb{C}^\infty \times M$ の開集合 Ω 上の函数 f が holomorphic (resp. meromorphic) であるとは任意の N について f の $\Omega \cap (\mathbb{C}^N \times M)$ 上への制限が通常の意味で holomorphic (resp. moromorphic) になることであると定める.

D は M の divisor であるとし, $\mathcal{D} = \mathbb{C}^\infty \times D \subset \mathcal{M}$ と置く. $\mathcal{D}$ に極を持つ Ω 上の meromorphic function f の $\mathcal{D}$ における極位数とは f の $\Omega \cap (\mathbb{C}^N \times M)$ 上への制限の $\mathcal{D}$ における極位数の $N \to \infty$ における極限のことである.

例えば, $(t; w) = (t_1, t_2, \dots ; w) \in \mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\times$ の函数 ξ を

$$\xi(t, w) = t_1 w^{-1} + t_2 w^{-2} + \cdots \qquad (\text{各 } t \text{ ごとに有限和})$$

と定めると, ξ は $\mathbb{C}^\infty \times \{0\}$ のみに極を持つ $\mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}$ 上の meromorphic function である. しかし, ξ は $\mathbb{C}^\infty \times \{0\}$ に沿って有限の極位数を持たない. 有限次元の場合と違って無限次元の場合はこのようなことが起こり得るので注意せよ.

$\mathcal{D}$ だけに高々極位数 n の極を持つ $\mathcal{M}$ 上の meromorphic functions のなす sheaf を $\mathcal{O}_\mathcal{M}(n\mathcal{D})$ と書き, $\mathcal{D}$ だけに高々有限位数の極を持つ $\mathcal{M}$ 上の meromorphic functions のなす sheaf を $\mathcal{O}_\mathcal{M}(*\mathcal{D}) = \bigcup_n \mathcal{O}_\mathcal{M}(n\mathcal{D})$ と書く.

パラメータ $t = (t_1, t_2, \dots) \in \mathbb{C}^\infty$ で貼り合わせ写像 $\iota_{\dot{U}}$ を変形することを考えよう. 各 $t \in \mathbb{C}^\infty$ に対して, $\dot{U}$ 上の正則函数 ξ_t を次のように定める:

$$\xi_t(w) = t_1 w^{-1} + t_2 w^{-2} + \cdots \in w^{-1}\mathbb{C}[w^{-1}].$$

$L|_{\dot{X}}$ と $\mathcal{O}_U$ の新たな貼り合わせ写像 $\iota_t : L|_{\dot{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\dot{U}}$ を次のように定める:

$$\iota_t(\phi) = \iota_{\dot{U}}(\phi)\, e^{-\xi_t} \qquad \text{for } \phi \in L|_{\dot{U}}.$$

我々は analytic の場合を扱っているので, $\mathcal{O}_{\dot{U}}$ に含まれる函数は点 P に不確定特異点を持っていても構わないことに注意せよ. この ι_t の定める X 上の line bundle を L_t と書くことにする. 特に $L_0 = L$ であり, 他の L_t は L の変形である. 構成の仕方より, L_t の degree は L のそれに等しい.

X 上の trivial line bundle $\mathcal{O}_X$ の $t \in \mathbb{C}^\infty$ に対応する変形を $\mathcal{O}_t$ と書くことにすると, $L_t = L \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_t$ が成立することがすぐにわかる. さらに, t を $\mathcal{O}_t$ の同型類 $[\mathcal{O}_t]$ に対応させる写像は $\mathbb{C}^\infty$ から $\mathrm{Pic}^0(X)$ への Abel 群の全射準同型である.

任意の $t \in \mathbb{C}^\infty$ に対して, $\xi_t \in H^0(\dot{U}, \mathcal{O}_X)$ と $e^{\xi_t} \in H^0(\dot{U}, \mathcal{O}_X^\times)$ はそれぞれ X の開被覆 $\{\dot{X}, U\}$ に関する $\mathcal{O}_X$ 係数と $\mathcal{O}_X^\times$ 係数の 1-cocycles を定める. これによって, Abel 群の準同型写像 $f : \mathbb{C}^\infty \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ と $g : \mathbb{C}^\infty \to H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$ が定まる. GAGA より f は全射である. $\mathbb{Z}_X \to \mathcal{O}_X$, $n \mapsto 2\pi i n$ および $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^\times$, $f \mapsto e^f$ の定める short exact sequence

$$0 \to \mathbb{Z}_X \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^\times \to 0$$

が誘導する long exact sequence の一部として次の exact sequence が得られる:

$$0 \to H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \to \mathbb{Z} = H^2(X, \mathbb{Z}) \to 0.$$

$\mathrm{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X^\times)$, $\mathrm{Pic}^0(X) = \mathrm{Ker}(H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) \to \mathbb{Z})$ であるから, 全射準同型 $h : H^1(X, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{Pic}^0(X)$ が定まる. 構成の仕方より, $g = h \circ f$ であり, g は t を $[\mathcal{O}_t]$ に対応させる写像に等しい. このことより, $\mathbb{C}^\infty \to \mathrm{Pic}^0(X)$, $t \mapsto [\mathcal{O}_t]$ が全射準同型写像であることがわかる.

$\mathbb{C}^\infty$ の部分集合 T を次のように定める:

$$T = \{\, t \in \mathbb{C}^\infty \mid L_t \text{ は generic} \,\}.$$

最初に仮定したように, L は degree $g-1$ の generic な line bundle なので, T は $\mathbb{C}^\infty$ の原点を含む open dense subset をなす.

Definition 4.2 各 $t \in \mathbb{C}^\infty$ に対して, U 上の有理型函数の空間 $F_Z(t)$ を次のように定める:

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= \{\, \iota_t(\phi|_{\dot U}) \mid \phi \in H^0(X, L_t(*P)) \,\} \\ &= \{\, f \in H^0(U, \mathcal{O}_U(*P)) \mid \\ &\qquad \text{ある } \phi \in H^0(\dot X, L) \text{ が存在して } \iota_t(\phi|_{\dot U}) = f \,\} \\ &= \{\, f \in H^0(U, \mathcal{O}_U(*P)) \mid \\ &\qquad \text{ある } \phi \in H^0(\dot X, L) \text{ が存在して } \iota(\phi|_{\dot U}) = f\, e^{\xi_t} \,\}. \end{aligned}$$

さらに, $\dot U$ 上の正則函数の空間 $\mathrm{BA}_Z(t)$ を次のように定める:

$$\mathrm{BA}_Z(t) = F_Z(t)\, e^{\xi_t}.$$

各 $f\, e^{\xi_t} \in \mathrm{BA}_Z(t)$ に対して, $\iota(\phi|_{\dot U}) = f\, e^{\xi_t}$ を満たす $\phi \in H^0(\dot X, L)$ を対応させることによって, すべての $\mathrm{BA}_Z(t)$ は同時に t によらない同一の空間 $H^0(\dot X, L)$ の部分空間とみなせる. □

$\mathrm{BA}_Z(t)$ の定義より, $\phi \in H^0(X, L_t(*P))$ に $\iota(\phi|_{\dot U}) \in \mathrm{BA}_Z(t)$ を対応させることによって, $H^0(X, L_t(*P))$ と $\mathrm{BA}_Z(t)$ は自然に同一視される.

Laurent 展開によって $F_Z(t)$ は $H = \mathbb{C}((w))$ の部分空間とみなせる. そのとき, 自然な同型 $H^p(X, L_t) \cong H^p(F_Z(t))$ が存在することに注意すれば, 任意の $t \in \mathbb{C}^\infty$ に対して $F_Z(t) \in \mathrm{Gr}^0$ であり, $t \in T$ ならば $F_Z(t) \in \mathrm{Gr}^0_\emptyset$ である.

次の subsection の目標は $\mathbb{C}^\infty$ 上で $F_Z(t)$ が KP flow の条件を満たしていることを示すことである.

4.2 Baker-Akhiezer sheaf の構成

前 subsection の記号をそのまま引き継ぐ. 前 subsection では各 $t \in \mathbb{C}^\infty$ に対して, 函数空間 $\mathrm{BA}_Z(t) \cong H^0(X, L_t(*P)) \subset H^0(\dot X, L)$ を定義した. この section では t を動かし, $\mathbb{C}^\infty$ 上の層 $\mathcal{F}_Z$ と $\mathcal{BA}_Z$ で各 $t \in \mathbb{C}^\infty$ における fibers がそれぞれ $F_Z(t)$, $\mathrm{BA}_Z(t)$ になるものを構成する.

