古典 r 行列入門

黒木 玄

2001 年 6 月 8 日〜7 月 9 日[*] [†]

目 次

---

[*] これはプレインテキスト版が作成された日付けである．TEX 版は 2002 年 1 月 23 日に作成された．筆者の疑問や意見は 2001 年 7 月時点のものであり，現在では解決や変化している場合がある．Notation や convention を変更するごとに重複を厭わずに何度も同じことを説明したのでかなり冗長になってしまった．同一の結果を複数回証明している場合もある．

[†] 2005 年 1 月 2 日〜5 日　幾つかのタイポの修正．

Part 1 (2001年6月8日)

ソリトン系の基本は Lie algebra および Lie group を上と下に分解することでした. そのような分解の問題一般を factorization problem と言います. 可積分系の世界では factorization problem は classical r-matrix および quantum R-matrix と関係しているというのが常識になっています. このノートでは classical r-matrix に関して初等的なことを説明します.

以下, 基礎体は $\mathbb{C}$ であるとする.

1 主要な例

一般的な定義は後回しにして, 主要な具体例を紹介しておく.

$\mathfrak{g}$ は Lie algebra で, $r_+ : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は任意の線形写像であるとき, r と r_- を以下の式によって定める:

$$r_+ + r_- = r, \quad r_+ - r_- = 1.$$

逆に, r, r_- のどちらかが与えられれば残りがこの関係式によって決定される:

$$r = 2r_+ - 1 = 2r_- + 1, \quad r_+ = (r+1)/2 = 1 + r_-, \quad r_- = (r-1)/2 = 1 - r_+.$$

そして, $r_+ - r_- = 1$ より, 任意の $X \in \mathfrak{g}$ は,

$$X = X_+ - X_-, \quad X_+ := r_+(X), \quad X_- := r_-(X)$$

と分解される. ただし, $\mathfrak{g}$ 自身が

$$\mathfrak{g}_+ := r_+(\mathfrak{g}), \quad \mathfrak{g}_- := r_-(\mathfrak{g})$$

の線形直和に分解されているとは限らないし, $\mathfrak{g}_+$, $\mathfrak{g}_-$ が $\mathfrak{g}$ の subalgebra になっているとも限らないことに注意せよ.

1.1 standard r-matrix of symmetrizable Kac-Moody algebra

$\mathfrak{g}$ は Kac-Moody algebra であり, その三角分解を次のように書いておく:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$$

これに関する $X \in \mathfrak{g}$ の分解を

$$X = F(X) + H(X) + E(X)$$

と書き,

$$r_+(X) := \frac{1}{2}H(X) + E(X)$$

と置くと,

$$r_-(X) = -\frac{1}{2}H(X) - F(X), \quad r(X) = E(X) - F(X).$$

以上の $r_+, r_-, r \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ を Kac-Moody algebra $\mathfrak{g}$ の **standard r-operators** と呼ぶことにする.

このとき,

$$\mathfrak{g}_+ = r_+(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+, \quad \mathfrak{g}_- = r_-(\mathfrak{g}) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-.$$

よって, $\mathfrak{g}_+ \cap \mathfrak{g}_- = \mathfrak{h} \neq 0$ である.

さらに, $\mathfrak{g}$ が symmetrizable であると仮定する. このとき, $\mathfrak{g}$ には標準的な invariant non-degenerate symmetric bilinear form $(\ |\ )$ が定義されている. それを利用して $\mathfrak{g}$ とその dual space $\mathfrak{g}^*$ を同一視し, さらに,

$$\mathrm{End}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$

と同一視しておく. ($\mathfrak{g}$ が無限次元のとき, $\mathfrak{g}^*$ は $\mathfrak{g}$ 自身に同型ではないので, テンソル積の元は適切な意味で無限和を許しておかなければいけない.)

この同一視のもとで, $r_+, r_-, r \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ は以下のような $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ の元と同一視される:

$$\begin{aligned}
r_+ &= \frac{1}{2}\sum_i H_i \otimes H^i + \sum_{\alpha,j} E_{\alpha,j} \otimes F_{\alpha,j}, \\
r_- &= -\frac{1}{2}\sum_i H_i \otimes H^i - \sum_{\alpha,j} F_{\alpha,j} \otimes E_{\alpha,j}, \\
r &= \sum_{\alpha,j} E_{\alpha,j} \otimes F_{\alpha,j} - \sum_{\alpha,j} F_{\alpha,j} \otimes E_{\alpha,j}.
\end{aligned}$$

ここで, H_i, H^i は $\mathfrak{h}$ の dual bases であり, $E_{\alpha,j}, F_{\alpha,j}$ は $\mathfrak{n}_+, \mathfrak{n}_-$ の dual root bases である. α は positive roots 全体を動き, j は α に対応する root space の次元の分だけ動く. (有限次元単純 Lie 環であれば root space は全て 1 次元なので, j は必要ない. しかし, symmetrizable Kac-Moody algebra の場合は real root に対応する root space は 1 次元だが, imaginary root に対応する root space の次元はそうとは限らないので j が必要になる.)

以上の $r_+, r_-, r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ を symmetrizable Kac-Moody algebra $\mathfrak{g}$ の **standard r-matrix** と呼ぶことにする.

テンソル積の順序の交換を

$$\sigma(A \otimes B) := B \otimes A$$

と書くことにすると,

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$

と同一視するとき, テンソル積の順序交換 $\sigma : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ は $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g})$ における転置写像を取る操作に対応している.

$r_+, r_-, r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ に関して,

$$r_- = -\sigma(r_+), \quad r = -\sigma(r)$$

が成立している. この条件は r-matrix の **unitarity condition** と呼ばれており, r-operators に関する次の条件と同値である:

$$(r_+(X)|Y) + (X|r_-(Y)) = 0, \quad (r(X)|Y) + (X|r(Y)) = 0.$$

以上の classical r-matrix の理論の量子化が Drinfeld-Jimbo の量子展開環の universal R-matrix の理論である.

1.2 rational r-matrix

任意の Lie algebra $\mathfrak{a}$ に付随する $z=\infty$ における loop Lie algebra $\mathfrak{g}$ を次のように定義する:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{a}((z^{-1}))=\{\sum A_i z^i \mid A_i\in\mathfrak{g},\ A_i=0 \text{ if } i\gg 0\}$$

$\mathfrak{g}$ の subalgebras $\mathfrak{g}_+$, $\mathfrak{g}_-$ を次のように定める:

$$\mathfrak{g}_+=\mathfrak{a}[z],\quad \mathfrak{g}_-=z^{-1}\mathfrak{a}[[z^{-1}]].$$

$\mathfrak{g}$ からこのそれぞれへの projection を p_+, p_- と書くことにする. このとき,

$$r_+=p_+$$

と置くと,

$$r_-=-p_-,\quad r=p_+-p_-.$$

以上の $r_+,r_-,r\in\operatorname{End}(\mathfrak{g})$ を loop Lie algebra $\mathfrak{g}$ の **rational r-operators** と呼ぶことにする.

さらに, $\mathfrak{a}$ は invariant non-degenerate symmetric bilinear form $(\ |\ )$ を持つと仮定し, $\mathfrak{g}$ に自然に拡張しておく. このとき, $\mathfrak{g}$ の invariant non-degenerate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ を次のように定義できる:

$$\langle X(z),Y(z)\rangle:=\operatorname{Res}[(X(z)|Y(z))z^{-1}\,dz]\quad(X(z),Y(z)\in\mathfrak{g}).$$

ここで, $\operatorname{Res}[f(z)\,dz]=(f(z)$ の z^{-1} の係数$)$ である. $(\ |\ )$, $\langle\ ,\ \rangle$ によって, $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{g}^*$ のそれぞれと $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}$ を同一視しておく. ($\mathfrak{a}$ が有限次元ならば $\mathfrak{a}$ の dual space $\mathfrak{a}^*$ は $\mathfrak{a}$ に同型になり, $\mathfrak{g}$ の topological dual space $\mathfrak{g}^*$ は $\mathfrak{g}$ に同型になる.)

$\langle\ ,\ \rangle$ に関して $\mathfrak{g}_+$ と $\mathfrak{g}_-$ は自分自身と直交し, $\langle\ ,\ \rangle$ の $\mathfrak{g}_+\times\mathfrak{g}_-$ 上への制限は non-degenerate である.

そのことより, rational r-operators が unitarity を満たしていることがわかる.

$\mathfrak{g}_+$ と $\mathfrak{g}_-$ の dual bases として,

$$A_i z^j\in\mathfrak{g}_+,\quad A^i z^{-j-1}\in\mathfrak{g}_-$$

が取れる. ここで, A_i, A^i は $\mathfrak{a}$ の dual bases であり, $j\geq 0$ である.

よって, $r_+=p_+\in\operatorname{End}(\mathfrak{g})$ は $\operatorname{End}(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*=\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ という同一視のもとで以下のような表示を持つ:

$$r_+=\sum_i\sum_{j\geq 0}(A_i z^j)\otimes(A^i z^{-j-1})\in\mathfrak{g}_+\otimes\mathfrak{g}_-.$$

さらに $r_+=p_+$ は $z:=z\otimes 1$, $w:=1\otimes z$ と置くと次のようにも書ける:

$$r_+=\Omega\sum_{j\geq 0}z^j w^{-j-1},\quad \Omega=\sum A_i\otimes A^i$$

これを **rational r-matrix** と呼ぶ. $r_+=p_+$ が次のような核函数表示を持つことも注意しておく:

$$r_+(X(z))=\operatorname*{Res}_{w=\infty}\left[\frac{X(w)\,dw}{z-w}\right].$$

実際, $|w| > |z|$ のとき,

$$(z-w)^{-1} = \sum_{j\geq 0} z^j w^{-j-1}$$

なので, $X(z) = \sum_{i\leq M} X_i z^i$ に対して,

$$\frac{X(w)\,dw}{z-w} = \sum_{i\leq M, j\geq 0} X_i z^j w^{i-j-1}\,dw \xrightarrow{\mathrm{Res}_w} \sum_{0\leq i\leq M} X_i z^i = r_+(X(z)).$$

核函数 $(z-w)^{-1}\,\mathrm{id}$ は $\mathrm{End}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}$ という同一視のもとで, 次に対応している:

$$r_+(z,w) = \frac{\Omega}{z-w}, \quad \Omega = \sum_i A_i \otimes A^i.$$

ここで, 上と同様に A_i, A^i は $\mathfrak{a}$ の dual bases である. これが一般に rational r-matrix と呼ばれるものである. すなわち, 広く rational r-matrix と呼ばれているものは, rational r-operator r_+ の核函数のことである.

1.3 elliptic r-matrix

前節の rational r-matrix の構成を elliptic curve 上のある種の捻られた $SL(n)$-bundle の場合に一般化することによって, elliptic r-matrix を定義することができる. 面倒なのでここでは紹介しない.

詳しい内容については Dynamical System VII [ReyS] の 188-190 頁および Belavin and Drinfeld [BD] を参照せよ.

1.4 multi-pointed case

さらに, $\mathbb{P}^1$ もしくは elliptic curve 上の N 個の点を考えた場合に rational および elliptic r-matrix の理論を拡張することができる. $\mathbb{P}^1$ 上に無限遠点 ∞ の 1 点のみを考えた場合が rational r-matrix の理論であり, ある種の $SL(n)$-bundle が乗っている elliptic curve 上に 1 点を指定した場合の理論が elliptic r-matrix の理論である. N 点に拡張された r-matrix は 1 点の場合の r-matrix の和で書ける.

詳しい内容については Dynamical System VII [ReyS] の 143-146, 191-192 頁を見よ.

