abcd 型 quadratic Poisson 代数

黒木 玄

2008 年 11 月 24 日作成　(2001 年 12 月 21 日のセミナーの記録, 超未完成)

目 次

1　G と $D = G \times G$ 上の abcd 型 quadratic Poisson 構造

1.1　$\mathfrak{g}$ 上の mCYBE+UC と G 上の Poisson 構造

G は $GL_n(\mathbb{C})$ に含まれる代数群であり, $\mathfrak{g}$ はその Lie 代数であるとする. $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ 上には非退化な不変対称二次形式 $(\ ,\ )$ が存在すると仮定し, それを用いて $\mathfrak{g}$ とその双対空間 $\mathfrak{g}^*$ を同一視し, $\operatorname{End}\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ と同一視する. $f \in \operatorname{End}\mathfrak{g}$ の転置写像を $f^* \in \operatorname{End}\mathfrak{g}^* = \operatorname{End}\mathfrak{g}$ と表わす. 転置を取る操作は $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ 上では $(X \otimes Y)^* = Y \otimes X$ と表現される.

定義 1.1 $r \in \operatorname{End}\mathfrak{g}$ であるとする. r が **modified classical Yang-Baxter equation (mCYBE と略)** を満たしているとは $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して

$$r([rX, Y] + [X, rY]) - [rX, rY] = [X, Y]$$

を満たすことである. r は **unitarity condition (UC と略)** を満たしているとは $r^* = -r$ を満たしていることである. □

$r \in \operatorname{End}\mathfrak{g}$ に対して $r_\pm \in \operatorname{End}\mathfrak{g}$ を $r_+ + r_- = r$, $r_+ - r_- = 1$ という条件によって定める. さらに $[\ ,\ ]_r : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を次のように定める:

$$[X, Y]_r = \frac{1}{2}([rX, Y] + [X, rY]) = [r_+X, r_+Y] - [r_-X, r_-Y] \quad (X, Y \in \mathfrak{g}).$$

補題 1.2 (古典 r 行列入門 (`Classical-r.pdf`) 補題 23.2) 以下が成立している:

(a) r が mCYBE を満たす $\iff$ $r_+[X, Y]_r = [r_+X, r_+Y]$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$.

(b) r が mCYBE を満たす $\iff$ $r_-[X, Y]_r = [r_-X, r_-Y]$ $(X, Y \in \mathfrak{g})$.

(c) r が UT を満たす $\iff$ $r_- = -r_+^*$. □

G を $M_n(\mathbb{C})$ に埋め込む写像を L と表わす. G から $M_n(\mathbb{C})\otimes M_n(\mathbb{C})$ への写像 L^1, L^2 を $L^1 = L\otimes 1$, $L^2 = 1\otimes L$ と定める. G 上に Poisson 構造 $\{\ ,\ \}$ が定められているとき

$$\{L^1, L^2\} = \sum_{i,j,k,l} \{\ell_{ij}, \ell_{kl}\} E_{ij}\otimes E_{kj}$$

と定める. ここで E_{ij} は行列単位であり, ℓ_{ij} は L の (i,j) 成分である. $L^1L^2 = L^2L^1 = L\otimes L$ である. ℓ_{ij} たちは G 上の函数環を生成するので $\{L^1, L^2\}$ は G 上の Poisson 構造を一意に特徴付ける.

このとき次が成立している.

定理 1.3 (古典 r 行列入門 (`Classical-r.pdf`) 系 17.6) $r, r' \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ が mCYBE と UC を満たしているならば次によって G 上に Poisson 構造を定めることができる:

$$\{L^1, L^2\} = rL^1L^2 - L^1L^2r'.$$

この Poisson 構造が定められた G を $G_{r,r'}$ と表わし, Poisson 括弧を $\{\ ,\ \}_{r,r'}$ と書くことにする. □

系 1.4 $r, r', r'' \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ が mCYBE と UC を満たしていると仮定する. このとき行列の積が定める写像 $G_{r,r'}\times G_{r',r''} \to G_{r,r''}$, $(L,M)\mapsto LM$ は Poisson 写像である. 特に $G_{r,r}$ は Poisson 群になる.