$\mathbb{C}^\infty \times U$ 上の $\mathbb{C}^\infty \times P$ のみに極を持つ有理型函数 $\xi = \xi(t, w)$ を

$$\xi(t, w) = t_1 w^{-1} + t_2 w^{-2} + \cdots \quad (\text{finite sum})$$

と定める. このとき, e^ξ は $\mathbb{C}^\infty \times \dot U$ 上の正則函数である. ただし, ξ は $\mathbb{C}^\infty \times P$ に極を持つが, e^ξ は不確定特異点を持つ.

$\mathbb{C}^\infty \times X$ 上の line bundle $\mathcal{L}$ を構成するための準備として次のような記号を用意する:

$$\begin{aligned} &\mathcal{X} = \mathbb{C}^\infty \times X, \quad \mathcal{U} = \mathbb{C}^\infty \times U, \quad \mathcal{U}_R = \mathbb{C}^\infty \times U_R, \\ &\dot{\mathcal{X}} = \mathbb{C}^\infty \times \dot X, \quad \dot{\mathcal{U}} = \mathbb{C}^\infty \times \dot U, \quad \dot{\mathcal{U}}_R = \mathbb{C}^\infty \times \dot U_R. \end{aligned}$$

さらに, $\mathcal{X}$, etc. から $\mathbb{C}^\infty$ への自然な projections を $\pi_{\mathcal{X}/\mathbb{C}^\infty}$, etc. と書くことにし, $\mathcal{X}$, etc. から X, etc. への自然な projections を $\pi_{\mathcal{X}/X}$, etc. と書くことにする. X, etc. と T との直積を $\mathcal{X}_T = T \times X$, etc. と書き, それらから T への自然な projections を $\pi_{\mathcal{X}_T/T}$, etc. と書くことにする.

$\mathcal{X}$ は $\dot{\mathcal{X}}$ と $\mathcal{U}_R$ を正則同型 $\mathrm{id} \times w : \dot{\mathcal{U}} \xrightarrow{\sim} \dot{\mathcal{U}}_R$ によって貼り合わせることによって構成されているとみなせる. 以下, $\dot{\mathcal{U}} = \dot{\mathcal{U}}_R$ とみなす.

$\mathcal{X}$ 上の line bundle $\mathcal{L}$ は $\dot{\mathcal{X}}$ 上の line bundle

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes L|_{\dot{X}} = \mathcal{O}_{\dot{\mathcal{X}}} \otimes_{\pi^{-1}_{\dot{\mathcal{X}}/\dot{X}}\mathcal{O}_{\dot{X}}} \pi^{-1}_{\dot{\mathcal{X}}/\dot{X}}(L|_{\dot{X}})$$

と $\mathcal{U}$ 上の trivial line bundle $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ を次のように定められた $\iota_{\mathcal{L}} : \mathcal{L}|_{\dot{\mathcal{U}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\dot{\mathcal{U}}}$ によって貼り合わて構成されたものとする:

$$\iota_{\mathcal{L}}(\phi) = (\mathrm{id} \boxtimes \iota)(\phi)\, e^{-\xi} \qquad \text{for } \phi \in \mathcal{L}|_{\dot{\mathcal{U}}}$$

ここで, $e^{-\xi}$ は $(t, w) \in \dot{\mathcal{U}}$ に対して $e^{-\xi(t,w)} \in \mathbb{C}$ を対応させる $\dot{\mathcal{U}}$ 上の正則函数である.

構成の仕方より, 任意の $t \in \mathbb{C}^\infty$ に対して, $\mathcal{L}$ の $X_t := \pi^{-1}_{\mathcal{X}/\mathbb{C}^\infty}(t)$ 上への制限は X_t と X を同一視すれば前 subsection に構成した L_t に一致することがわかる.

Definition 4.3 (Baker-Akhiezer sheaf) $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty}$-module $\mathcal{F}_Z$ を次のように定める:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Z &= \left\{ \iota_{\mathcal{L}}(\phi) \;\middle|\; \phi \in \pi_{\mathcal{X}/\mathbb{C}^\infty,*}\mathcal{L}(*(\mathbb{C}^\infty \times P)) \right\} \\ &= \Big\{ f \in \pi_{\mathcal{U}/\mathbb{C}^\infty,*}\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(*(\mathbb{C}^\infty \times P)) \;\Big|\; \\ &\qquad \text{ある } \phi \in \pi_{\dot{\mathcal{X}}/\mathbb{C}^\infty,*}\big[\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes L|_{\dot{X}}\big] \text{ が存在して } (\mathrm{id} \boxtimes \iota)(\phi) = f\, e^{\xi} \Big\}.\end{aligned}$$

$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty}$-module $\mathcal{BA}_Z$ を次のように定める:

$$\mathcal{BA}_Z = \mathcal{F}_Z\, e^{\xi}.$$

$\mathcal{BA}_Z$ を幾何学的データ Z に付随する **Baker-Ahiezer sheaf** と呼び, $\mathcal{BA}_Z$ の local section のことを Z に付随する **Baker-Akhiezer function** と呼ぶ. 構成の仕方より, $\mathcal{F}_Z$ と $\mathcal{BA}_Z$ の $t \in \mathbb{C}^\infty$ における fibers はそれぞれ前 subsection の $F_Z(t)$ と $\mathrm{BA}_Z(t)$ に一致していることがわかる. □

$\mathbb{C}^\infty$ の open subset Ω において, $f\, e^{\xi} \in H^0(\Omega, \mathcal{BA}_Z)$ に対して $(\mathrm{id} \boxtimes \iota)(\phi) = f\, e^{\xi}$ を満たしている $\phi \in H^0(\Omega \times \dot{X}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes L)$ を対応させることによって, $\mathcal{BA}_Z$ は自然に $\pi_{\dot{\mathcal{X}}/\mathbb{C}^\infty,*}\big[\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes L|_{\dot{X}}\big]$ の $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty}$-submodule とみなせる.

前 section と同様に, $\phi \in \pi_{\mathcal{X}/\mathbb{C}^\infty,*}\big[\mathcal{L}(*(\mathbb{C}^\infty \times P))\big]$ に $(\mathrm{id} \boxtimes \iota)(\phi)$ を対応させる写像が同型$\pi_{\mathcal{X}/\mathbb{C}^\infty,*}\big[\mathcal{L}(*(\mathbb{C}^\infty \times P))\big] \xrightarrow{\sim} \mathcal{BA}_Z$ を定めることがわかる. この同型写像によって, $\pi_{\mathcal{X}/\mathbb{C}^\infty,*}\big[\mathcal{L}(*(\mathbb{C}^\infty \times P))\big]$ と $\mathcal{BA}_Z$ は同一視される.

直観的には, 幾何的データ Z に付随する Baker-Akhiezer function とは $t = (t_1, t_2, \dots) \in \mathbb{C}^\infty$ と $w \in U_R = U$ の函数 $\phi(t; w)$ で, w の函数として L の $\dot{X}$ 上の section に延長可能であり, $w = 0$ において次のように振る舞うもののことである:

$$\phi(t; w) = (a_N(t) w^{-N} + a_{N-1}(t) w^{-N+1} + a_{N-2}(t) w^{-N+2} + \cdots)\, e^{\xi(t,w)}.$$

ここで, $a_i(t)$ は $t = (t_1, t_2, \dots)$ の正則函数である. 通常, Baker-Akhiezer function はこの形で定義される. Baker-Akhiezer function のこのような振る舞いは t_i による偏微分で保たれることに注意せよ.

Remark 4.4 Baker-Akhiezer sheaf の構成は X 上の任意の line bundle L について可能である. L の degree や genericity に関する条件は必要ない. □

4.3 Baker-Akhiezer sheaf の性質

4.3.1 Baker-Akhiezer sheaf への $\partial/\partial t_i$ の作用

$\mathcal{L}|_{\dot{\mathcal{X}}} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes L|_{\dot{X}}$ であるから, $\partial/\partial t_i$ の $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty}$ への自然な作用は, $\partial/\partial t_i$ の $\mathcal{L}|_{\dot{\mathcal{X}}}$ への作用を誘導し, さらに $\pi_{\dot{\mathcal{X}}/\mathbb{C}^\infty,*}(\mathcal{L}|_{\dot{\mathcal{X}}})$ への作用を誘導する.

その作用は $\mathbb{C}^\infty \times \dot{U}$ 上の $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes L|_{\dot{X}}$ の trivialization $\mathrm{id} \boxtimes \iota : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes L|_{\dot{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes \mathcal{O}_{\dot{U}}$ と可換である.

また, Baker-Akhiezer function が満たさなければいけない $\dot{\mathcal{U}}$ 上での振る舞い方の条件は t_i による偏微分で保たれる.

よって, Baker-Akhiezer sheaf $\mathcal{BA}_Z$ は $\partial/\partial t_i$ の作用で閉じている. これで $\mathcal{BA}_Z$ への $\partial/\partial t_i$ の作用が定められた.