2 classical r-operator および r-matrix の一般論

この節では Lie algebra $\mathfrak{g}$ に invariant non-degenerate symmetric bilinear form の存在を仮定せずに, r-operators $r_+, r_-, r \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ の一般論を説明する.

前節と同じように以下のような状況を考える.

$\mathfrak{g}$ は Lie algebra で, $r_+ : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は任意の線形写像であるとき, r と r_- を以下の式によって定める:

$$r_+ + r_- = r, \quad r_+ - r_- = 1.$$

逆に, r, r_- のどちらかが与えられれば残りがこの関係式によって決定される:

$$r = 2r_+ - 1 = 2r_- + 1, \quad r_+ = \frac{r+1}{2} = 1 + r_-, \quad r_- = \frac{r-1}{2} = 1 - r_+.$$

そして, $r_+ - r_- = 1$ より, 任意の $X \in \mathfrak{g}$ は,

$$X = X_+ - X_-, \quad X_+ := r_+(X), \quad X_- := r_-(X)$$

と分解される. ただし, $\mathfrak{g}$ 自身が

$$\mathfrak{g}_+ := r_+(\mathfrak{g}), \quad \mathfrak{g}_- := r_-(\mathfrak{g})$$

の線形直和に分解されているとは限らないし, $\mathfrak{g}_+$, $\mathfrak{g}_-$ が $\mathfrak{g}$ の subalgebra になっているとも限らないことに注意せよ.

以上の状況のもとで $\mathfrak{g}$ にもとから定まっている Lie bracket とは別に r-**bracket** $[\ ,\ ]_r$ を次のように定める:

$$[X, Y]_r = [X_+, Y_+] - [X_-, Y_-].$$

ここで, $X_+ = r_+(X)$, $X_- = r_-(X)$, etc である. $\mathfrak{g}$ にもとからある Lie bracket ではなく, $\mathfrak{g}$ に積演算として r-bracket を入れたものを $\mathfrak{g}_r$ と書くことにする:

$$\mathfrak{g}_r = (\text{ベクトル空間 } \mathfrak{g} \text{ に積演算 } [\ ,\ ]_r \text{ を入れたもの}).$$

r-bracket は常に

$$[Y, X]_r = -[X, Y]_r$$

を満たしているが, Jacobi 律を満たしているとは限らない.

一般に Lie algebra $(\mathfrak{a},\ [\ ,\ ])$ と数 c に対して, Lie bracket を c 倍した $(\mathfrak{a}, c[,])$ も Lie algebra をなす. $(\mathfrak{a},\ c[\ ,\ ])$ を以下では $c\mathfrak{a}$ と書くことにする. $-\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{a}$ の opposite Lie algebra と呼ぶ.

命題 2.1 もしも, $\mathfrak{g}_+ = r_+(\mathfrak{g})$ と $\mathfrak{g}_- = r_-(\mathfrak{g})$ が $\mathfrak{g}$ の subalgebra であり, $\mathfrak{g}$ がそれらの線形直和に分解しているならば, r-bracket は Jacobi 律を満たし, $\mathfrak{g}_r$ は $\mathfrak{g}_+$ と $\mathfrak{g}_-$ の opposite $-\mathfrak{g}_-$ の直積と自然に同型である. そして, r_+, r_- を $\mathfrak{g}_r$ から $\mathfrak{g}$ への 線形写像とみたものは Lie algebra homomorphism になる.

証明. $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ (subalgebras の線形直和) であると仮定し, $\mathfrak{g}_+$, $\mathfrak{g}_-$ のそれぞれへの projections を p_+, p_- と書くと,

$$r_+ = p_+, \quad r_- = -p_-$$

である. r-bracket の定義式より, r-bracket は $\mathfrak{g}_+$ 上では $\mathfrak{g}_+$ の Lie bracket に等しく, $\mathfrak{g}_-$ 上では $\mathfrak{g}_-$ の Lie bracket の -1 倍に等しい. そして, r-bracket に関して $\mathfrak{g}_+$ と $\mathfrak{g}_-$ は互いに可換である. よって, $\mathfrak{g}_r$ は $\mathfrak{g}_+ \times (-\mathfrak{g}_-)$ に同型である. $r_+ = p_+$, $r_- = -p_-$ が $\mathfrak{g}_r$ から $\mathfrak{g}$ への Lie algebra homomorphism であることもすぐにわかる. $\square$

より一般に r-bracket が Jacobi 律を満たすことと $r_\pm : \mathfrak{g}_r \to \mathfrak{g}$ が Lie algebra homomorphism であることのあいだには次のような関係がある.

定理 2.2 定理 2.2: 以下は互いに同値である:

(1) $r_+ : \mathfrak{g}_r \to \mathfrak{g}$ は bracket を保つ:

$$r_+([X, Y]_r) = [r_+(X), r_+(Y)].$$

(2) $r_- : \mathfrak{g}_r \to \mathfrak{g}$ は bracket を保つ:

$$r_-([X,Y]_r) = [r_-(X), r_-(Y)].$$

(3) $r : \mathfrak{g}_r \to \mathfrak{g}$ は次を満たしている:

$$2r([X,Y]_r) - [r(X), r(Y)] = [X,Y].$$

これらの条件のうちどれかが成立すれば r-bracket は Jacobi 律を満たし, $\mathfrak{g}_r$ は Lie algebra になり, $r_\pm : \mathfrak{g}_r \to \mathfrak{g}$ は Lie algebra homomorphism になる. □

証明は後で行なう.

定義 2.3 (classical r-operator and factorizable Lie algebra) 上の定理の条件を満たしている $r_\pm, r$ を **classical r-operators** と呼ぶことにする. そのとき, $\mathfrak{g}$ もしくは $(\mathfrak{g}, r)$ を仮に **factorizable Lie algebra** と呼ぶことにする. □

例 2.4 (factored Lie algebra) 任意の Lie algebra $\mathfrak{g}$ がその subalgebras $\mathfrak{g}_\pm$ の直和に分解されているとき, $\mathfrak{g}$ を仮に **factored Lie algebra** と呼ぶことにする. そのとき, $\mathfrak{g}_\pm$ への projections を $p_\pm$ と書き, $r_+ = p_+$ (そのとき $r_- = -p_-$, $r = p_+ - p_-$) と置くと, 命題 2.1 より, $(\mathfrak{g}, r)$ は factorizable Lie algebra になる.

すなわち, factored Lie algebra は factorizable である.

逆に, $(\mathfrak{g}, r)$ が factorizable Lie algebra でかつ, $\mathfrak{g}$ がベクトル空間として subalgebras $\mathfrak{g}_+ = r_+(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}_- = r_-(\mathfrak{g})$ の直和に分解されるとき, $\mathfrak{g}$ は factored である.

すなわち, factored Lie algebra と $r_\pm(\mathfrak{g})$ の線形直和に分解されるような factorizable Lie algebra は一対一に対応する. □

注意 2.5 (modified classical Yang-Baxter equation との関係) r-bracket を $r_\pm, r$ のうちから r だけを用いて,

$$[X,Y]_r = \frac{1}{2}([r(X), Y] + [X, r(Y)])$$

と表わすことができる. 実際,

$$\begin{aligned} 2(\text{右辺}) &= [X_+ + X_-, Y_+ - Y_-] + [X_+ - X_-, Y_+ + Y_-] \\ &= [X_+, Y_+] - [X_-, Y_-] = 2(\text{左辺}). \end{aligned}$$

一般に数 c に対して, $r \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ に関する方程式

$$r([r(X), Y] + [X, r(Y)]) - [r(X), r(Y)] = c^2[X,Y] \qquad (\mathrm{mCYBE}(c^2))$$

を **modified classical Yang-Baxter equation** と呼ぶ. 定理 2.2 の条件 (3) は r が mCYBE(1) を満たしているという条件と同値である. r が mCYBE(c^2) を満たしているとき, 数 a に対する ar は mCYBE($(ac)^2$) を満たしている. よって, $c \neq 0$ に対する mCYBE(c^2) の解 r が得られたなら, $c^{-1}r$ は mCYBE(1) の解である. 例えば, $r = 1$ は mCYBE(1) を満たしている. パラメータ c^2 はそうなるように入れた. □

注意 2.6 (classical Yang-Baxter equation との関係) r-bracket は次のような表示を持つ:

$$[X,Y]_r = [r_+(X),Y] + [X,r_-(Y)] = [r_-(X),Y] + [X,r_+(Y)].$$

実際,

$$\begin{aligned}
[r_+(X),Y] + [X,r_-(Y)] &= [X_+, Y_+ - Y_-] + [X_+ - X_-, Y_-] \\
&= [X_+,Y_+] - [X_-,Y_-], \\
[r_-(X),Y] + [X,r_+(Y)] &= [X_-, Y_+ - Y_-] + [X_+ - X_-, Y_+] \\
&= -[X_-,Y_-] + [X_+,Y_+].
\end{aligned}$$

$\mathfrak{g}$ に invariant non-degenerate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ が入っていると仮定する. $f:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ に対して, その転置写像 $f^*:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ が

$$\langle f(X),Y\rangle = \langle X, f^*(Y)\rangle$$

によって定められているとする. もしも, $r_- = -r_+^*$ (unitarity) が成立しているとすれば, r-bracket は

$$[X,Y]_r = [r_+(X),Y] - [X,r_+^*(Y)] = [r_-(X),Y] - [X,r_-^*(Y)]$$

と r_+ もしくは r_- の片方だけを用いた表示を持つ.

一般に $f\in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ に関する方程式

$$f([f(X),Y] - [X,f^*(Y)]) - [f(X),f(Y)] = 0 \tag{CYBE'}$$

を f に関する **classical Yang-Baxter equation** と呼ぶ.

Unitarity $r_- = -r_+^*$ が成立しているとき, 定理 2.2 の条件 (1), (2) はそれぞれ r_+, r_- が CYBE' を満たしているという条件と同値である.

$\mathrm{End}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ という同一視を

$$\langle X, f(Y)\rangle = \langle X\otimes Y, f\rangle \quad (\text{左辺の } f\in\mathrm{End}(\mathfrak{g}),\ \text{右辺の } f\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})$$

によって行ない, $f=\sum a_i\otimes b_i$ と書き,

$$f^{12} = \sum a_i\otimes b_i\otimes 1, \quad f^{13} = \sum a_i\otimes 1\otimes b_i, \quad f^{32} = \sum 1\otimes b_i\otimes a_i$$

と置くと,

$$\begin{aligned}
\langle X, f([f(Y),Z])\rangle &= \langle X\otimes Y\otimes Z, [f^{13}, f^{32}]\rangle, \\
-\langle X, f([Y,f^*(Z)])\rangle &= \langle X\otimes Y\otimes Z, [f^{12}, f^{32}]\rangle, \\
-\langle X, [f(Y),f(Z)]\rangle &= \langle X\otimes Y\otimes Z, [f^{13}, f^{12}]\rangle
\end{aligned}$$

なので, $f\in\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ に関する方程式 CYBE' は $f\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ に関する次の方程式に書き変えることができる:

$$[f^{13},f^{32}] + [f^{12},f^{32}] + [f^{13},f^{12}] = 0. \tag{CYBE}$$

classical Yang-Baxter equation はこの形に書かれることが多い. □

補題 2.7 (定理 2.2 の証明の Step 1) 次の公式が成立している:

$$
\begin{aligned}
2r[X,Y]_r - [rX, rY] - [X,Y] &= 4(r_+[X,Y]_r - [r_+X, r_+Y]) \\
&= 4(r_-[X,Y]_r - [r_-X, r_-Y]).
\end{aligned}
$$

記号の簡単化のために $rX = r(X)$, etc と括弧を省略して書いた. この公式から, 定理 2.2 の条件 (1), (2), (3) が互いに同値であることがすぐにわかる.