証明. $G_{r,r'}$, $G_{r',r''}$ の $M_n(\mathbb{C})$ への埋め込みをそれぞれ L, M と表わし, $N = LM$ とおく. このとき $G_{r,r'}\times G_{r',r''}$ 上の Poisson 括弧 $\{\ ,\ \}$ について

$$\begin{aligned}
\{N^1, N^2\} &= \{L^1M^1, L^2M^2\} \\
&= \{L^1M^1, L^2\}M^2 + L^2\{L^1M^2, M^2\} \\
&= \{L^1, L^2\}_{r,r'} M^1M^2 + L^2L^1\{M^1, M^2\}_{r',r''} \\
&= (rL^1L^2 - L^1L^2r')M^1M^2 + L^1L^2(r'M^1M^2 - M^1M^2r'') \\
&= rL^1L^2M^1M^2 - L^1L^2M^1M^2r'' \\
&= rL^1M^1L^2M^2 - L^1M^1L^2M^2r'' = rN^1N^2 - N^1N^2r''. \quad \square
\end{aligned}$$

1.2 $\mathfrak{d} = \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ 上の mCYBE+UC と $D = G\times G$ 上の Poisson 構造

$D = G\times G$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ とおく. 埋め込み $G, \mathfrak{g} \subset M_n(\mathbb{C})$ を用いて $D, \mathfrak{d} \subset M_n(\mathbb{C})\times M_n(\mathbb{C})$ と埋め込んでおく. $M_n(\mathbb{C})^2 = M_n(\mathbb{C})\times M_n(\mathbb{C})$ は自然に $\mathbb{C}$ 上の結合的代数とみなされる.

$\mathbb{C}$ の元を $\mathfrak{g}$ の元を成分に持つサイズ 2 の列ベクトルで表わし, $\operatorname{End}\mathfrak{d}$ の元を $\operatorname{End}\mathfrak{g}$ の元を成分に持つ 2×2 行列で表わす. $\mathfrak{d}$ 上の非退化な不変対称二次形式 $(\ ,\ )$ を次のように定める:

$$\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix}\right) = (X, X') - (Y, Y') \qquad (X, X', Y, Y' \in \mathfrak{g}).$$

これを用いて $\mathfrak{d}^* = \mathfrak{d}$ とみなし, $\operatorname{End}\mathfrak{d} = \mathfrak{d}\otimes\mathfrak{d}^* = \mathfrak{d}\otimes\mathfrak{d}$ と同一視する.

$s=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in \operatorname{End}\mathfrak{d}$, $a,b,c,d\in\operatorname{End}\mathfrak{g}$ と仮定する．このとき $s^*=\begin{bmatrix} a^* & -c^* \\ -b^* & d^* \end{bmatrix}$ であり，s が mCYBE と UC を満たしていることと以下が成立していることは同値である:

(a) a,d が UC を満たしておりかつ $b^*=c$.

(b) a,d が mCYBE を満たしておりかつ

$$c([aX,Y]+[X,aY])=[cX,cY],\quad b([dX,Y]+[X,dY])=[bX,bY].$$

$s,s',s''\in\operatorname{End}\mathfrak{d}$ が mCYBE と UC を満たしていると仮定する．このとき定理 1.3 と系 1.4 より D に Poisson 構造 $\{\ ,\ \}_{s,s'}$ を入れることができ，群の演算が定める写像 $D_{s,s'}\times D_{s',s''}\to D_{s,s''}$ は Poisson 写像であり，$D_{s,s}$ は Poisson 群になる．

$\{\ ,\ \}_{s,s'}$ の具体形を書き下したい．埋め込み $D=G\times G\to M_n(\mathbb{C})\times M_n(\mathbb{C})$ の第 $1,2$ 成分をそれぞれ L,M と表わす．$s,s'\in\operatorname{End}\mathfrak{d}$ であるとし，$s=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $s'=\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ $(a,b,c,d,a',b',c',d'\in\operatorname{End}\mathfrak{g}=\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*=\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})$ と表わしておく．$a=\sum_i A_i\otimes A'_i$, $b=\sum_j B_j\otimes B'_j$, $c=\sum_k C_k\otimes C'_k$, $d=\sum_l D_l\otimes D'_l$ と表わすとき，s は次のように $\mathfrak{d}\otimes\mathfrak{d}$ の元と同一視される:

$$s=\sum_i\begin{bmatrix} A_i \\ 0 \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} A'_i \\ 0 \end{bmatrix}-\sum_j\begin{bmatrix} B_j \\ 0 \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} 0 \\ B'_j \end{bmatrix}+\sum_k\begin{bmatrix} 0 \\ C_k \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} C'_k \\ 0 \end{bmatrix}-\sum_l\begin{bmatrix} 0 \\ D_l \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} 0 \\ D'_l \end{bmatrix}.$$