このことから, $\mathcal{F}_Z$ は $\partial/\partial t_i + w^{-i}$ の自然な作用で閉じていることがわかる. すなわち, $\mathcal{F}_Z$ は KP flow の条件の sheaf version を満たしている.

4.3.2 Generic KP flow の条件の sheaf 版

Section 4.1 で $\mathbb{C}^\infty$ の open dense subset T を定義したことを思い出そう. $\mathbb{C}^\infty$ 上の層 $\mathcal{F}_Z$, $\mathcal{BA}_Z$ の T 上への制限をそれぞれ $\mathcal{F}_{Z,T}$, $\mathrm{BA}_{Z,T}$ と書くことにする. このとき, Lemma 4.1 より, 次が成立することがわかる.

Lemma 4.5 $\phi \in \mathrm{BA}_{Z,T}$ に対して $\iota_{\mathcal{L}}(\phi) = (\mathrm{id} \boxtimes \iota)(\phi)\, e^{-\xi}$ の極部分を対応させる写像は次の同型を定める:

$$\mathcal{BA}_{Z,T} \xrightarrow{\sim} w^{-1}\mathcal{O}_T[w^{-1}]. \quad \Box$$

この lemma と Section 4.3.1 の結果を合わせると次の定理を得る.

Theorem 4.6 $\mathcal{F}_{Z,T}$ は Definition 2.1 の条件の sheaf version を満たしている:

(G) $\mathcal{F}_{Z,T}$ は次の形の $\mathcal{O}_T$-free basis を持つ:

$$f_i = w^{-i} + \sum_{j \geq 0} a_{ij} w^j \in H^0(T, \mathcal{F}_Z) \qquad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

ここで $a_{ij} \in H^0(T, \mathcal{O}_U)$ である. (このとき, この形の $\mathcal{F}_Z$ の $\mathcal{O}_T$-free basis は一意的である.)

(KP) F は次を満たしている:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_i} + w^{-i}\right) \mathcal{F}_{Z,T} \subset \mathcal{F}_{Z,T} \qquad (i = 1, 2, \dots). \quad \Box$$

この theorem より, Section 2 の議論を $\mathcal{O}_T$, $\mathcal{F}_Z$, $\mathcal{BA}_Z$ に適用可能である. $\partial = \partial_x = \partial/\partial t_1$ と置くと, $\mathcal{O}_T$ 係数の微分作用素環 $\mathcal{D}_T = \mathcal{O}_T[\partial]$ や $\mathcal{O}_T$ 係数の擬微分作用素環

$\mathcal{E}_T = \mathcal{O}_T((\partial^{-1}))$ が定義される．上の theorem の f_1 を用いて, Ψ_Z が次のように定義される:

$$\Psi_Z = f_1\, e^{\xi} \in H^0(T, \mathcal{BA}_Z)$$

Remark 4.7 $\mathcal{BA}_Z$ の定義より, Ψ_Z は以下の条件で一意に特徴付けられる $T \times \dot{U}$ 上の函数である:

(WF1) Ψ_Z は次のように形をしている $(t, w) \in T \times \dot{U}$ の正則函数である:

$$\Psi_Z(t, w) = (1 + a_1(t)w + a_2(t)w^2 + \cdots)w^{-1}\, e^{\xi(t,w)}.$$

ここで, $a_i(t) \in H^0(T, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty})$, $\xi(t, w) = t_1 w^{-1} + t_2 w^{-2} + \cdots$.

(WF2) ある $\phi \in H^0(T \times \dot{X}, \mathcal{O}_T \boxtimes L)$ が存在して,

$$\Psi_Z = (\mathrm{id} \boxtimes \iota)(\phi|_{T \times \dot{U}}).$$

ここで, $\iota : L|_{\dot{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\dot{U}}$ は最初に幾何学的データ Z として与えられた L の U 上での trivialization の $\dot{U}$ 上への制限である.

この Ψ_Z を幾何学的データ Z に付随する normalized Baker-Akhiezer function もしくは wave function と呼ぶ. $\mathcal{BA}_{Z,T}$ は Ψ_Z から生成される $\mathcal{D}_T$ 上の rank 1 の free module とみなせる． □

4.3.3 常微分作用素で構成された可換環

Lemma 2.5 と同様にして, $\mathcal{BA}_{Z,T}$ は Ψ_Z から生成される $\mathcal{D}_T$ 上の rank 1 の free module であることがわかる.

$\dot{X} = X - P$ の代数曲線としての affine ring を $A_{\dot{X}}$ と書く:

$$A_{\dot{X}} = H^0(X, \mathcal{O}_X(*P)).$$

任意の $f \in A_{\dot{X}}$ は $\mathcal{X}_T = T \times X$ から X への projection を通して, $\mathcal{X}_T$ 上の $T \times P$ だけに極を持つ有理型函数とみなせる．Baker-Akhiezer sheaf $\mathcal{BA}_Z$ は $A_{\dot{X}}$ の積で閉じている．よって, 任意の $f \in A_{\dot{X}}$ に対して, $f\Psi_Z = P(f)\Psi_Z$ を満たすような $P(f) \in H^0(T, \mathcal{D}_T)$ が一意に定まる．$A_{\dot{X}} \to H^0(T, \mathcal{D}_T)$, $f \mapsto P(f)$ は環の単射準同型である．特にその image は線形常微分作用素で構成された可換環である.

4.4 KP hierarchy への応用

ここで, R, F_Z, BA_Z を次のように定める:

$$R = H^0(T, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty}), \qquad F_Z = H^0(T, \mathcal{F}_Z), \qquad \mathrm{BA}_Z = H^0(T, \mathcal{BA}_Z) = F_Z\, e^{\xi}.$$

R には互いに可換な derivations $\partial/\partial t_i$ $(i = 1, 2, \dots)$ が自然に作用している．F_Z は w に関する Laurent 展開によって, 自然に $H_R = \mathbb{C}((w))$ の R-submodule とみなせる．Theorem 4.6 からただちに次の結果が得られる.

Theorem 4.8 $F_Z \in \mathrm{KP}_\emptyset(R)$ □

$R = H^0(T, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty})$ と $F = F_Z$ に対する Section 2 の記号法における BA_{F_Z}, Ψ_{F_Z}, $\mathcal{D}_R$, $\mathcal{E}_R$ のそれぞれは BA_Z, Ψ_Z, $H^0(T, \mathcal{D}_T)$, $H^0(T, \mathcal{E}_R)$ に一致する. $F = F_Z$ から定まる W_F, L_F, etc. のそれぞれを W_Z, L_Z, etc. と書くことにする. このとき, 上の theorem と Theorem 2.7 から次の結果がただちに得られる.

Corollary 4.9 Ψ_Z, W_F, L_F, etc. は KP hierarchy の解である. □

次に, $F = F_Z$ が Lemma 2.8 における ℓ-reduction の条件を満たしているための必要十分条件を求めよう.

Lemma 4.10 $\dot{X}$ の affine ring $A_{\dot{X}} = H^0(X, \mathcal{O}_X(*P))$ は w による Laurent 展開によって, $\mathbb{C}((w))$ の部分環とみなせる. 任意の $t \in \mathbb{C}^\infty$ に対して,

$$F_Z(t) = \{\, \iota(\phi) \mid \phi \in H^0(X, L_t(*P)) \,\}$$

は w に関する Laurent 展開によって $\mathbb{C}((w))$ の部分空間とみなせる. $\mathbb{C}((w))$ の任意の部分空間 E に対して, $\mathbb{C}((E))$ の部分環 $A(E)$ を次のように定める:

$$A(E) = \{\, f \in \mathbb{C}((w)) \mid fE \subset E \,\}$$

このとき, 任意の $t \in \mathbb{C}^\infty$ に対して, $A_{\dot{X}} = A(F_Z(t))$.

Proof. 簡単のため $F_Z(t)$ と $H^0(X, L_t(*P))$ を同一視し, $E = F_Z(t)$ と置く.

$E = H^0(X, L(*P))$ は $A_{\dot{X}}$ の元の積で閉じているので, $A_{\dot{X}} \subset A(E)$ であることがすぐにわかる. よって, 逆向きの包含関係を示せば良い.

X の代数函数体を K と書き, K を w に関する Laurent 展開によって $\mathbb{C}((w))$ の部分体とみなす. このとき,

$$\begin{aligned} K &= \{\, r/s \mid r, s \in H^0(X, L(*P)),\ s \neq 0 \,\} \\ &= \{\, r/s \mid r, s \in E,\ s \neq 0 \,\} \subset C((w)). \end{aligned}$$

任意に $f \in A(E)$ を取る. このとき, $s \neq 0$ であるような任意の $s \in E$ に対して, $r = fs$ と置くと, $A(E)$ の定義より, $r \in E$ である. このとき, $f = r/s$, $r, s \in E$, $s \neq 0$ なので, $f \in K$ である. もしも, f が P 以外の極を持つならば, その点で 0 にならない $s \in H^0(X, L(*P))$ を取ることによって $fs \notin H^0(X, L(*P))$ が成立してしまうので, $f \notin A(E)$ となる. よって, f は点 P 以外に極を持たない. 以上によって, $f \in A_{\dot{X}}$ であることがわかった. これで, 上と逆の包含関係が示された. □

Theorem 4.11 $F = F_Z$ が ℓ-reduction の条件を満たすための必要十分条件は ある $w^{-\ell} \in A_{\dot{X}} = H^0(X, \mathcal{O}_X(*P))$ が成立することである.