証明. $X_+ = r_+X$, $X_- = r_-Y$, etc. と書くと次が成立している:

$$
\begin{aligned}
&2r[X,Y]_r - [rX, rY] - [X,Y] \\
=&2r[X,Y]_r - [X_+ + X_-, Y_+ + Y_-] - [X_+ - X_-, Y_+ - Y_-] = 2A.
\end{aligned}
$$

ここで, $A = r[X,Y]_r - [X_+, Y_+] - [X_-, Y_-]$ と置いた. そして,

$$
\begin{aligned}
A &= (2r_+ - 1)[X,Y]_r - [X_+, Y_+] - [X_-, Y_-] \\
&= 2r_+[X,Y]_r - [X_+, Y_+] + [X_-, Y_-] - [X_+, Y_+] - [X_-, Y_-] \\
&= 2r_+[X,Y]_r - 2[X_+, Y_+] \\
&= 2(r_+[X,Y]_r - [X_+, Y_+]), \\
A &= (2r_- + 1)[X,Y]_r - [X_+, Y_+] - [X_-, Y_-] \\
&= 2r_-[X,Y]_r + [X_+, Y_+] - [X_-, Y_-] - [X_+, Y_+] - [X_-, Y_-] \\
&= 2r_-[X,Y]_r - 2[X_-, Y_-] \\
&= 2(r_-[X,Y]_r - [X_-, Y_-]). \quad \square
\end{aligned}
$$

補題 2.8 (定理 2.2 の証明の Step 2) 次の公式が成立している:

$$
4([X,[Y,Z]_r]_r + \text{c.p.}) = [X, 2r[Y,Z]_r - [rY, rZ]] + \text{c.p.}
$$

ここで, c.p. は cyclic permutations の略で, 前項の中の (X,Y,Z) を (Y,Z,X), (Z,X,Y) に置き換えて足し上げた和を意味している. この公式より, もしも定理2.2 の (3) $2r[Y,Z]_r - [rY, rZ] = [Y,Z]$ が成立していれば, 右辺が Lie bracket $[\ ,\ ]$ の Jacobi 律より 0 になるので, r-bracket $[\ ,\ ]_r$ が Jacobi 律を満たすことがわかる.

証明. 以下のように計算すれば良い:

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} = [rX, [rY, Z]] &+ [rX, [Y, rZ]] + [X, 2r[Y,Z] + r] \\
&+ [rY, [rZ, X]] + [rY, [Z, rX]] + [Y, 2r[Z,X] + r] \\
&+ [rZ, [rX, Y]] + [rZ, [X, rY]] + [Z, 2r[X,Y] + r].
\end{aligned}
$$

この右辺の第 4 項と第 8 項の和は $[\ ,\ ]$ の Jacobi 律より,

$$
[rY, [rZ, X]] + [rZ, [X, rY]] = -[X, [rY, rZ]]
$$

なので,

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= (-[X, [rY, rZ]] + [X, 2r[Y,Z]_r]) + \text{c.p.} \\
&= [X, 2r[Y,Z]_r - [rY, rZ]] + \text{c.p.} = \text{右辺}. \quad \square
\end{aligned}
$$

3　factorizable Lie algebra に関係した各種 factorizations

$(\mathfrak{g}, r)$ は factorizable Lie algebra であれば, 任意の $X \in \mathfrak{g}$ は

$$X = r_+(X) - r_-(X)$$

と一意的に分解される. これを Lie algebra レベルでの factorization と呼ぶ.

定理 3.1 (群レベルでの factorization) $(\mathfrak{g}, r)$ は factorizable Lie algebra であるとする. G, G_r はそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_r$ を Lie algebra に持つ simply connected な Lie group であるとする. $r_\pm : \mathfrak{g}_r \to \mathfrak{g}$ は Lie algebra homomorphism なので, それらを微分として持つ群の準同型 $r_\pm : G_r \to G$ が一意に定まる. よって, G_r の G への左作用 $*$ を

$$g * x := r_+(g)\, x\, r_-(g)^{-1} \quad (g \in G_r,\ x \in G)$$

と定めることができる. そして, 写像 $I : G_r \to G$ を

$$I(g) := g * 1 \quad (g \in G_r)$$

と定めると, I は単位元の近傍で微分同相写像になる. すなわち, 単位元に十分近い任意の $x \in G$ は単位元に十分近い $g \in G_r$ によって

$$x = r_+(g) r_-(g)^{-1}$$

と一意的に表わされる. (この結果は $\mathfrak{g}$ が factored でなくても成立していることに注意せよ. 同様に $x = r_-(g)^{-1} r_+(g)$ の形の factrization も成立している.)

証明. $I : G_r \to G$ の単位元における微分は $r_+ - r_- = 1 : \mathfrak{g}_r \to \mathfrak{g}$ であることがわかる. よって, 逆写像定理より I は単位元の近傍で微分同相である. □

定理 3.2 (universal enveloping algebra レベルでの factorization) $(\mathfrak{g}, r)$ は factorizable Lie algebra であるとする. $r_\pm : \mathfrak{g}_r \to \mathfrak{g}$ は Lie algebra homomorphism なので, それらの拡張になっているような algebra homomorphism $r_\pm : U(\mathfrak{g}_r) \to U(\mathfrak{g})$ が一意に定まる. $U(\mathfrak{g}_r)$ の $U(\mathfrak{g})$ への左作用 $*$ を次のように定める:

$$a * x = \sum_i r_+(a_i'') a S(r_-(a_i'')) \quad (a \in U(\mathfrak{g}_r)).$$

ここで S は $U(\mathfrak{g})$ の antipode であり, a の coproduct を次のように表わした:

$$\Delta(a) = \sum_i a_i' \otimes a_i''.$$

これは $U(\mathfrak{g})$ に左 $U(\mathfrak{g}_r)$ 加群の構造を定め, $U(\mathfrak{g})$ は $U(\mathfrak{g}_r)$ 上の rank 1 の free module になる. よって, $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}_r) * 1$ であり, 任意の $x \in U(\mathfrak{g})$ は

$$x = a * 1 = \sum_i r_+(a_i') S(r_-(a_i'')) \quad (a \in U(\mathfrak{g}_r))$$

と一意的に表わされる. (この結果は $\mathfrak{g}$ が factored でなくても成立していることに注意せよ. 同様に $a = \sum_i S(r_-(a_i')) r_+(a_i'')$ の形の factrization も成立している.)

証明. $U(\mathfrak{g}_r)$ の左作用 $*$ は $\mathfrak{g}_r$ の $U(\mathfrak{g})$ における表現

$$A * x = r_+(A)x - xr_-(A) \quad (A \in \mathfrak{g}_r,\ x \in U(\mathfrak{g}))$$

の algebra homomorphism $U(\mathfrak{g}_r) \to \mathrm{End}(U(\mathfrak{g}))$ への一意的な拡張に等しい. よって, $*$ は $U(\mathfrak{g}_r)$ の $U(\mathfrak{g})$ における表現を定める.

Poincaré-Birkhoff-Witt の定理を用いて, $U(\mathfrak{g}_r)$ の PBW basis $\{a_i\}$ に対して, $x_i := a_i * 1$ と置くと, $\{a_i\}$ が $U(\mathfrak{g})$ の basis になることを示せる. (それなりに議論が必要である.)

そのことより, 任意の $a \in U(\mathfrak{g})$ が

$$x = \sum_i r_+(a_i')S(r_-(a_i'')), \quad a \in U(\mathfrak{g}_r)$$

と一意的に表示されることがわかる. □

注意 3.3 $U(\mathfrak{g})$ の completion の中に G の単位元の近傍が含まれているとみなせる. そのことを用いれば定理 3.2 から定理 3.1 を出すことができる. □

4 factorizable Lie algebra に付随した soliton system

$(\mathfrak{g}, r)$ は factorizable Lie algebra であり, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_r$ を Lie algebra として持つ simply connected な Lie group をそれぞれ G, G_r と書き, Lie algebra homomorphisms $r_\pm : \mathfrak{g}_r \to \mathfrak{g}$ に対応する Lie group homomorphism も $r_\pm : G_r \to G$ と書くことにする.

$P_i \in \mathfrak{g}$ $(i \in I)$ は互いに可換であると仮定し, 単位元に十分近い $x(0) \in G$ に対して,

$$x(t) := e^{\sum t_i P_i} x(0) \in G$$

と置き,

$$x(t) = g_-(t)^{-1} g_+(t), \quad g_\pm(t) = r_\pm(g(t)), \quad g(t) \in G_r$$

という分解を考える.

補題 4.1 Lie group homomorphism $s : G' \to G$ と G' 内の曲線 $g(t) \in G'$ に対して,

$$\partial_t(s(g(t)))s(g(t))^{-1} = s(\partial_t(g(t))g(t)^{-1}) \in \mathfrak{g}. \quad \square$$

$x = g_-^{-1} g_+$ の両辺を t_i で微分することによって次が得られる:

$$g_- P_i g_-^{-1} = \partial_i(g_+)g_+^{-1} - \partial_i(g_-)g_-^{-1}.$$

ここで $\partial_i = \partial/\partial t_i$. そして,

$$L_i := \partial_i(g)g^{-1} \in \mathfrak{g}_r, \quad B_i := r_+(L_i) \in \mathfrak{g}, \quad B_i^c := r_-(L_i) \in \mathfrak{g}$$

と置くと, 補題 4.1 より,

$$\partial_i(g_+)g_+^{-1} = B_i, \quad \partial_i(g_-)g_-^{-1} = B_i^c.$$

よって, ベクトル空間として $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_r$ であり, $r_+ - r_- = 1$ であることに注意すれば,

$$L_i = (r_+ - r_-)(L_i) = B_i - B_i^c = g_- P_i g_-^{-1}.$$

以上の公式と

$$[L_i, L_j] = 0$$

を使えば, 以下の Lax equation と zero curvature equation を簡単に導くことができる:

$$\partial_i L_j = [B_i, L_j], \quad [\partial_i - B_i, \partial_j - B_j] = 0.$$

G-valued wave function Ψ を次のように定める:

$$\Psi := g_- e^{\sum t_i P_i} = r_-(g(t)) e^{\sum t_i P_i}.$$

このとき,

$$L_i \Psi = \Psi P_i, \quad \partial_i(\Psi) = B_i \Psi.$$

以上の結果は全て, G 上のフロー $x(t) = e^{\sum t_i P_i} x(0)$ を

$$I : G_r \to G, \quad x \mapsto r_-(g)^{-1} r_+(g)$$

という写像によって G_r の単位元の近傍に引き戻すことによって得られた.

5 the double of factorizable Lie algebra

定義 2.3 で r-operators が指定されている Lie algebra $\mathfrak{g}$ を factorizable Lie algebra と呼ぶことにし, 例 2.4 でさらに $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{g}_+ = r_+(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}_- = r_-(\mathfrak{g})$ の線形直和になっているとき, $\mathfrak{g}$ を factored Lie algebra と呼ぶことにしたのであった. ここで, factorizable Lie algebra $\mathfrak{g}$ の double を次のように定義する.