s' についても同様である．このことから $\{\ ,\ \}=\{\ ,\ \}_{s,s'}$ が次を満たしていることがわかる:

$$\begin{aligned}\{L^1,L^2\}&=aL^1L^2-L^1L^2a', & \{L^1,M^2\}&=-bL^1M^2+L^1M^2b',\\ \{M^1,L^2\}&=cM^1L^2-M^1L^2c', & \{M^1,M^2\}&=-dM^1M^2+M^1M^2d'.\end{aligned}$$

L,M の成分たちは D 上の函数環の生成元になっているので，これらの条件によって $D_{s,s'}$ 上の Poisson 構造は一意に特徴付けられる．

補題 1.5 $D_{s,s'}$ 上の Poisson 構造は次を満たしている:

$$\begin{aligned}\{(LM^{-1})^1,(LM^{-1})^2\}&=a(LM^{-1})^1(LM^{-1})^2+(LM^{-1})^2b(LM^{-1})^1\\ &\quad-(LM^{-1})^1c(LM^{-1})^2-(LM^{-1})^1(LM^{-1})^2d\\ &\quad-L^1L^2(a'+b'-c'-d')(M^1M^2)^{-1}.\quad\square\end{aligned}$$

証明. 上で述べた $D_{s,s'}$ 上の Poisson 構造を特徴付ける公式を使うと，

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\{L^1(M^1)^{-1},L^2(M^2)^{-1}\}\\ &=\{L^1,L^2\}(M^1)^{-1}(M^2)^{-1}\\ &-L^2(M^2)^{-1}\{L^1,M^2\}(M^2)^{-1}(M^1)^{-1}\\ &-L^1(M^1)^{-1}\{M^1,L^2\}(M^1)^{-1}(M^2)^{-1}\\ &+L^1L^2(M^1)^{-1}(M^2)^{-2}\{M^1,M^2\}(M^1)-1(M^2)^{-1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (aL^1L^2 - L^1L^2a')(M^1)^{-1}(M^2)^{-1} \\
&- L^2(M^2)^{-1}(-bL^1M^2 + L^1M^2b')(M^2)^{-1}(M^1)^{-1} \\
&- L^1(M^1)^{-1}(cM^1L^2 - M^1L^2c')(M^1)^{-1}(M^2)^{-1} \\
&+ L^1L^2(M^1)^{-1}(M^2)^{-1}(-dM^1M^2 + M^1M^2d')(M^1)^{-1}(M^2)^{-1} \\
&= (\text{右辺}). \quad \square
\end{aligned}
$$

次の定理の前半は古典 r 行列入門 (`Classical-r.pdf`) の系 18.4 で示されており, 後半は上の補題を用いて示される.

定理 1.6 $s = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \operatorname{End}\mathfrak{d}$ $(a, b, c, d \in \operatorname{End}\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$ が mCYBE と UC を満たしているとき, G 上に Poisson 構造を次の公式によって定めることができる:

$$
\{N^1, N^2\} = aN^1N^2 + N^2bN^1 - N^1cN^2 - N^1N^2d.
$$

ここで N は G の $M_n(\mathbb{C})$ への埋め込みである. この Poisson 構造を入れた G を $G_s = G_{a,b,c,d}$ と書くことにする. このときさらに $s' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \in \operatorname{End}\mathfrak{d}$ $(a', b', c', d' \in \operatorname{End}\mathfrak{g})$ が mCYBE と UC と $a' + b' = c' + d'$ を満たしているならば, 全射

$$
D_{s,s'} = G \times G \to G_s = G_{a,b,c,d} = G, \quad (L, M) \mapsto N = LM^{-1}
$$

は Poisson 写像になる. $\square$

さらに $D_{s,s}$ が Poisson 群になり, 群の演算が定める写像 $D_{s,s} \times D_{s,s'} \to D_{s,s'}$ が Poisson 写像になることに注意すれば上の定理から次の結果がただちに導かれる.

系 1.7 上の定理の状況のもとで写像

$$
D_{s,s} \times G_s \to G_s, \quad ((L, M), N) \mapsto LNM^{-1}
$$

は $D_{s,s}$ の G_s への Poisson 作用を定める. $\square$