Proof. $w^{-\ell}$ を $T \times \dot{X}$ 上の函数とみなしたものは T 方向に定数なので, 各 $t \in T$ に関して, $w^{-\ell} F_Z(t) \subset F_Z(t)$ と $w^{-\ell} \in A_{\dot{X}}$ が同値であることを示せば良い. ところが, このことはすでに上の lemma で証明されている. □

Example 4.12 たとえば, Z が 2-reduction の条件を満たしているための必要十分条件は, X が hyperelliptic であり, $\dot{X} = X - P$ の affine ring $A_{\dot{X}} = H^0(X, \mathcal{O}_X(*P))$ の生成元 λ, μ を適当に選ぶと,

$$A_{\dot{X}} = \mathbb{C}[\lambda, \mu], \qquad \mu^2 = (\lambda - e_1) \cdots (\lambda - e_{2g+1}) \quad (e_i \in \mathbb{C}), \qquad \lambda = w^{-2}$$

が成立していることである. このとき,

$$L_Z^2 = \partial^2 + u, \qquad u = 2u_1 \in H^0(T, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty})$$

であり, u は KdV hierarchy の特殊解になっている. □

5 曲線族の変形と ℓ-CBS hierarchy

$\ell = 2, 3, 4, \ldots$ を以下固定する. この section では複素曲線の 1 次元族のある種の変形から, ℓ-CBS hierarchy の Baker-Akhiezer functions を構成する方法を説明する.

この section において, 幾何学的データ

$$Z = (\pi_{X/Y} : X \to Y,\ P : Y \to X,\ w : U \to U_R,\ L,\ \iota : L|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U)$$

は以下のようなものだとする:

- Y は $\mathbb{C}$ の connected open subset である.
- X は connected smooth complex analytic surface (i.e. 2-dimensional connected complex manifold) である.
- $\pi_{X/Y} : X \to Y$ は proper smooth surjective holomorphic mapping であり, その $y \in Y$ における fiber X_y は genus g の compact smooth analytic curve (i.e. copact Riemann surface) である.
- $P : Y \to X$ は holomorphic mapping でかつ $\pi_{X/Y}$ の section である. $P_y = P(y)$ $(y \in Y)$, $D = P(Y)$ と置く. D は X の divisor である.
- $U \subset X$ は $D = P(Y)$ の近傍でかつ $w : U \to U_R$ は U から $U_R = \{\, w \in \mathbb{C} \mid |w| < R \,\}$ $(R > 0)$ への holomorphic mapping であり, $w(D) = \{0\}$ かつ $(\pi_{X/Y}|_U) \times w : U \to Y \times U_R$ は biholomorphic である. 特に, U 上の座標系として, $(y, w) = (\pi_{X/Y}|_U, w)$ が取れる. $(\pi_{X/Y}|_U) \times w$ によって U と $Y \times U_R$ を同一視する.
- L は X 上の holomorphic line bundle であり, 各 $y \in Y$ について L の X_y 上への制限 L_y は X_y 上の degree $g - 1$ の generic な holomorphic line bundle である (i.e. $R^p \pi_{X/Y,*} L = 0$ for $p \geq 0$).
- $\iota : L|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U$ は L の U 上での trivialization である.

そして, 次の ℓ-reduction の条件を仮定する:

- $w^{-\ell}$ は $H^0(X, \mathcal{O}_X(*D))$ に含まれる函数に延長可能である. 以下, $w^{-\ell}$ の延長を λ もしくは $w^{-\ell}$ と書くことにする:

$$\lambda = w^{-\ell} \in H^0(X, \mathcal{O}_X(*D)).$$

さらに, $0 < r < R$ とし, $\bar{U}_r$, $\mathring{X}$, $\mathring{U}$, $U_{R,r}$ を次のように定める:

$$\bar{U}_r = \{\, x \in U \mid |w(x)| \leq r \,\}, \qquad \mathring{X} = X - \bar{U}_r, \qquad \mathring{U} = X - \bar{U}_r,$$
$$U_{R,r} = \{\, w \in \mathbb{C} \mid r < |w| < R \,\}.$$

X は $\overset{\circ}{X}$ と $Y \times U_R$ を $\pi_{X/Y} \times w : \overset{\circ}{U} \xrightarrow{\sim} Y \times U_{R,r}$ によって貼り合わせることによって構成されているとみなせる．以下, $\overset{\circ}{U}$ と $Y \times U_{R,r}$ を同一視する．自然に $w^{-1}\mathbb{C}[w^{-1}] \subset \mathcal{O}_{\overset{\circ}{U}}$ とみなせる．$\pi_{X/Y}$ の $\overset{\circ}{X}, U, \overset{\circ}{U}$ への制限をそれぞれ $\pi_{\overset{\circ}{X}/Y}, \pi_{U/Y}, \pi_{\overset{\circ}{U}/Y}$ と書くことにする．各 $y \in Y$ における $\pi_{\overset{\circ}{X}/Y}$ の fiber を $\overset{\circ}{X}_y$ と書くことにする．

5.1　曲線族の変形

$\mathbb{C}^\infty \times X$ 上の $\mathbb{C}^\infty \times D$ のみに極を持つ有理型函数 η を次のように定める:

$$\eta(s,x) = s_1\lambda(x) + s_2\lambda(x)^2 + \cdots \quad (s = (s_1, s_2, \dots) \in \mathbb{C}^\infty,\ x \in X - P)$$

η を $\overset{\circ}{U} = Y \times U_{R,r}$ 上に制限したものを次のように書く:

$$\eta(s,w) = s_1 w^{-\ell} + s_2 w^{-2\ell} + \cdots \quad (s = (s_1, s_2, \dots) \in \mathbb{C}^\infty,\ r < |w| < R)$$

各 $(s,y) \in \mathbb{C}^\infty \times Y$ ごとに η の $\{s\} \times \overset{\circ}{X}_y$ 上への制限 (したがって $\{s\} \times \{y\} \times U_{R,r}$ 上への制限) は有界函数になる．

$\tilde{S} \subset \mathbb{C}^\infty \times Y$ を次のように定める:

$$\tilde{S} = \{\, (s,y) \in \mathbb{C}^\infty \times Y \mid y + \eta(s,x) \in Y \text{ for } x \in \overset{\circ}{X}_y \,\}.$$

このとき, $\tilde{S}$ は $\mathbb{C}^\infty \times Y$ における $\{0\} \times Y$ の連結開近傍 S' を含む．S を

$$S = \mathbb{C}^\infty \times S' \subset \mathbb{C}^\infty \times (\mathbb{C}^\infty \times Y)$$

と定める．S 上の座標を $(t,s,y) = (t_1, t_2, \dots ;\ s_1, s_2, \dots ;\ y)$ と書くことにする．

X のパラメータ (t,s) による変形を構成しよう．$\overset{\circ}{\mathcal{X}}$ は

$$\tilde{\pi}_{\overset{\circ}{X}/Y} := \mathrm{id} \times \mathrm{id} \times \pi_{\overset{\circ}{X}/Y} : \mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty \times \overset{\circ}{X} \to \mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty \times Y$$

による S の逆像であるとし, $\overset{\circ}{\mathcal{U}}$ は

$$\tilde{\pi}_{\overset{\circ}{U}/Y} := \mathrm{id} \times \mathrm{id} \times \pi_{\overset{\circ}{U}/Y} : \mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty \times \overset{\circ}{U} \to \mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty \times Y$$

による S の逆像であるとする．$\tilde{\pi}_{\overset{\circ}{X}/Y}$ の $\overset{\circ}{\mathcal{X}}$ 上への制限を $\tilde{\pi}_{\overset{\circ}{\mathcal{X}}/S}$ と書くことにし, $\tilde{\pi}_{\overset{\circ}{U}/Y}$ の $\overset{\circ}{\mathcal{U}}$ 上への制限を $\tilde{\pi}_{\overset{\circ}{\mathcal{U}}/S}$ と書くことにする．

$\overset{\circ}{\mathcal{U}}$ 上の座標系として, $(t,s,y,w) = (t_1, t_2, \dots ;\ s_1, s_2, \dots ;\ y;\ w)$ が取れる．ここで, y は $\overset{\circ}{\mathcal{U}}$ から $\overset{\circ}{U}$ への自然な projection と $\pi_{\overset{\circ}{U}/Y}$ の合成である．

$\mathcal{X}$ は $\overset{\circ}{\mathcal{X}}$ と $\mathcal{U}_R := S \times U_R$ を双正則写像

$$I : \overset{\circ}{\mathcal{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{U}_{R,r} := S \times U_{R,r}, \quad (t,s,x) \mapsto \bigl(t,\ s,\ \pi_{\overset{\circ}{U}/Y}(x) + \eta(s,x),\ w(x)\bigr)$$

によって貼り合わせてできる多様体であるとする. $S \times U_{R,r}$ の自己同型 $(t,s,y,w) \mapsto (t,s,y+\eta(s,w),w)$ は $S \times U_R$ 上に拡張できないことに注意せよ.