定義 5.1 (double of factorizable Lie algebra) $(\mathfrak{g}, r)$ は factorizable Lie algebra であるとする. このとき, その double $\mathfrak{d} = D(\mathfrak{g})$ を以下のように定める:

$$\mathfrak{d} := \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}.$$

さらに,

$$\mathfrak{d}_+ := \{\, (X, X) \mid X \in \mathfrak{g} \,\} = \Delta(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{d},$$
$$\mathfrak{d}_- := \{\, (r_+(X), r_-(X)) \mid X \in \mathfrak{g}_r \,\} \subset \mathfrak{d}.$$

と置く. $\mathfrak{d}_+$ は $\mathfrak{g}$ に自然に同型であり, $\mathfrak{d}_-$ は $\mathfrak{g}_r$ に自然に同型である. $\mathfrak{d}$ はベクトル空間として subalgebras $\mathfrak{d}_\pm$ の直和に分解する. よって, factorizable Lie algebra $\mathfrak{g}$ の double $\mathfrak{d}$ は自然に factored Lie algebra になる. $\mathfrak{d}$ が $\mathfrak{d}_+$, $\mathfrak{d}_-$ の線形直和になることは, 方程式

$$(X, X) + (Y_+, Y_-) = (A, B)$$

が次のように一意的に解けることからわかる:

$$X = B_+ - A_-, \quad Y = A - B. \quad \square$$

以下, $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ は factorizable Lie algebra $\mathfrak{g}$ の double であるとする.

G, G_r はそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_r$ を Lie algebra に持つ simply connected な Lie group であるとする. このとき, $D = G \times G$ は $\mathfrak{d}$ を Lie algebra として持つ simply connected な Lie group である. $\mathfrak{d}_\pm$ に対応する D の subgroups をそれぞれ $D_\pm$ と書くことにする.

$D_+ = \Delta(G) = \{\,(g,g) \mid g \in G\,\}$ であるから, D_+ は G と同一視できる. 一方, D_- は次のように表わされる:

$$D_- = \{\,(r_+(g), r_-(g)) \mid g \in G_r\,\}.$$

D_- は G_r と局所同型である.

D/D_+ は次の対応によって G と多様体として同一視できる:

$$D/D_+ \cong G, \quad [(x,y)] \to xy^{-1}, \quad [(x,1)] \leftarrow x.$$

$(g,h) \in G$ の D/D_+ への作用

$$[(x,y)] \mapsto [(gx,hy)]$$

に対応する G への作用は次のようになる:

$$x \mapsto gxh^{-1}.$$

$(g,g) \in D_+$ $(g \in G)$ の D/D_+ への作用

$$[(x,y)] \mapsto [(gx,gy)]$$

に対応する G への作用は conjugation になる:

$$x \mapsto gxg^{-1}.$$

$(g_+, g_-) = (r_+(g), r_+(g)) \in G_r$ $(g \in G_r)$ の D/D_+ への作用

$$[(x,y)] \mapsto [(g_+x, g_-y)]$$

に対応する G への作用は次のようになる:

$$x \mapsto g_+xg_-^{-1}.$$

この作用は群レベルでの factorization に関する定理 3.2 で定めた G_r の G への作用と一致している.

Part 2 (2001年6月8日)

6 factorizable Lie algebra と可換微分作用素環の構成

$\mathfrak{g}$ は factorizable Lie algebra であるとし, $\mathfrak{g}_r$ は $\mathfrak{g}$ に r-bracket を入れた Lie algebra であるとする.

Lie algebra homomorphism $r_\pm : \mathfrak{g}_r \to \mathfrak{g}$ に対応する universal enveloping algebras のあいだの algebra homomorphism も $r_\pm$ と書くことにする.

定理 3.2 より, $I : U(\mathfrak{g}_r) \to U(\mathfrak{g})$ を

$$I(a) = \sum r_+(a'_i)S(r_-(a''_i)), \qquad \Delta(a) = \sum a'_i \otimes a''_i \quad (a \in U(\mathfrak{g}_r))$$

と定めると, I は左 $U(\mathfrak{g}_r)$ 加群としての同型写像である.

定理 6.1 $U(\mathfrak{g})$ の center を $Z(\mathfrak{g})$ と書くと, $Z(\mathfrak{g})$ の $U(\mathfrak{g}_r)$ への引き戻し $Z_r := I^{-1}(Z(\mathfrak{g}))$ は $U(\mathfrak{g}_r)$ の可換部分環である.

証明. $z \in Z_r$ と $I(z) = \sum r_+(z'_i)S(r_-(z''_i)) \in Z(\mathfrak{g})$ は同値である. よって, $x, y \in Z_r$ のとき,

$$\begin{aligned} I(xy) &= \sum r_+(x'_i y'_j)S(r_-(x''_i y''_j)) \\ &= \sum r_+(x'_i)r_+(y'_j)S(r_-(y''_j))S(r_-(x''_i)) \\ &= \sum r_+(x'_i)I(y)S(r_-(x''_i)) \\ &= \sum r_+(x'_i)S(r_-(x''_i))I(y) \qquad (\text{by } I(y) \in Z(\mathfrak{g})) \\ &= I(x)I(y) = I(y)I(x). \end{aligned}$$

1 行目は coproduct が algebra homomorphism であることより

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) = \sum x'_i y'_j \otimes x''_i y''_j$$

であることを用いた. 同様にして,

$$I(yx) = I(y)I(x) = I(x)I(y).$$

よって, $I(xy) = I(yx)$ である. I は同型写像なので特に単射であるから, $xy = yx$ である. □

$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_r$ を Lie algebra に持つ simply connected な Lie group を G, G_r と書くことにする. Lie algebra homomorphism $r_\pm : \mathfrak{g}_r \to \mathfrak{g}$ に対応する Lie group homomorphism も $r_\pm : G_r \to G$ と書くことにする.

$U(\mathfrak{g})$ の center $Z(\mathfrak{g})$ は G 上の両側 G 不変な微分作用素全体のなす環と自然に同一視できる.

$\mathfrak{g}_r$ を G_r 上の左 G_r 不変ベクトル場全体のなす Lie algebra と同一視すると, $U(\mathfrak{g}_r)$ は G_r 上の左 G_r 不変微分作用素全体のなす algebra とみなせる. 上の定理 6.1 は $U(\mathfrak{g})$ の center から G_r 上の左不変微分作用素からなる可換環を作る処方箋を与えていることになる.

注意 6.2 以上の結果は定理 A.5 と例 A.6 の factorizable Lie algebra 版である. 定理 A.5 は上の定理 6.1 の factored Lie algebra 版の一般化になっている. □

定理 6.1 の別証明. 写像 $I : G_r \to G$ を次のように定める:

$$I(x) = r_+(x)r_-(x)^{-1} \quad (x \in G).$$

U は G_r の単位元の開近傍であり, U 上で I は微分同相写像になっていると仮定する. I は G_r の左作用と可換である.

このとき, $\mathfrak{g}_r$ は U 上の左 G_r 不変ベクトル場全体のなす Lie algebra と同一視できる. I は G_r の左作用と可換であるから, $\mathfrak{g}_r$ は $I(U) \subset G$ 上の左 G_r 不変ベクトル場全体のなす Lie algebra と同一視できる. ここで, $g \in G_r$ の G への左作用 $\pi(g) : G \to G$ は

$$\pi(g)x := r_+(g)\, x\, r_-(g)^{-1} \quad (x \in G)$$

によって定義されていた. 結局, $U(\mathfrak{g}_r)$ はこの作用について不変な $I(U)$ 上の微分作用素全体のなす環と同一視できるのである. よって, $I(U)$ 上の両側 G 不変な微分作用素全体のなす環 $Z(\mathfrak{g})$ は $U(\mathfrak{g}_r)$ の可換部分環をなすことがわかる. このように証明すれば上の定理 6.1 の幾何学的意味がわかり易い. □

注意 6.3 定理 A.5 における $\mathcal{A}(U)$ は $\mathfrak{g}$ が factored の場合の $U(\mathfrak{g}_r)$ の一般化になっていることも注意しておく. そのことを確かめるために, 上の議論において, $\mathfrak{g}$ が subalgebras $\mathfrak{g}_\pm$ の線形直和になっていると仮定する. このとき, 少なくとも local に

$$G_r = G_+ \times G_-^{-1} \quad (G_-^{-1} \text{ は } G_- \text{ の opposite group})$$

であるから,

$$\mathcal{A}(U) = \{U \text{ 上の } G_+ \times G_- \text{ 不変微分作用素全体}\}$$

はまさに, U 上の左 G_r 不変微分作用素全体のなす環に一致している. ところが, その環は上の議論によって $U(\mathfrak{g}_r)$ と同一視できるのであった. 第 A.3 節はこの話を単純に一般化したに過ぎない. □

Part 3 (2001年6月10日)

7 再定式化 (r-pair の理論)

第2節で **factorizable Lie algebra** を Lie algebra $\mathfrak{g}$ と線形写像 $r_\pm : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ の組で以下を満たしているものと定義した:

(1) $r_+ - r_- = 1$.

(2) r-bracket $[\ ,\ ]_r$ を

$$[X, Y]_r := [r_+(X), r_+(Y)] - [r_-(X), r_-(Y)] \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

と定めると, 互いに同値な次の条件のどちらかが成立している:

$$r_+([X, Y]_r) = [r_+(X), r_+(Y)], \qquad r_-([X, Y]_r) = [r_-(X), r_-(Y)].$$

以上が factorizable Lie algebra の定義である. 以上の条件が成立しているとき, $\mathfrak{g}_r = (\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_r)$ は Lie algebra をなす.

例えば, $\mathfrak{g}$ が subalgebras $\mathfrak{g}_\pm$ の線形直和になっていて, それぞれへの射影が $p_\pm$ と書かれているとき, $r_+ = p_+$, $r_- = -p_-$ と置くと, $\mathfrak{g}$ は factorizable Lie algebra になる. このような factorizable Lie algebra を **factored Lie algebra** と呼ぶことにしたのであった.

以上の定義を (特に dynamical r-matrix の場合に) より一般化し易くなるように再定式化しておく.

定義 7.1 Lie algebras $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}$ のあいだの2つの Lie algebra homomorphisms

$$r_\pm : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$$

の組 $r_\pm$ を r-pair と呼ぶとにする. r-pair $r_\pm$ に対して,

$$I := r_+ - r_-$$

と置く. この設定は $\mathfrak{g}$ が factorizable Lie algebra で $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_r$ の場合の一般化になっている. □

(現時点では dynamical r-matrix に関する一般論はこの枠組で行なうのが良いだろうと考えている.)

定義 7.2 (factorizable r-pair) $I = r_+ - r_-$ が線形同型であるような r-pair $r_\pm$ を **factorizable r-pair** と呼ぶ. □

factorizable r-pair が上に述べた第2節の定義と本質的に等しいことを説明しよう. そのために, r-pair $r_\pm : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ に対する $I = r_+ - r_-$ 線形同型であると仮定する. このとき, 任意の $X, Y \in \mathfrak{g}'$ に対して, $r_\pm$ が Lie algebra homomorphism であることから

$$r_+([X, Y]') = [r_+(X), r_+(Y)], \quad r_-([X, Y]') = [r_-(X), r_-(Y)]$$

である．ここで, $\mathfrak{g}'$ の bracket を $[\ ,\ ]'$ と書いた．よって,

$$I([X,Y]') = [r_+(X), r_+(Y)] - [r_-(X), r_-(Y)].$$

この等式は, $\mathfrak{g}'$ と $\mathfrak{g}$ を I を用いて同一視したとき, $\mathfrak{g}'$ の bracket が r-bracket に等しいことを意味している．以上によって, factorizable r-pair が factorizable Lie algebra と本質的に同等な概念であることがわかった．

$r_\pm : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ が r-pair であるとき, それらの拡張になっているような algebra homomorphisms

$$r_\pm : U(\mathfrak{g}') \to U(\mathfrak{g})$$

が一意に存在する．$U(\mathfrak{g}')$ の $U(\mathfrak{g})$ への左作用 $*$ と右作用 $*$ を次のように定めることができる:

$$a * x = \sum r_+(a_i')\, x\, S(r_-(a_i'')) \quad (a \in U(\mathfrak{g}'),\ x \in U(\mathfrak{g})),$$
$$x * a = \sum S(r_-(a_i'))\, x\, r_+(a_i'') \quad (a \in U(\mathfrak{g}'),\ x \in U(\mathfrak{g})).$$

ここで, S は universal enveloping algebra の antipode であり, $a \in U(\mathfrak{g}')$ の coproduct を次のように書いた:

$$\Delta(a) = \sum a_i' \otimes a_i''.$$

これによって, $U(\mathfrak{g})$ は左 $U(\mathfrak{g}')$ 加群と右 $U(\mathfrak{g}')$ 加群の構造が入る．ただし, $U(\mathfrak{g}')$ の $U(\mathfrak{g})$ への左作用と右作用が一般に非可換であることに注意せよ．さらに, $I, J : U(\mathfrak{g}') \to U(\mathfrak{g})$ を

$$I(a) = a * 1 = \sum r_+(a_i')\, S(r_-(a_i'')) \quad (a \in U(\mathfrak{g}')),$$
$$J(a) = 1 * a = \sum S(r_-(a_i'))\, r_+(a_i'') \quad (a \in U(\mathfrak{g}'))$$

と定める．この I と J は $I = r_+ - r_- : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ の拡張になっている．それらを写像の合成で表わすと次のようになる:

$$I : U(\mathfrak{g}_r) \xrightarrow{\Delta} U(\mathfrak{g}_r) \otimes U(\mathfrak{g}_r) \xrightarrow{r_+ \otimes r_-} U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{1 \otimes S} U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{m} U(\mathfrak{g}),$$
$$J : U(\mathfrak{g}_r) \xrightarrow{\Delta} U(\mathfrak{g}_r) \otimes U(\mathfrak{g}_r) \xrightarrow{r_- \otimes r_+} U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{S \otimes 1} U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{m} U(\mathfrak{g}).$$

ここで, m は $U(\mathfrak{g})$ の積である．

以下はそれぞれ定理 3.2 の再掲と定理 6.1 の微小な拡張である．

定理 7.3 ($U(\mathfrak{g})$ の factorization) $r_\pm : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ が factorizable r-pair ならば上のように定義された $I, J : U(\mathfrak{g}') \to U(\mathfrak{g})$ は左, 右 $\mathrm{U}(\mathfrak{g}')$ 加群の同型写像である． $\square$

定理 7.4 ($U(\mathfrak{g}')$ の可換部分環の構成) $r_\pm : \mathfrak{g}' \to \mathfrak{g}$ が r-pair であり, $I = r_+ - r_-$ が単射であれば上の $I, J : U(\mathfrak{g}') \to U(\mathfrak{g})$ も単射であり, $U(\mathfrak{g})$ の center $Z(\mathfrak{g})$ の I, J による引き戻しはどちらも $U(\mathfrak{g}')$ の可換部分環である．

証明. I のみに関して証明すれば J についても同様に証明される．Poincaré-Birkhoff-Witt の定理より, $U(\mathfrak{g}')$ の PBW basis を I で移すと $U(\mathfrak{g})$ の中の一次独立な部分集合をなすことがわかる．よって I は単射である．$x, y \in I^{-1}(Z(\mathfrak{g}))$ のとき,

$$I(xy) = \sum r_+(x_i' y_j')\, S(r_-(x_i'' y_j''))$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum r_+(x_i')r_+(y_j')\,S(r_-(y_j''))\,S(r_-(x_i'')) \\
&= \sum r_+(x_i')\,I(y)\,S(r_-(x_i'')) \\
&= \sum r_+(x_i')\,S(r_-(x_i''))\,I(y) \qquad (\text{by } I(y) \in Z(\mathfrak{g})) \\
&= I(x)I(y) = I(y)I(x).
\end{aligned}
$$

2 つ目の等号では coproduct が algebra homomorphism であることより

$$
\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) = \sum x_i'y_j' \otimes x_i''y_j''
$$

であることを用いた. 同様にして,

$$
I(yx) = I(y)I(x) = I(x)I(y).
$$

よって, $I(xy) = I(yx)$ である. $I : U(\mathfrak{g}') \to U(\mathfrak{g})$ は単射なので $xy = yx$ である. □

以上の設定は群レベルでは以下の設定に対応している.

定義 7.5 群 G', G のあいだに 2 つの homomorphisms

$$
r_\pm : G' \to G
$$

の組 $r_\pm$ を (群の) r-pair と呼ぶ. □

群の r-pair $r_\pm : G' \to G$ が与えられているとする. G' の G への左作用 $*$ と右作用 $*$ を

$$
\begin{aligned}
g * x &:= r_+(g)\,x\,r_-(g)^{-1} \quad (g \in G',\ x \in G), \\
x * g &:= r_-(g)^{-1}\,x\,r_+(g) \quad (g \in G',\ x \in G)
\end{aligned}
$$

と定め, 写像 $I, J : G' \to G$ を

$$
\begin{aligned}
I(g) &:= g * 1 = r_+(g)\,r_-(g)^{-1} \quad (g \in G'), \\
J(g) &:= 1 * g = r_-(g)^{-1}\,r_+(g) \quad (g \in G')
\end{aligned}
$$

と定める.

定義 7.6 r-pair $r_\pm : G' \to G$ は Lie 群の r-pair であるとする. 互いに同値な以下の条件のどちらかが成立しているとき, $r_\pm$ は factorizable (resp. locally factorizable) であると言う:

(1) $I : G' \to G$ は微分同相 (resp. 単位元のある近傍で微分同相) である.

(2) $J : G' \to G$ は微分同相 (resp. 単位元のある近傍で微分同相) である. □

定理 7.7 Lie 群の r-pair が locally factorizable であるための必要十分条件は対応する Lie 環の r-pair が factorizable であることである. □

8 Lie bialgebra

さて, 以上の節で展開した一般論においては, Lie algebra $\mathfrak{g}$ に invariant non-degenerate symmetric bilinear form が入ってない状況を扱うようにして来た. この節以降では Lie bialgebra を扱うために積極的にそのような場合を扱うことになるだろう.

この節以降では矢の向きを逆にした世界の対象を意味する "co" のついた用語を自由に用いる. 例えば, coalgebra, coproduct, counit, Lie coalgebra, Lie cobracket, cocommutativity, co-anticommutativity, coassociativity, co-Jacobi identity, ...

定義 8.1 (Lie bialgebra) $\mathfrak{g}$ が **Lie bialgebra** であるとは, $\mathfrak{g}$ が Lie algebra でかつ Lie coalgebra であり, cobracket $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ が cocycle condition

$$\delta([X,Y]) = [\delta(X), \Delta(Y)] + [\Delta(X), \delta(Y)] \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

を満たしてことである. ここで右辺の各項は, cobracket を

$$\delta(X) = \sum X_i' \otimes X_i''$$

と書くとき,

$$[\delta(X), \Delta(Y)] = \sum([X_i', Y] \otimes X_i'' + X_i' \otimes [X_i'', Y].),$$
$$[\Delta(X), \delta(Y)] = \sum([X, Y_i'] \otimes Y_i'' + Y_i' \otimes [X, Y_i''].).$$

である. □

命題 8.2 $\mathfrak{g}$ は Lie algebra でかつ Lie coalgebra であると仮定する. dual number h (すなわち h は $h^2 = 0$ をみたす文字) を用意し,

$$\Delta_h := \Delta + h\delta : \mathfrak{g} \to U_h(\mathfrak{g}) := U(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[h]$$

と置くと, 以下は互いに同値である:

(1) $\mathfrak{g}$ は Lie bialgebra である.

(2) $\Delta_h([X,Y]) = [\Delta_h(X), \Delta_h(Y)] \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$.

(3) Δ_h は algebra homomorphism $\Delta_h : U(\mathfrak{g}) \to U_h(\mathfrak{g})$ に拡張可能である.

証明. (2) と (3) が同値であることは universal envelopint algebra の定義からわかる. (2) は次と同値である:

$$\Delta([X,Y]) + h\delta([X,Y]) = [\Delta(X), \Delta(Y)] + h([\Delta(X), \delta(Y)] + [\delta(X), \Delta(Y)]).$$

よって, (1) と (2) が同値であることがわかる. □

命題 8.3 $\mathfrak{g}$ が有限次元 Lie bialgebra であれば $\mathfrak{g}^*$ も自然に Lie bialgebra になる.

証明. $\mathfrak{g}^*$ の bracket $[\ ,\ ] : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ と cobracket $\delta : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}$ の cobracket と bracket の dual として,

$$\langle [A,B], X\rangle = \langle A\otimes B, \delta(X)\rangle \quad (A,B\in\mathfrak{g}^*,\ X\in\mathfrak{g}),$$
$$\langle \delta(A), X\otimes Y\rangle = \langle A, [X,Y]\rangle \quad (A\in\mathfrak{g}^*,\ X,Y\in\mathfrak{g})$$

と定めることができる. $\mathfrak{g}$ が Lie coalgebra でかつ Lie algebra であることから, $\mathfrak{g}^*$ が Lie algebra でかつ Lie coalgebra であることはすぐに出る. そして,

$$\langle \delta([A,B]), X\otimes Y\rangle = \langle A\otimes B, \delta([X,Y])\rangle,$$
$$\langle [\delta(A),\Delta(B)] + [\Delta(A),\delta(B)], X\otimes Y\rangle = \langle A\otimes B, [\delta(X),\Delta(Y)] + [\Delta(X),\delta(Y)]\rangle$$

が成立するので, $\mathfrak{g}^*$ の cobracket が cocycle condition を満たすことと $\mathfrak{g}$ の cobracket が cocycle condition を満たすことは同値である. □

注意 8.4 $\mathfrak{g}$ は無限次元とする. このとき, $(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})^*$ は $\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^*$ よりも真に大きいので, $\mathfrak{g}$ の bracket の dual は写像 $\delta : \mathfrak{g}^* \to (\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})^*$ を定めるが, $\delta : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^*$ を定めるとは限らない. 一方, $\mathfrak{g}$ の cobracket の dual は $\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^* \subset (\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})^*$ であるから, $[\ ,\ ]^* : \mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ は常に well-defined である. □

注意 8.5 Lie bialgebras は自然に category をなす. 例えば, 有限次元の Lie bialgebra $\mathfrak{g}$ に対して, Lie subalgebra $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ が Lie sub-bialgebra であるための必要十分条件は

$$\mathfrak{h}^\perp = \{\, A\in\mathfrak{g}^* \mid \langle A,\mathfrak{h}\rangle = 0 \,\}$$

が $\mathfrak{g}^*$ の Lie ideal をなすことである. そのとき, $\mathfrak{h}^* = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}^\perp$ にも自然に Lie algebra 構造が入り, それによって $\mathfrak{h}$ は Lie bialgebra をなす. 逆に Lie ideal $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ が Lie bi-ideal であるための必要十分条件は $\mathfrak{h}^\perp$ が $\mathfrak{g}^*$ の subalgebra をなすことである. そのとき, $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^* = \mathfrak{h}^\perp$ にも Lie algebra 構造が入り, それによって $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ は bialgebra をなす. □

9 quasitriangular Lie bialgebra and factorizable Lie bialgebra

さて, co-bracket が r-matrix で表示されている場合について説明しよう[1].
一般に任意の $r\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ に対して $\delta_r : \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ を

$$\delta_r(X) = [\Delta(X), r]$$

と定めると, δ_r は cocycle condition を自動的に満たしている. 実際,

$$\begin{aligned}\delta_r([X,Y]) &= [\Delta([X,Y]), r] \\ &= [[\Delta(X),\Delta(Y)], r] \\ &= [[\Delta(X), r], \Delta(Y)] + [\Delta(X), [\Delta(Y), r]]\end{aligned}$$

[1] この節における $r\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ は第 1 節における記号では r_+ に対応している. 第 1 節における $r = r_+ + r_-$ と混同しないように注意せよ.

$$= [\delta_r(X), \Delta(Y)] + [\Delta(X), \delta_r(Y)].$$

しかし, δ_r が Lie coalgebra の公理は満たしているとは限らない.