$\mathcal{U}_R$ の $\mathcal{X}$ における image を $\mathcal{U}$ と書き, $\mathcal{U}_R$ と同一視する. $S \times \{0\} \subset \mathcal{U}_R$ の $\mathcal{X}$ における image を $\mathcal{D}$ と書き, $S \times \{0\} \subset \mathcal{U}_R$ と同一視する.

$\pi_{\mathcal{X}/S} : \mathcal{X} \to S$ を定義しよう. $\pi_{\mathcal{U}_R/S} : \mathcal{U}_R = S \times U_R \to S$ は自然な projection であるとする. $\pi_{\mathring{\mathcal{X}}/S} : \mathring{\mathcal{X}} \to S$ を次のように定める:

$$\pi_{\mathring{\mathcal{X}}/S}(t,s,x) = \bigl(t,\ s,\ \pi_{\mathring{X}/Y}(x) + \eta(s,x)\bigr) \qquad ((t,s,x) \in \mathring{\mathcal{X}}).$$

このとき, $\pi_{\mathring{\mathcal{X}}/S}$ の $\mathring{\mathcal{U}}$ 上への制限と $\pi_{\mathcal{U}_R/S} \circ I$ は等しい. よって, $\pi_{\mathcal{U}_R/S}$ と $\pi_{\mathring{\mathcal{X}}/S}$ は貼り合わさって, $\pi_{\mathcal{X}/S} : \mathcal{X} \to S$ を定める.

$\mathcal{X}$ 上の $\mathcal{D}$ のみに極を持つ有理型函数 $\lambda_{\mathcal{X}}$ を定義しよう. $\mathcal{U}_R = S \times U_R$ から U_R への自然な projection w を用いて, $\lambda_{\mathcal{U}_R} = w^{-\ell}$ と定める. $\mathring{\mathcal{X}}$ 上では $\mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty \times \mathring{X}$ から $\mathring{X}$ への自然な projection の $\mathring{\mathcal{X}}$ 上への制限と λ の合成を $\lambda_{\mathring{\mathcal{X}}}$ と定める. このとき, $\lambda_{\mathring{\mathcal{X}}}$ の $\mathring{\mathcal{U}}$ 上への制限と $\lambda_{\mathcal{U}_R} \circ I$ は等しい. よって, $\lambda_{\mathring{\mathcal{X}}}$ と $\lambda_{\mathcal{U}_R}$ は貼り合わさって, $\mathcal{X}$ 上の $\mathcal{D}$ のみに極を持つ有理型函数 $\lambda_{\mathcal{X}}$ を定める.

X を $\{0\} \times \{0\} \times X$ と同一視し, Y を $\{0\} \times \{0\} \times Y$ と同一視すると, $\pi_{\mathcal{X}/S} : \mathcal{X} \to S$ の X 上への制限は $\pi_{X/Y} : X \to Y$ に一致している.

5.2 Line bundle の変形

Section 4 と同様のやり方で, X 上の line bundle L を $\mathcal{X}$ 上に拡張しよう.

$\mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty \times \mathring{X}$ 上の line bundle $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes L|_{\mathring{X}}$ を $\mathring{\mathcal{X}}, \mathring{\mathcal{U}}$ に制限したものをそれぞれ $\mathcal{L}_{\mathring{\mathcal{X}}}, \mathcal{L}_{\mathring{\mathcal{U}}}$ と書く. 同型 $\tilde{\iota} : \mathcal{L}_{\mathring{\mathcal{U}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathring{\mathcal{U}}}$ は次の同型の $\mathring{\mathcal{U}}$ 上への制限であるとする:

$$\mathrm{id} \boxtimes \mathrm{id} \boxtimes \iota|_{\mathring{U}} : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes L|_{\mathring{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathring{U}} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty \times \mathring{U}}.$$

自然な同型 $I^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}_{R,r}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathring{\mathcal{U}}}$, $f \mapsto f \circ I$ を I^* と書く. 同型 $\iota_{\mathcal{L}} : \mathcal{L}_{\mathring{\mathcal{U}}} \xrightarrow{\sim} I^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}_{R,r}}$ を次のように定める:

$$\iota_{\mathcal{L}}(\phi) = (I^*)^{-1}(\tilde{\iota}(\phi))\, e^{-\xi}. \qquad \bigl(\phi \in \mathcal{L}_{\mathring{\mathcal{U}}}\bigr)$$

ここで, ξ は次のように定められた $\mathcal{U}_{R,r}$ 上の正則函数である:

$$\xi(t,s,y,w) = \xi(t,w) = t_1 w^{-1} + t_2 w^{-2} + t_3 w^{-3} + \cdots.$$

$\mathcal{L}_{\mathring{\mathcal{X}}}$ と $I^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{U}_R}$ を $\mathring{\mathcal{U}}$ 上で $\iota_{\mathcal{L}}$ によって貼り合わせてできる $\mathcal{X}$ 上の line bundle を $\mathcal{L}$ と書く. $\mathcal{L}$ の $\mathcal{U} = \mathcal{U}_R$ 上での trivialization $\mathcal{L}_{\mathcal{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathcal{U}_R}$ も $\iota_{\mathcal{L}}$ と書くことにする.

埋め込み $i_X : X \hookrightarrow \mathcal{X}$, $x \mapsto (0,0,x)$ による $\mathcal{L}$ の X 上への制限 $i_X^*\mathcal{L}$ は L に一致する.

5.3 一般化された Baker-Akhiezer sheaf

$\pi_{\mathcal{X}/S,*}\mathcal{L}(*\mathcal{D})$ と同型な $\mathcal{O}_S$-module $\mathcal{F}_Z$ を次のように定める:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_Z &= \left\{ \iota_{\mathcal{L}}\big(\phi\big) \;\middle|\; \phi \in \pi_{\mathcal{X}/S,*}\mathcal{L}(*\mathcal{D}) \right\} \\
&= \left\{ f \in \pi_{\mathcal{U}/S,*}\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(*\mathcal{D}) \;\middle|\; \text{ある } \phi \in \pi_{\mathring{\mathcal{X}}/S,*}\mathcal{L}_{\mathring{\mathcal{X}}} \text{ が存在して } \iota_{\mathcal{L}}(\phi) = f \right\} \\
&= \Bigg\{ f \in \pi_{\mathcal{U}/S,*}\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(*\mathcal{D}) \;\Bigg| \\
&\qquad f \text{ が } S \text{ の open subset } \Omega \text{ 上の section であるとき,} \\
&\qquad \text{ある } \phi \in H^0\Big(\pi^{-1}_{\mathring{\mathcal{X}}/S}(\Omega), \mathcal{L}_{\mathring{\mathcal{X}}}\Big) \text{ が存在して,} \\
&\qquad \tilde{\iota}(\phi)(t,s,x) = f\big(t,\ s,\ \pi_{\mathring{U}/Y}(x) + \eta(s,x),\ w(x)\big)\, e^{\xi(t,w(x))} \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

$\mathcal{F}_Z$ は w に関する Laurent 展開によって, $\mathcal{O}_S((w))$ の $\mathcal{O}_S$-submodule とみなせる.

$\mathcal{O}_S$-module $\mathcal{BA}_Z$ を次のように定める:

$$\mathcal{BA}_Z = \mathcal{F}_Z\, e^{\xi}.$$

$\mathcal{BA}_Z$ を幾何学的データ Z に付随する Baker-Akhiezer sheaf と呼ぶ.

Lemma 5.1 $\mathcal{BA}_Z$ には $\partial/\partial t_i$, $\partial/\partial s_j + w^{-j\ell}\partial/\partial y$ が自然に作用している.

Proof. Ω は S の open subset であるとし, $\tilde{\Omega} = \pi^{-1}_{\mathring{\mathcal{X}}/S}(\Omega)$ と置く.

任意の $f\,e^{\xi} \in H^0(\Omega, \mathcal{BA}_Z)$ に対して,

$$\tilde{\iota}(\phi)(t,s,x) = f\big(t,\ s,\ y + \eta(s,x),\ w(x)\big)\, e^{\xi(t,w(x))}$$

を満たす $\phi \in H^0(\tilde{\Omega}, \mathcal{L}_{\mathring{\mathcal{X}}})$ が一意に存在する.

$\mathcal{L}_{\mathring{\mathcal{X}}}$ は定義より $\mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty \times \mathring{X}$ 上の line bundle $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes L|_{\mathring{X}}$ の $\mathring{\mathcal{X}}$ 上への制限であった.

よって, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes L|_{\mathring{X}}$ の最初の二つの因子に作用する $\partial/\partial t_i$, $\partial/\partial s_j$ の作用は, それらの $\mathcal{L}|_{\mathring{\mathcal{X}}}$ への作用を誘導する. よって, $\partial/\partial t_i$, $\partial/\partial s_j$ は $H^0(\tilde{\Omega}, \mathcal{L}_{\mathring{\mathcal{X}}})$ に作用する.

そして, $\tilde{\iota}$ は $\mathrm{id} \boxtimes \mathrm{id} \boxtimes \iota|_{\mathring{U}}$ の $\mathring{\mathcal{U}}$ 上への制限だったので, $\partial/\partial t_i$, $\partial/\partial s_j$ の作用と可換である.

$\partial/\partial t_i$, $\partial/\partial s_j$ の ϕ への作用が f へのどのような作用を誘導するかを計算しよう:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\iota}\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\phi\right)(t,s,x) &= \frac{\partial}{\partial t_i}\Big(f\big(t,\ s,\ \pi_{\mathring{U}/Y}(x) + \eta(s,x),\ w(x)\big)\, e^{\xi(t,w(x))}\Big) \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial t_i}(f\,e^{\xi})\right]_{(t,s,y,w)\mapsto(t,\, s,\, \pi_{\mathring{U}/Y}(x)+\eta(s,x),\, w(x))},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{\iota}\left(\frac{\partial}{\partial s_j}\phi\right)(t,s,x) &= \frac{\partial}{\partial s_j}\Big(f\big(t,\ s,\ \pi_{\mathring{U}/Y}(x) + \eta(s,x),\ w(x)\big)\, e^{\xi(t,w(x))}\Big) \\
&= \left[\left(\frac{\partial}{\partial s_j} + w^{-j\ell}\frac{\partial}{\partial y}\right)(f\,e^{\xi})\right]_{(t,s,y,w)\mapsto(t,\, s,\, \pi_{\mathring{U}/Y}(x)+\eta(s,x),\, w(x))}.
\end{aligned}
$$

これより, $\mathcal{BA}_Z$ には ∂/dt_i, $\partial/\partial s_j + w^{-j\ell}\partial/\partial y$ が自然に作用していることがわかる. □

任意の $y \in Y$ に対して, L の X_y 上への制限 L_y は X_y 上の degree $g-1$ の generic な line bundle であると仮定したのであった. よって, $i_Y : Y \hookrightarrow S$, $y \mapsto (0,0,y)$ の image のある連結開近傍 $T \subset S$ が存在して, 任意の $(t,s,y) \in T$ における $\pi_{\mathcal{X}/S}$ の fiber $X_{t,s,y}$ 上への $\mathcal{L}$ の制限 $L_{t,s,y}$ は $X_{t,s,y}$ 上の degree $g-1$ の generic な line bundle になる. よって, $\mathcal{X}_T = \pi_{\mathcal{X}/S}^{-1}(T)$, $\pi_{\mathcal{X}_T/T} = \pi_{\mathcal{X}/S}|_{\mathcal{X}_T}$ と置くと次が成立する.

Lemma 5.2 $R^p\pi_{\mathcal{X}_T/T,*}\mathcal{L}|_{\mathcal{X}_T} = 0$ $(p \geq 0)$. □

$\mathcal{F}_Z$, $\mathcal{BA}_Z$ の T 上への制限をそれぞれ $\mathcal{F}_{Z,T}$, $\mathcal{BA}_{Z,T}$ と書く.

Theorem 5.3 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{Z,T}$ は $\mathcal{O}_T((w))$ の $\mathcal{O}_T$-submodule であり, 以下を満たしている:

(G) $\mathcal{F}$ は以下の形の $\mathcal{O}_T$-free basis を持つ:

$$f_i = w^{-i} + \sum_{j \geq 0} a_{ij} w^j \in H^0(T, \mathcal{F}) \qquad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

ここで, $a_{ij} \in H^0(T, \mathcal{O}_T)$.

(KP) $\mathcal{F}$ は $\partial/\partial t_i + w^{-i}$ の作用で閉じてる:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_i} + w^{-i}\right)\mathcal{F} \subset \mathcal{F} \qquad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

(ℓ-CBS) $\mathcal{F}$ は $\partial/\partial s_j + w^{-j\ell}\partial/\partial y$ の作用で閉じている:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_j} + w^{-j\ell}\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathcal{F} \subset \mathcal{F} \qquad (j = 1, 2, 3, \dots).$$

以上の条件は Definition 3.1 の条件の sheaf version であることに注意せよ.

Proof. 条件 **(KP)**, **(ℓ-CBS)** が成立することは Lemma 5.1 と同値である. 条件 **(G)** は Lemma 5.2 から出る. □

5.4 ℓ-CBS hierarchy への応用

整域 R と $R((w))$ の R-submodule $F = F_{Z,T}$ を次のように定める:

$$R = H^0(T, \mathcal{O}_T), \qquad F = F_{Z,T} = H^0(T, \mathcal{F}_{Z,T}).$$

R は座標系 $(t;s;y) = (t_1, t_2, \dots; s_1, s_2, \dots; y)$ を持つ空間 $\mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty \times Y$ における $\{0\} \times \{0\} \times Y$ の開近傍 T 上の正則函数全体で構成されているので, R には互いに可換な可算個の derivations $\partial/\partial t_i$ $(i = 1, 2, \dots)$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial s_j$ $(j = 1, 2, \dots)$ が自然に作用している.

このとき, Theorem 5.3 より, Section 3 の議論を上の R, F に適用可能であることがわかる. よって, 次の結果が得られる.

Theorem 5.4 $F = F_{Z,T} \in \mathrm{CBS}^\ell_\emptyset(R)$. □

Section 2, 3 の記号法における Ψ_F, W_F, $P_F = L_F^\ell$, etc. のそれぞれを Ψ_Z, W_Z, $P_Z = L_F^\ell$, etc. と書くことにする. このとき, 上の theorem と Theorem 3.4 から次の結果がただちに得られる.

Corollary 5.5 Ψ_Z, W_F, P_F, etc. は ℓ-CBS hierarchy の解である. □

Remark 5.6 $\mathrm{BA}_F = H^0(T, \mathcal{BA}_{Z,T})$ であるから, $\mathcal{BA}_{Z,T}$ の定義より, normalized Baker-Akhiezer function (もしくは wave function) $\Psi = \Psi_Z(t,s,y;w)$ は $T \times U_{R,0}$ 上の正則函数であり, 以下の条件によって一意に特徴付けられる:

(WF1) Ψ は次のような形をしている:

$$\Psi(t,s,y;w) = (1 + a_1(t,s,y)w + a_2(t,s,y)w^2 + \cdots)w^{-1}\, e^{\xi(t,w)}.$$

ここで, $a_i \in H^0(T, \mathcal{O}_T)$, $\xi(t,w) = t_1 w^{-1} + t_2 w^{-2} + \cdots$.

(WF2) $\Phi \in H^0\Big(\mathring{\mathcal{X}}_T,\ \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes L|_{\mathring{X}_T}\Big)$ で次を満たすものが唯一存在する:

$$\tilde{\iota}(\Phi)(t,s,x) = \Psi\big(t,\ s,\ \pi_{\mathring{U}/Y}(x) + \eta(s,x),\ w(x)\big).$$

ここで, $\eta(s,w) = s_1 w^{-j\ell} + s_2 w^{-2\ell} + \cdots$ であり, $\tilde{\iota}$ は L の U 上での trivialization $\iota : L|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U$ から定まる同型

$$\mathrm{id} \boxtimes \mathrm{id} \boxtimes \iota : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes L|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes \mathcal{O}_U$$

の $\mathring{\mathcal{U}}$ 上への制限である.

この $\Psi = \Psi_Z$ を幾何学的データ Z に付随する normalized Baker-Akhiezer function もしくは wave function と呼ぶ. □

5.5 λ の branch point と L の divisor の変形

$\lambda = w^{-\ell} \in H^0(X, \mathcal{O}_X(*D))$ は ℓ 重分岐被覆 $(\pi_{X/Y}, \lambda) : X \to Y \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $x \mapsto (\pi_{X/Y}(x), \lambda(x))$ を定める.