δ_r が co-anticommutative law を満たしているための必要十分条件は,

$$[\Delta(X), r^{12} + r^{21}] = 0 \quad (X \in \mathfrak{g})$$

が成立することである. ここで,

$$(X \otimes Y)^{12} = X \otimes Y, \quad (X \otimes Y)^{21} = Y \otimes X,$$

と書いた. 例えば, **unitarity condition**

$$r^{21} = -r^{12} \tag{UC}$$

が成立していれば十分である. $\mathfrak{g}$ が invariant nondegenerate symmetric bilinear form を持ち, $\Omega \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ がその Casimir element であるとき,

$$r^{12} + r^{21} = \mathrm{const.}\, \Omega$$

が成立していても δ_r は co-anticommutative law を満たしている.

δ_r が co-Jacobi law を満たしているための必要十分条件について説明しよう. 次の公式が成立している:

$$[(\delta_r \otimes 1)(\delta_r(X))]^{123} + \text{c.p.} = [\Delta^{(3)}(X), [r^{12}, r^{31}] + \text{c.p.}].$$

ここで, c.p. は $(1, 2, 3)$ に関する巡回和であり,

$$\Delta^{(3)}(X) = X \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes X \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes X.$$

よって, δ_r が co-Jacobi law を満たすための必要十分条件は

$$[r^{12}, r^{31}] + [r^{21}, r^{12}] + [r^{31}, r^{13}]$$

が $\mathfrak{g}$-invariant になることである. 特に次の **classical Yang-Baxter equation**

$$[r^{12}, r^{31}] + [r^{21}, r^{12}] + [r^{31}, r^{13}] = 0 \tag{CYBE}$$

が成立していれば, δ_r は co-Jacobi law を満たしている.

定義 9.1 Lie bialgebra $\mathfrak{g}$ の cobraket が

$$\delta(X) = [\Delta(X), r], \qquad r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$

と表示可能なとき, $(\mathfrak{g}, r)$ を **quasicoboundary Lie bialgebra** と呼ぶ. さらに, r を (UC) が成立するように取れるとき **coboundary Lie bialgebra** と呼び, (CYBE) が成立するように取れるとき **quasitriangular Lie bialgebra** と呼び, (UC) と (CYBE) の両方が成立するように取れるとき **triangular Lie bialgebra** と呼ぶ. □

定義 9.2 (factorizable Lie bialgebra) $(\mathfrak{g}, r)$ は quasitriangular Lie bialgebra であるとする. このとき, $r_\pm, I : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ を

$$r_+(A) = \sum a_i \langle A, b_i \rangle, \quad r_-(A) = -\sum \langle A, a_i \rangle b_i, \quad I := r_+ - r_-$$

と定める. ここで, $r = \sum a_i \otimes b_i$ である. $\mathfrak{g}$ は **factorizable Lie bialgebra** (もしくは **Baxter Lie bialgebra**) であると は I が線形同型になることである[2]. □

Baxter Lie bialgebra という呼び方は Dynamical System VII [ReyS] の p.201 の Definition 12.9 にあり, その脚註には “Another name sometimes used in the literature is ‘factorizable Lie bialgebra’.” と書いてある

定義 9.3 (factored Lie bialgebra) $(\mathfrak{g}, r)$ が factorizable Lie bialgebra で $\mathfrak{g}$ が $r_+(\mathfrak{g})$ と $r_-(\mathfrak{g})$ の線形直和になっているとき, $(\mathfrak{g}, r)$ を **factored Lie bialgebra** と呼ぶ[3]. □

定理 9.4 (有限次元の場合には) 次の 2 つの対象は自然に一対一に対応している:

- factorizable (resp. factored) Lie bialgebra
- invariant nondegenerate symmetric bilinear form $(\ ,\ )$ を持つ factorizable (resp. factored) Lie algebra で $(\ ,\ )$ に関して $r_- = -r_+^*$ を満たしているもの

ところで, $\mathfrak{g}^*$ の bracket は cobracket δ から,

$$\langle [A, B]^*, X \rangle = \langle A \otimes B, \delta(X) \rangle \qquad (A, B \in \mathfrak{g}^*,\ X \in \mathfrak{g})$$

によって定められ, $\mathfrak{g}_r = \mathfrak{g}$ の r-bracket は

$$\begin{aligned} [X, Y]_r &= [r_+(X), r_+(Y)] - [r_-(X), r_-(Y)] \\ &= [r_+(X), Y] + [X, r_-(Y)] \\ &= [r_-(X), Y] + [X, r_+(Y)] \end{aligned}$$

と定義されるのであった. $(\ ,\ )$ を用いて $\mathfrak{g}^*$ と $\mathfrak{g}_r$ を同一視すると, $[\ ,\ ]^* = -[\ ,\ ]_r$ が成立する. すなわち, Lie algebra として $\mathfrak{g}^* = -\mathfrak{g}_r$ とみなせる. (さらに, $\mathfrak{g}$ が factored ならば $\mathfrak{g}^* = -\mathfrak{g}_r = (-\mathfrak{g}_+) \times \mathfrak{g}_-$ が成立する.)

証明. 前者から後者への対応. $(\mathfrak{g}, r)$ は factorizable Lie bialgebra であるとし, $\mathfrak{g}$ 上の nondegenerate bilinear form $(\ ,\ )$ を

$$(X, Y) = \langle I^{-1}(X), Y \rangle \qquad (\text{i.e. } (IA, IB) = \langle A, IB \rangle)$$

と定める. $X \otimes Y \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ を $X\langle \bullet, Y \rangle \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g})$ と同一視すると, 定義 9.2 の $r_\pm$, I はそれぞれ

$$r_+ = r^{12}, \quad r_- = -r^{21}, \quad I = r^{12} + r^{21}$$

と表わせることを注意しておく. $r_\pm$ は

$$r_- = -r_+^* \qquad (\text{i.e. } \langle A, r_-(B) \rangle = \langle B, -r_+(A) \rangle)$$

[2] この定義の量子化について [ResS] を参照せよ.
[3] この用語が適切かどうかはわからない.

が成立するように定義されているので, $I^* = (r_+ - r_-)^* = I$ であるから, $(\ ,\ )$ は symmetric である. 実際,

$$(IA, IB) = \langle A, IB\rangle = \langle I^*A, B\rangle = \langle IA, B\rangle = \langle B, IA\rangle = (IB, IA).$$

そして, $\mathfrak{g}$ の cobracket の co-anticommutativity と同値な条件

$$[\Delta(X), I] = [\Delta(X), r^{12} + r^{21}] = 0 \quad (X \in \mathfrak{g})$$

を $I : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ の式に書き直すと,

$$[X, IA] = I(\mathrm{ad}^*(X)A) \quad (X \in \mathfrak{g}, A \in \mathfrak{g}^*)$$

となる. このことから, $(\ ,\ )$ が $\mathfrak{g}$-invariant であることもわかる. 実際,

$$([X, IA], Y) = (I(\mathrm{ad}^*(X)A), Y) = \langle \mathrm{ad}^*(X)A, Y\rangle = -\langle A, [X, Y]\rangle = -(IA, [X, Y]).$$

後者から前者への対応. $\mathfrak{g}$ は invariant nondegenerate symmetric bilinear form $(\ ,\ )$ を持つ factorizable Lie algebra で $(\ ,\ )$ に関して $r_- = -r_+^*$ が成立していると仮定する. $(\ ,\ )$ を用いて $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$ とみなし, $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ という同一視によって, $r_+ \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ に対応する $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ の元も r と書くことにする. 同じ対応で 1 に対応する $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ の元は Casimir element Ω であるから, $r_+ - r_- = 1$ より,

$$r^{12} + r^{21} = \Omega$$

が成立している. そして, 注意 2.6 で説明したようにこの r は CYBE も満たしている. よって, $(\mathfrak{g}, r)$ は factorizable Lie bialgebra である.

Lie algebra として $\mathfrak{g}^* = -\mathfrak{g}_r$ とみなせること. $[\ ,\ ]^*$ は以下のように計算される (以下 $r = \sum a_i \otimes b_i$):

$$\begin{aligned}
([A, B]^*, X) &= (A \otimes B, \delta(X)) \\
&= (A \otimes B, [X \otimes 1 + 1 \otimes X, \textstyle\sum a_i \otimes b_i]) \\
&= \textstyle\sum (A \otimes B, [X, a_i] \otimes b_i + a_i \otimes [X, b_i]) \\
&= \textstyle\sum (([a_i, A] \otimes B, X \otimes b_i) + (A \otimes [b_i, B], a_i \otimes X)) \\
&= \textstyle\sum (([a_i, A], X)(B, b_i) + (A, a_i)([b_i, B], X)) \\
&= ([r_+(B), A], X) - ([r_-(A), B], X) \\
&= -([r_-(A), B] + [A, r_+(B)], X). \\
&= -([A, B]_r, X).
\end{aligned}$$

よって, $[A, B]^* = -[A, B]_r$ である. □

10 Manin triples and the doubles of Lie bialgebras

定義 10.1 (Manin triple) invariant nondegenerate symmetric bilinear form $(\ ,\ )$ を持つ Lie algebra $\mathfrak{p}$ とその subalgebras $\mathfrak{p}_\pm$ の triple $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-)$ が Manin triple であるとは, $\mathfrak{p}_\pm$ が内積 $(\ ,\ )$ に関して isotropic であることである. (すなわち $\mathfrak{p}_\pm$ は自分自身と直交し, 内積の $\mathfrak{p}_+ \times \mathfrak{p}_-$ 上への制限が非退化であることである.) □

補題 10.2 (有限次元の場合) $\mathfrak{p}$ が Manin triple であるとき, $\mathfrak{p}_\pm$ への射影を $p_\pm$ と書き, $r_+ = p_+$, $r_- = -p_-$ と置くと, $(\mathfrak{p}, r)$ は factored Lie bialgebra をなす. そして, $\mathfrak{p}^* = -\mathfrak{p}_r = (-\mathfrak{p}_+) \times \mathfrak{p}_-$ が成立している.

証明. 定理 9.4 より $r_- = -r_+^*$ を示せば十分である. しかし,

$$(r_-(X), Y) = (r_-(X), p_+(Y)) = -(p_-(X), r_+(Y)) = -(X, r_+(Y)). \quad \square$$

命題 10.3 (有限次元の場合) $\mathfrak{p}$ が Manin triple であるとき, $(\ ,\ )$ を用いて $\mathfrak{p}_+ = \mathfrak{p}_-^*$ と同一視すると, $\mathfrak{p}_-$ の Lie bracket は $\mathfrak{p}_+$ に Lie cobracket を定める. これによって, $\mathfrak{p}_+$ は Lie bialgebra をなす.