この subsection ではさらに以下を仮定する:

- 正則写像 $B_m : Y \to X$ $(m = 1, \ldots, M)$ は $\pi_{X/Y} : X \to Y$ の sections であるとする. ℓ 重分岐被覆 $(\pi_{X/Y}, \lambda) : X \to Y \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の branch locus は $\bigcup_{m=1}^{M} B_m(Y)$ に等しく, その $B_m(Y)$ 上での分岐指数は e_m であると仮定する. 簡単のため, $B_m(Y)$ は互いにも交わらず, U とも交わらないと仮定する.
- 正則写像 $Q_n : Y \to X$ $(n = 1, \ldots, g)$ は $\pi_{X/Y} : X \to Y$ の sections であるとする. 簡単のため $Q_n(Y)$ は互いに交わらず, U とも交わらないと仮定する. X の divisor E を $E = Q_1(Y) + \cdots + Q_g(Y)$ と定める.
- X 上の line bundle L は $L = \mathcal{O}_X(E - D)$ の形で与えられていると仮定する.
- L の U 上での trivialization $\iota : L|_U = \mathcal{O}_U(-D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U$ と U 上の non-vanishing holomorphic function $c \in H^0(U, \mathcal{O}_U)^\times$ は次の条件によって一対一に対応している:

$$\iota(f) = c^{-1} w^{-1} f \qquad (f \in L|_U = \mathcal{O}_U(-D)).$$

以下, trivialization ι のこの表示を仮定する.

以上の仮定のもとで, $B_m(Y), Q_n(Y) \subset \overset{\circ}{X}$ である. $\mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty \times B_m(Y)$, $\mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty \times Q_n(Y)$ と $\overset{\circ}{\mathcal{X}}$ の交わりをそれぞれ $\mathcal{B}_m$, $\mathcal{Q}_n$ と書くことにする. $\mathcal{B}_m$, $\mathcal{Q}_n$ は $\mathcal{X}$ の divisor をなす. $\mathcal{X}$ の divisor $\mathcal{E}$ を $\mathcal{E} = \mathcal{Q}_1 + \cdots + \mathcal{Q}_g$ と定める.

$(t,s,y) \in S$ における $\pi_{\mathcal{X}/S}$ の fiber $X_{t,s,y}$ と $\mathcal{B}_m$, $\mathcal{Q}_n$ の交わりをそれぞれ $\mathcal{B}_m(t,s,y)$, $\mathcal{Q}_n(t,s,y)$ と書くことにする.

S を十分小さく取っておけば, $\mathcal{B}_m(t,s,y)$, $\mathcal{Q}_n(t,s,y)$ は一意に定まり, $\pi_{\mathcal{X}/S}$ の sections $\mathcal{B}_m : S \to \mathcal{X}$, $\mathcal{Q}_n : S \to \mathcal{X}$ が定まる.

S を十分小さく取っておけば, $\mathcal{X}$ 上の $\mathcal{D}$ だけの極を持つ有理型函数 $\lambda_{\mathcal{X}}$ は ℓ 重分岐被覆 $(\pi_{\mathcal{X}/S}, \lambda_{\mathcal{X}}) : \mathcal{X} \to S \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を定める.

S 上の正則函数 b_m, q_n を $b_m = \lambda \circ B_m$, $q_n = \lambda \circ Q_n$ と定める. このとき, 次が成立する.

Theorem 5.7 (pole system) 十分小さく S を取っておけば, $u = b_m, q_n$ は S 上で次の方程式を満たしている:

$$\frac{\partial u}{\partial s_j} + u^j \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots).$$

$u = b_m, q_n$ に関するこの方程式系は [4] において pole system と呼ばれている. □

この theorem は次の結果の特殊な場合である.

Lemma 5.8 正則写像 $A : Y \to X$ は $\pi_{X/Y}$ の section であり, $A(Y)$ は U と交わらないと仮定する (特に $A(Y) \subset \overset{\circ}{X}$). $\mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty \times A(Y)$ と $\overset{\circ}{\mathcal{X}}$ の交わりを $\mathcal{A}$ と書く. 必要ならば S を十分小さく取っておけば, $(t,s,y) \in S$ における $\pi_{\mathcal{X}/S}$ の fiber $X_{t,s,y}$ と $\mathcal{A}$ はちょうど一点 $\mathcal{A}(t,s,y)$ で交わり, $\pi_{\mathcal{X}/S}$ の section $\mathcal{A} : S \to \mathcal{X}$ が定まる. このとき, S を十分小さく取っておけば, $a = \lambda_{\mathcal{X}} \circ \mathcal{A}$ は S 上で次の方程式を満たしている:

$$\frac{\partial a}{\partial s_j} + a^j \frac{\partial a}{\partial y} = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots).$$

Proof. $(t,s,y) \in S$ に対して, $\tilde{A}(t,s,y) \in \overset{\circ}{X}$ を $\mathcal{A}(t,s,y) = (t, s, \tilde{A}(t,s,y))$ と定める. このとき, $a(t,s,y) = \lambda(\tilde{A}(t,s,y))$ である. $\mathcal{A}(t,s,y)$ と $\pi_{\mathcal{X}/S}$ の定義より,

$$\begin{aligned}
&\tilde{A}(t,s,y) = A\bigl(\pi_{\overset{\circ}{X}/Y}(\tilde{A}(t,s,y))\bigr), \\
&\pi_{\mathcal{X}/S}(\mathcal{A}(t,s,y)) = (t,s,y), \\
&\pi_{\mathcal{X}/S}(\mathcal{A}(t,s,y)) = \bigl(t,\ s,\ \pi_{\overset{\circ}{X}/Y}(\tilde{A}(t,s,y)) + \eta(s, \tilde{A}(t,s,y))\bigr).
\end{aligned}$$

後の二つの等式から得られる $\pi_{\overset{\circ}{X}/Y}(\tilde{A}(t,s,y)) = y - \eta(s, \tilde{A}(t,s,y))$ を最初の等式に代入すると, $\tilde{A}(t,s,y) = A\bigl(y - \eta(s, \tilde{A}(t,s,y))\bigr)$. よって, $f(y) = \lambda(A(y))$ と置けば,

$$a(t,s,y) = f\bigl(y - s_1 a(t,s,y) - s_2 a(t,s,y)^2 - \cdots\bigr).$$

この等式の両辺に $\delta = \partial/\partial s_j + a^j \partial/\partial y$ を作用させると次が成立することがわかる:

$$\Bigl(1 + f' \sum_k s_k k a^{k-1}\Bigr) \delta(a) = 0.$$

S を十分小さく取っておけば $1 + f' \sum_k s_k k a^{k-1}$ は 0 にならないので, $\delta(a) = 0$ となる. □

Remark 5.9 一般に十分一般的な二変数函数 $F(u,v)$ に関して, s_j と y の函数 a が

$$F(a,\ y - s_1 a - s_2 a^2 - \cdots) = 0$$

を満たしていれば, a は次の方程式を満たしている:

$$\frac{\partial a}{\partial s_j} + a^j \frac{\partial a}{\partial y} = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots). \quad \square$$

Remark 5.10 この subsection の状況のもとで, 幾何学的データ Z に付随する normalized Baker-Akhiezer function (もしくは wave function) $\Psi = \Psi_Z(t, s, y; w)$ は $T \times U_{R,0}$ 上の正則函数であり, 以下の条件によって一意に特徴付けられる:

(WF1) Ψ は次のような形をしている:

$$\Psi(t, s, y; w) = (1 + a_1(t, s, y)w + a_2(t, s, y)w^2 + \cdots)w^{-1}\, e^{\xi(t,w)}.$$

ここで, $a_i \in H^0(T, \mathcal{O}_T)$, $\xi(t, w) = t_1 w^{-1} + t_2 w^{-2} + \cdots$.

(WF2) ある $\Phi \in H^0\Big(\overset{\circ}{\mathcal{X}}_T,\ \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes \mathcal{O}_{\overset{\circ}{X}_T}(*E)\Big)$ が存在して,

$$\Phi(t, s, x) = c\big(\pi_{\overset{\circ}{U}/Y}(x), w(x)\big)\, w(x)\, \Psi\big(t,\ s,\ \pi_{\overset{\circ}{U}/Y}(x) + \eta(s, x),\ w(x)\big).$$

ここで, $\eta(s, x) = s_1\lambda(x) + s_2\lambda(x)^2 + \cdots$ であり, $c(y, w)$ は L の U 上での trivialization から定まる $Y \times U_R$ 上の non-vanishing holomorphic function である.

Φ のことを normalized Baker-Akhiezer function もしくは wave function と呼ぶこともある. $\square$

6 解のテータ函数による表示

((((これについてはたくさんの文献があるが, 気に入った奴がないのが残念.))))

7 $\ell = 2$ の場合

この section では $\ell = 2$ の場合について具体的な計算を行なう.

7.1 方程式の具体的な形

Theorem 3.4 の記号をそのまま用いる. $\ell = 2$ のとき, P は次のように表わされる:

$$P = \partial^2 + u.$$

L, Q を次のように表わしておく:

$$L = \partial + u_1\partial^{-1} + u_2\partial^{-2} + \cdots, \qquad Q = v_1\partial^{-1} + v_2\partial^{-2} + \cdots.$$

このとき,

$$
\begin{aligned}
L^2 &= \partial^2 + 2u_1 + (2u_2 + u_1')\partial^{-1} + (2u_3 + u_1^2 + u_2')\partial^{-2} + \cdots, \\
[Q, P] &= -2v_1' + (-2v_2 - v_1'')\partial^{-1} + (-2v_3' - v_2'' - v_1 u')\partial^{-2} + \cdots.
\end{aligned}
$$

ここで, $f' = \partial(f)$ である. よって, $L^2 = P$ と $\partial P/\partial y = [Q, P]$ より,

$$
\begin{aligned}
&u_1 = \frac{1}{2}u, \quad u_2 = -\frac{1}{2}u_1' = -\frac{1}{4}u', \\
&u_3 = -\frac{1}{2}(u_1^2 + u_2') = -\frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{8}u'', \quad \cdots; \\
&v_1' = -\frac{1}{2}u_y, \quad v_2' = -\frac{1}{2}v_1'' = \frac{1}{4}u_y', \\
&v_3' = -\frac{1}{2}(v_2'' + v_1 u') = -\frac{1}{8}u_y'' + \frac{1}{4}u' \int^x u_y \, dx, \quad \cdots.
\end{aligned}
$$

ここで, $u_y = \partial u/\partial y$ であり, $u_y = -2v_1'$ なので $\int^x u_y \, dx = -2v_1$ と書いた.

$B_{3,+} = (L^3)_+$ と $C_{1,+} = (QP)_+$ は次の形になる:

$$
B_{3,+} = (L^3)_+ = \partial^3 + \frac{3}{2}u\partial + \frac{3}{4}u', \qquad C_{1,+} = (QP)_+ = v_1\partial + v_2.
$$

$\partial u/\partial t_3 = \partial P/\partial t_3 = [B_{3,+}, P]$ は次のように書き直される:

$$
u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x.
$$

ここで, $f_t = \partial f/\partial t_3$, $f_x = f' = \partial f/\partial t_1$ と書いた. これは KdV 方程式である.

Remark 3.5 より, 条件 $\partial P/\partial y = [Q, P]$ によって, $[C_{1,-}, P] = [C_{1,+}, P] - \partial P/\partial y\, P$ が高々 0 階の微分作用素 (すなわち R の元) になることが保証されている.

$\partial u/\partial s_1 = [C_{1,+}, P] - \partial P/\partial y\, P$ は次のように書き直される:

$$
u_s = -v_{2,xx} - uu_y + u_x v_1. \tag{7.1}
$$

ここで, $u_s = \partial u/\partial s_1$ と書いた. 上で得た $v_{1,x} = -1/2\, u_y$, $v_{2,x} = 1/4\, u_{xy}$ に注意し, $v_1 = -1/2 \int^x u_y \, dx$ と書くことにすると,

$$
u_s = -\frac{1}{4}u_{xxy} - uu_y - \frac{1}{2}u_x \int^x u_y \, dx. \tag{7.2}
$$

これは, F. Calogero [2], O. I. Bogoyavlensky [1], J. Schiff [6] らによって独立に研究された $2+1$ 次元の非線型方程式に一致している. そこで, これを CBS 方程式と呼ぶことにする.

たとえば, 上の (7.2) と [1] の第 2 頁にある方程式

$$
u_s = -u_{xxy} + 4uu_y + 2u_x \int^x u_y \, dx
$$

の係数を一致させるためには, (7.2) において $u \mapsto -u$, $y \mapsto 4y$ ($\partial_y \mapsto 4\partial_y$) と変数変換すれば良い.

W を次のように表わすことにする:

$$
W = 1 + w_1\partial^{-1} + w_2\partial^{-2} + w_3\partial^{-3} + \cdots.
$$

このとき, W^{-1} は次の形になる:

$$W^{-1} = 1 - w_1\partial^{-1} + (-w_2 + w_1^2)\partial^{-2} + (-w_3 + 2w_1w_2 - w_1w_1' - w_1^3)\partial^{-3} + \cdots .$$

$W\partial W^{-1}$ と W_yW^{-1} は以下の形になる:

$$W\partial W^{-1} = \partial - w_1'\partial^{-1} + (-w_2' + w_1w_1')\partial^{-2} + \cdots ,$$
$$W_yW^{-1} = w_{1,y}\partial^{-1} + (-w_{2,y} - w_1w_{1,y})\partial^{-2} + \cdots .$$

$L = W\partial W^{-1}$ と $Q = W_yW^{-1}$ より,

$$u_1 = -w_{1,x}, \quad u_2 = -w_{2,x} + w_1w_{1,x}, \quad \cdots ;$$
$$v_1 = w_{1,y}, \quad v_2 = -w_{2,y} - w_1w_{1,y}, \quad \cdots .$$

$u = 2u_1$ だったので, $u = -2w_{1,x}$ である.

方程式 (7.1) に $u = -2w_{1,x}$, $v_1 = w_{1,y}$, $v_{2,x} = 1/4\, u_{xy} = -1/2\, w_{1,xxy}$ を代入して整理すると,

$$w_{1,xs} = -\frac{1}{4}w_{1,xxxy} + 2w_{1,x}w_{1,xy} + w_{1,xx}w_{1,y}.$$

これを $\tilde{u} = 2w_1 = -\int^x u\,dx$, $y \mapsto 4y$ ($\partial_y \mapsto 4\partial_y$) と変数変換して得られる方程式は [1] の (1.16) にある方程式

$$\tilde{u}_{xs} = -\tilde{u}_{xxxy} + 4\tilde{u}_x\tilde{u}_{xy} + 2\tilde{u}_{xx}\tilde{u}_y \tag{7.3}$$

に一致する. この方程式も CBS 方程式と呼ぶことにする.

Remark 7.1 CBS 方程式 (7.3) から $\tilde{u}$, x, y, s を定数倍する変数変換によって次の形の偏微分方程式が得られるための必要十分条件は $B = 2C$ が成立することである:

$$\tilde{u}_{xs} = A\tilde{u}_{xxxy} + B\tilde{u}_x\tilde{u}_{xy} + C\tilde{u}_{xx}\tilde{u}_y \qquad (A, B, C \text{ は } 0 \text{ でない定数}).$$

実際, (7.3) を $\tilde{u} \mapsto \alpha\tilde{u}$, $\partial_x \mapsto a\partial_x$, $\partial_y \mapsto b\partial_y$, $\partial_s \mapsto c\partial_s$ と変数変換すると,

$$\tilde{u}_{xs} = -\frac{a^2b}{c}\tilde{u}_{xxxy} + \frac{4\alpha ab}{c}\tilde{u}_x\tilde{u}_{xy} + \frac{2\alpha ab}{c}\tilde{u}_{xx}\tilde{u}_y.$$

KdV 方程式の場合は各項の係数の比を自由に選べたが, CBS 方程式の場合はそうでないことに注意せよ. 一般に $B = 2C$ が成立するとき, 上の形の方程式を CBS 方程式と呼ぶことにする. □

7.2 超楕円テータ函数解

((((Section 6 を書いてから書く.))))

参考文献

[1] Bogoyavlenskii, O. I.: Breaking solitons in $2+1$-dimensional integrable equations, Russian Math. Surveys 45 (1990), no. 4, 1–86

[2] Calogero, F.: A method to generate solvable nonlinear evolution equations, Lett. Nuovo Cimento (2) 14 (1975), no. 12, 443–447.

[3] Ikeda, T. and Takasaki, K.: Toroidal Lie algebras and Bogoyavlensky's $2+1$-dimensional equation, Internat. Math. Res. Notices 2001, no. 7, 329–369, `nlin.SI/0004015`

[4] Korotkin, D. A.: Self-dual Yang-Mills fields and deformations of algebraic curves, Commun. Math. Phys. 134, (1990), no. 2, 397–412.

[5] Mumford, D: An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg-de Vries equation and related non-linear equations, Proc. of Intl. Symp. on Alg. Geom., Kyoto 1977, 115–153

[6] Schiff, J.: Integrability of Chern-Simons-Higgs vortex equations and a reduction of the self-dual Yang-Mills equations to three dimensions, Painlevé transcendents (Sainte-Adèle, PQ, 1990), 393–405, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., 278, Plenum, New York, 1992