証明. 補題 10.2 より $\mathfrak{p}$ は factored Lie bialgebra であり, $\mathfrak{p}^* = -\mathfrak{p}_r = (-\mathfrak{p}_+) \times \mathfrak{p}_-$ である. $\mathfrak{p}_+^\perp = \mathfrak{p}_+$ は $\mathfrak{p}^*$ の Lie ideal になるので, 注意 8.5 より $\mathfrak{p}_+$ は Lie sub-bialgebra であることがわかる. $\square$

この命題によって, Manin triple を構成すれば $\mathfrak{p}_+$ の形で Lie bialgebra の例を構成できる. 次の定理は逆に任意の有限次元 Lie bialgebra $\mathfrak{g}$ がある Manin triple における $\mathfrak{p}_+$ の形になることを意味している.

定理 10.4 (the double of a Lie bialgebra)) (有限次元の場合) $\mathfrak{g}$ は Lie bialgebra であるとする. このとき, 線形空間として

$$\mathfrak{p} := \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$$

と置き, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^*$ への projection をそれぞれ p_+, p_- と書くことにする. 以下簡単のため, $\mathfrak{g}$ の要素を X, Y, Z と書き, $\mathfrak{g}^*$ の要素を A, B, C と書くことにし, $\mathfrak{p}$ の要素を $(X, A) = X + A$ のように書くことにする. $\mathfrak{p}$ に nondegenerate symmetric biliear form $(\ ,\ )$ を

$$(X + A, Y + B) := \langle A, Y\rangle + \langle B, X\rangle$$

と定める. $\mathfrak{p}$ には $(\ ,\ )$ が invariant になるような Lie algebra structure で $\mathfrak{g}$ と $-\mathfrak{g}^*$ ($\mathfrak{g}^*$ の opposite) の Lie algebra structure の拡張になっているようなものが一意に存在する. $\mathfrak{p}_+ := \mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}_- := -\mathfrak{g}^*$ と置く. これによって, $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-)$ は Manin triple をなす. このとき, この $\mathfrak{p}$ を **Lie bialgebra $\mathfrak{g}$ の double** と呼ぶ.

証明. $\mathfrak{p}$ の bracket を $[\ ,\ ]_\mathfrak{p}$ と書くことにする. もしも, 条件を満たす Lie algebra structure が存在するとすれば,

$$[X, Y]_\mathfrak{p} = [X, Y], \tag{1}$$

$$[A, B]_\mathfrak{p} = -[A, B]. \tag{2}$$

であり, そして,

$$\begin{aligned}
([X, A]_\mathfrak{p}, Y) &= (A, -[X, Y]_\mathfrak{p}) = (A, -[X, Y]) \\
&= \langle A, -[X, Y]\rangle = \langle \mathrm{ad}^*(X)A, Y\rangle, \\
([X, A]_\mathfrak{p}, B) &= (X, [A, B]_\mathfrak{p}) = (X, -[A, B])
\end{aligned}$$

$$= \langle -[A,B], X\rangle = \langle B, \mathrm{ad}^*(A)X\rangle$$

であるから,

$$[X,A]_{\mathfrak{p}} = \mathrm{ad}^*(A)X + \mathrm{ad}^*(X)A. \tag{3}$$

同様にして,

$$[A,X]_{\mathfrak{p}} = -\,\mathrm{ad}^*(A)X - \mathrm{ad}^*(X)A. \tag{4}$$

以上の (1),...,(4) より $\mathfrak{p}$ の bracket は一意に定まる. この bracket が anti-commutativity を満たしていることはすぐにわかるので, Jacobi 律を満たしていることを示す. $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$ の Jacobi 律より,

$$[A,[X,Y]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} + \text{c.p.} = 0, \tag{5}$$

$$[X,[A,B]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} + \text{c.p.} = 0 \tag{6}$$

を示せば良い. 両者は同様のやり方で証明可能なので前者だけを示す. 次が成立する:

$$\begin{aligned}[A,[X,Y]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} + \text{c.p.} = &-\mathrm{ad}^*(A)[X,Y] \\ &+ [\mathrm{ad}*(A)X, Y] + [X, \mathrm{ad}^*(A)Y] \\ &- \mathrm{ad}^*(\mathrm{ad}^*(X)A)Y + \mathrm{ad}^*(\mathrm{ad}^*(Y)A)X \quad \in \mathfrak{g}\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}&\langle B,\ [A,[X,Y]_{\mathfrak{p}}]_{\mathfrak{p}} + \text{c.p.}\rangle \\ &= \langle A\otimes B,\ \delta([X,Y]) - [\Delta(X),\delta(Y)] - [\delta(X),\Delta(Y)]\rangle = 0.\end{aligned}$$

ここで最後の等号は δ に関する cocycle condition である. これで (5) が成立することを示せた. $\square$

Part 4 (2001年6月10日)

11 ちょっと休憩：二枚・三枚に開く話

野海さんの本

> 野海正俊, 『パンルヴェ方程式——対称性からの入門』, すうがくの風景 4, 朝倉書店, 2000.9

の 114 頁の脚註より:

> *1) 「2 枚に開く」, 「3 枚に開く」というのは, 高崎金久氏の用語. 「戸田格子というのは魚で, 二枚に開くとそれぞれの切り身は KP だという感じ」 (数理物理と佐藤幹夫先生 [下], 数学のたのしみ 14 (1999), 63-72, 日本評論社)

これにヒントを得て, ちょっと野海さんの意味からはずれてしまうのですが, 以下のような話を思い付きました.

「r-matrix は二枚に開き, dynamical r-matrix は三枚に開く」

その心は以下の通りです.

まず, r-matrix の理論はこの一連のノートで強調している見方によれば群を上三角と下三角の二枚に開く理論です. 実際, 定義 7.5 では Lie 群のあいだの 2 つの準同型

$$r_\pm : G' \to G$$

を考え,

$$J : G' \to G, \quad g \mapsto r_-(g)^{-1} r_+(g)$$

という写像を考え, r-matrix から得られる factorizable な場合は $r_\pm$ の場合は J が単位元の近傍で微分同相になっているのでした. すなわち, r-matrix によって, 単位元の近傍の $x \in G$ が

$$x = g_-^{-1} g_+ \qquad (g_\pm = r_\pm(g),\ g \in G') \tag{二枚開き}$$

と一意的に分解される. これを, 群 G を別の群 G' の作用で二枚に開いているいると言いたいのだ.

通常, $GL(n)$ のような reductive group G は適当な行列表現を選んで

$$\begin{aligned} N_+ &= \{\, 対角成分が全て 1 の上三角行列 \,\} \subset G, \\ H &= \{\, 対角行列 \,\} \subset G, \\ N_- &= \{\, 対角成分が全て 1 の下三角行列 \,\} \subset G \end{aligned}$$

と置き,

$N_- H N_+ \cong N_- \times H \times N_+$ は G の中で open dense

と三枚に開くのですが (これが野海さんの意味での「三枚に開く」), r-matrix の理論ではそのように考えずに真ん中の対角行列の部分を綺麗に半分に分けて, 二枚に開く理論なのだ.

例えば, stardard r-matrix の場合では,

$$
\begin{aligned}
&G' = \{\, (g_+, g_-) = (he, (fh)^{-1}) \mid e \in N_+,\ h \in H,\ f \in N_+ \,\},\\
&r_\pm(g_+, g_-) := g_\pm,
\end{aligned}
$$

と置き, 二枚開きの写像 $J : G' \to G$ を

$$
J(g_+, g_-) := g_-^{-1} g_+ = fh^2 e \in N_- H N_+
$$

と定めると, J は G' の単位元の近傍で微分同相である. $h^2 \in H$ の部分が上下に半分ずつ割りふられているのだ[4].

これに対して, dynamical r-matrix の理論は

上三角, dynamical variables の空間, 下三角

の三枚に開く理論です. dynamical variables の空間が出て来る分だけ, より本質的な三枚開きになっているはずなのだ.

その場合は上の J ではなく, G' の G への右作用

$$
x * g = g_-^{-1} x g_+ \quad (x \in G,\ g \in G',\ g_\pm = r_\pm(g))
$$

を考えなければいけないのだ. この作用で G を割ってできる $M = G/G'$ が dynamical variable の空間になる. 一般に X は全然多様体にならないが, G の開部分集合 U をうまく取って $M = U/G'$ を考えると, M は多様体になる場合がある. M の代表系 $\{q\}$ をうまく取っておけば, G の開部分集合上の点 x が

$$
x = g_-^{-1} q g_+ \tag{三枚開き}
$$

の形で一意に表示されることになる. これが dynamical r-matrix が出て来る場合の「三枚開き」です.

群 G が有限次元の場合に可積分系的に面白い例はどれだけありますかね?

以上のように「二枚に開く」「三枚に開く」という発想をすれば, 野海さんの本の内容の類似を dynamical r-matrix の意味で「三枚に開く」場合でやることができないかという問題が生じます. どれだけ面白いかわかりませんが, 興味のある方が何かやってみて面白いことが見付かったら教えて下さい.

---

[4] 背骨を縦に二等分している.

Part 5 (2001年6月5日)

12 the double of a factorizable Lie bialgebra

定理 10.4 で Lie bialgebra $\mathfrak{g}$ の double を構成した. この節では factorizable Lie bialgebra の double の構成について説明する. (factorizable Lie bialgebra (= Baxter Lie bialgebra) については第 9 の後半を見よ. 大雑把に言うと, factorizable Lie bialgebra とは非退化な r-matrix を持つような Lie bialgebra のことである. より一般に退化しているかもしれないが CYBE は満たしているような r-matrix を持つ Lie bialgebra は quasitriangular Lie bialgebra と呼ばれ, さらに r-matrix が unitarity condition を満たしている場合は triangular Lie bialgebra と呼ばれる.)

まず, Lie bialgebra $\mathfrak{g}$ の double について復習しよう.

定義 12.1 (Lie bialgebra の double) (有限次元の場合) $\mathfrak{g}$ が Lie bialgebra のとき,

$$\mathfrak{p} := \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$$

と置き, $\mathfrak{p}$ に nondegenerate symmetric biliear form $(\ ,\ )$ を

$$(X + A,\ Y + B) := \langle A, Y\rangle + \langle B, X\rangle \quad (X, Y \in \mathfrak{g},\ A, B \in \mathfrak{g}^*)$$

と定める. このとき, 以下の条件を満たす $\mathfrak{p}$ の Lie algebra structure が一意に存在する:

- $\mathfrak{g}$ と $-\mathfrak{g}^* = (\mathfrak{g}^*$ の opposite Lie algebra) は自然に $\mathfrak{p}$ の subalgebra とみなせる. (すなわち $\mathfrak{p}$ の bracket の $\mathfrak{g}$ 上への制限は $\mathfrak{g}$ のそれに等しく, $\mathfrak{p}$ の bracket の $\mathfrak{g}^*$ 上への制限は $\mathfrak{g}^*$ のそれの -1 倍に等しい.)

- $(\ ,\ )$ は $\mathfrak{p}$-invariant である.

このとき, $\mathfrak{p}$ の subalgebras $\mathfrak{p}_\pm$ を $\mathfrak{p}_+ := \mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}_- := -\mathfrak{g}^*$ と定めると, $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-)$ は Manin triple をなす. $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}$ の **double** と呼ぶ. (条件を満たす $\mathfrak{p}$ の Lie algebra structure の存在と一意性に関しては定理 10.4 の証明を参照せよ.) □

次の定理で示されるように, factorizable Lie bialgebra $\mathfrak{g}$ すなわち CYBE を満たす非退化な r-matrix を持つような Lie bialgebra $\mathfrak{g}$ の double は次の形で容易に構成可能である:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \qquad \langle (X, X'),\ (Y, Y')\rangle = \langle X, Y\rangle - \langle X', Y'\rangle.$$

定理 12.2 (factorizable Lie bialgebra の double) (有限次元の場合) $\mathfrak{g}$ は factorizable Lie bialgebra であるとする. すなわち, $\mathfrak{g}$ には invariant nondegenerate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ と線形写像 $r_\pm : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が定められていて, 以下が成立しているものとする:

- $r_+ - r_- = 1$.

- r-bracket を $[X, Y]_r := [r_+(X), r_+(Y)] - [r_-(X), r_-(Y)]$ と定め, $\mathfrak{g}$ に r-bracket $[\ ,\ ]_r$ を入れたものを $\mathfrak{g}_r$ と書くと, $\mathfrak{g}_r$ は Lie algebra をなし, $r_\pm$ は $\mathfrak{g}_r$ から $\mathfrak{g}$ への Lie algebra homomorphism をなす.

- $\langle\ ,\ \rangle$ に関して $r_- = -r_+^*$.

さらに,

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} = (\mathfrak{g} \text{ と } \mathfrak{g} \text{ の直積 Lie algebra}),\\
&\mathfrak{p}_+ := \Delta(\mathfrak{g}) = \{\,(X,X) \mid X \in \mathfrak{g}\,\},\\
&\mathfrak{p}_- := \{\,(r_+(X), r_-(X)) \mid X \in \mathfrak{g}\,\}
\end{aligned}$$

と置き, $\mathfrak{p}$ に invariant nondegenerate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$\langle (X,X'),\ (Y,Y') \rangle = \langle X, Y\rangle - \langle X', Y'\rangle \quad (X, X', Y, Y' \in \mathfrak{g})$$

と定める. このとき, $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-)$ は自然に Manin triple をなし, $\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{g}$ の double に同型である.

証明. 第 5 節より, $\mathfrak{p}$ は subalgebras $\mathfrak{p}_+$, $\mathfrak{p}_-$ の線形直和になっている. $\langle\ ,\ \rangle$ の $\mathfrak{p}_+ \times \mathfrak{p}_+$ および $\mathfrak{p}_- \times \mathfrak{p}_-$ 上への制限が 0 であり, $\mathfrak{p}_+ \times \mathfrak{p}_-$ 上への制限が nondegenerate であることを以下のように示すことができる. $X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して,

$$\langle (X,X), (Y,Y) \rangle = \langle X, Y\rangle - \langle X, Y\rangle = 0,$$

$$\begin{aligned}
&\langle (r_+(X), r_-(X)), (r_+(Y), r_-(Y)) \rangle\\
&= \langle r_+(X), r_+(Y)\rangle - \langle r_-(X), r_-(Y)\rangle\\
&= \langle r_+(X), r_+(Y)\rangle - \langle r_+(X), r_-(Y)\rangle + \langle r_+(X),\ r_-(Y)\rangle - \langle r_-(X), r_-(Y)\rangle\\
&= \langle r_+(X), Y\rangle + \langle X, r_-(Y)\rangle \quad (\text{by } r_+ - r_- = 1)\\
&= \langle r_+(X), Y\rangle - \langle r_+(X), Y\rangle \quad (\text{by } r_- = -r_+^*)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\langle (X,X), (r_+(Y), r_-(Y)) \rangle\\
&= \langle X, r_+(Y)\rangle - \langle X, r_-(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle \quad (\text{by } r_+ - r_- = 1).
\end{aligned}$$

これで, $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-)$ が Manin triple であることがわかった. よって, $X, X', Y, Y' \in \mathfrak{g}$ に対して, $Y_+ = r_+(Y)$, $Y_- = r_-(Y)$, etc. と置くと,

$$\begin{aligned}
&\langle (X,X) + (Y_+, Y_-),\ (X', X') + (Y'_+, Y'_-) \rangle\\
=&\langle (X,X),\ (Y'_+, Y'_-) \rangle + \langle (Y_+, Y_-),\ (X', X') \rangle.
\end{aligned}$$

これで, $\mathfrak{p}$ が $\mathfrak{g}$ の double であることもわかった. $\square$

Part 6 (2001年6月26日)

Sklyanin bracket やある意味でそれと正反対の性質を持つ Heisenberg bracket や [FM1], [Su1], [P] などによって得られた非常に一般的な quadratic Poisson bracket について解説します. このノートの最後で説明した文献を手許に用意して読むと良いと思います. 一般的な quadratic Poisson bracket が Jacobi 律を満たすことの証明が書かれた文献が見付からないので, このようなノートを作製しました. ポイントは全てを Schouten bracket の計算に帰着することです.

13 多様体上の k-vectors の Schouten bracket と Poisson 構造

M は多様体であるとする.

M 上の k-vector (field) とは M の tangent bundle の k 次の外積 $\bigwedge^k(TM)$ の section のことである. すなわち, k-vector は k-form の双対概念である.

M 上の k-vector と skew-symmetric multi-linear map $P : C^\infty(M)^k \to C^\infty(M)$ で

$$P(f_1, \dots, f_i g_i, \dots, f_k) = P(f_1, \dots, f_i, \dots, f_k) g_i + f_i P(f_1, \dots, g_i, \dots, f_k)$$
$$(f_i, g_i \in C^\infty(M),\ i = 1, \dots, k)$$

を満たすものは一対一に対応している.

M の local coordinate $x = (x^1, \dots, x^n)$ を取り, $\partial_i = \partial/\partial x^i$ と置くと, k-vector P は局所的に,

$$P = \sum P^{i_1 \dots i_k} \partial_{i_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{i_k}$$

と表わされる. ここで, $P^{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(M)$ であり, $P^{i_1 \dots i_k}$ は i_m たちの置換に関して skew symmetric である. そして, 函数 f_i たちへの多重線形作用は

$$P(f_1, \dots, f_k) = \sum P^{i_1 \dots i_k} \partial_{i_1}(f_1) \cdots \partial_{i_k}(f_k)$$

と書ける. 特に,

$$P(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = P^{i_1 \dots i_k}$$

である. すなわち, 座標 x_i たちへの多重線形作用を見れば P は局所的に一意に決定される.

M 上の k-vectors の空間を $V^k(M)$ と書くことにする. 2-vecotr は bivector と呼ばれることが多く, $\bigoplus V^k(M)$ の元は multi-vector と呼ばれる.

多様体 M 上の Poisson 構造とは線形写像 $\{\ ,\ \} : C^\infty(M) \otimes C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ で $C^\infty(M)$ に Lie algebra 構造を定め, 次を満たしているもののことである:

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\} \quad (f, g, h \in C^\infty(M)).$$

このとき, $\{\ ,\ \}$ は Poisson bracket と呼ばれ, M は Poisson 多様体と呼ばれる. M 上の bivector $P \in V^2(M)$ で対応する bracket $\{f, g\} = P(f, g)$ が Jacobi 律を満たすものと M 上の Poisson 構造は一対一に対応している. Poisson 構造に対応する bivector P は Poisson bivector と呼ばれる.

M 上の multi-vectors のなす代数 $\bigoplus V^k(M)$ は degree -1 の Schouten bracket

$$[[\ ,\ ]] : V^k(M) \otimes V^l(M) \to V^{k+l-1}(M)$$

によって super Poisson algebra の構造が入ることが知られている. Schouten bracket は以下の条件によって一意に特徴付けられる:

(0) $[[\ ,\ ]]$ は $V^k(M) \otimes V^l(M)$ を $V^{k+l-1}(M)$ の中にうつす.

(1) $[[Q, P]] = (-1)^{(k-1)(l-1)}[[P, Q]]$ for $P \in V^k(M)$, $Q \in V^l(M)$.

(2) $[[P, Q \wedge R]] = [[P, Q]] \wedge R + (-1)^{(k-1)l} Q \wedge [[P, R]]$ for $P \in V^k(M)$, $Q \in V^l(M)$, $R \in V^m(M)$.

(3) $[[f, g]] = 0$ for $f, g \in V^0(M) = C^\infty(M)$.

(4) $[[X, f]] = X(f)$ for $X \in V^1(M)$, $f \in C^\infty(M)$.

(5) $[[X, Y]] = [X, Y]$ for $X, Y \in V^1(M)$.

補題 13.1 $P \in V^2(M)$ に対して,

$$[[P, P]](f, g, h) = \frac{4}{3}\big(P(f, P(g, h)) + \text{c.p.}\big) \quad (f, g, h \in C^\infty(M))$$

ここで, c.p. は (f, g, h) の巡回置換に関する和である.

証明. Schouten bracket の定義より,

$$\begin{aligned}
&[[f\partial_i \wedge \partial_j,\ g\partial_k \wedge \partial_l]] \\
&= [[f\partial_i \wedge \partial_j, g]] \wedge \partial_k \wedge \partial_l + g[[f\partial_i \wedge \partial_j, \partial_k \wedge \partial_l]] \\
&= f[[\partial_i \wedge \partial_j, g]] \wedge \partial_k \wedge \partial_l + g[[f, \partial_k \wedge \partial_l]] \wedge \partial_i \wedge \partial_j \\
&= f(\partial_j(g)\partial_i - \partial_i(g)\partial_j) \wedge \partial_k \wedge \partial_l + g(\partial_l(f)\partial_k - \partial_k(f)\partial_l) \wedge \partial_i \wedge \partial_j
\end{aligned}$$

であるから, $P = \sum P^{ij}\partial_i \otimes \partial_j = \sum P^{ij}\partial_i \wedge \partial_j$ と書くと,

$$\begin{aligned}
[[P, P]] &= 4\sum P^{ij}\partial_j(P^{kl})\partial_i \wedge \partial_k \wedge \partial_l \\
&= \frac{4}{3}\sum P^{ij}\partial_j(P^{kl})(\partial_i \wedge \partial_k \wedge \partial_l + \text{c.p.}) \\
&= \frac{4}{3}\sum (P^{ij}\partial_j(P^{kl}) + \text{c.p.})\partial_i \wedge \partial_k \wedge \partial_l \\
&= \frac{4}{3}\sum (P^{ij}\partial_j(P^{kl}) + \text{c.p.})\partial_i \otimes \partial_k \partial_l.
\end{aligned}$$

ここで, c.p. は (i, k, l) の巡回置換に関する和である. 一方,

$$P(f, P(g, h)) = \sum P^{ij}\partial_j(P^{kl})\partial_i(f)\partial_k(g)\partial_l(h)$$

であるから, 補題が成立することがわかる. □

系 13.2 M 上の bivector P が Poisson であるための必要十分条件は $[[P,P]]=0$ が成立していることである.

証明. $\{\ ,\ \}$ を $\{f,g\}=P(f,g)$ と定めると, 補題 13.1 によって, $[[P,P]]=0$ は $\{\ ,\ \}$ に関する Jacobi 律と同値であることがわかる. □

系 13.3 M 上の bivector P が Poisson であるための必要十分条件は P の定める bracket が局所座標のレベルで Jacobi 律を満たしていることである.

証明. $\{f,g\}=P(f,g)$ と置くと,

$$\{x^i,\{x^k,x^l\}\}=\sum_j\{x^i,x^j\}\partial_j(\{x^k,x^l\})=\sum_j P^{ij}\partial_j(P^{kl})$$

であるから, $[[P,P]]=0$ と $\{\ ,\ \}$ が局所座標のレベルで Jacobi 律を満たしていることは同値である. □

$\phi:M\to N$ が Poisson 多様体間の写像であるとき, ϕ が Poisson であるとは,

$$\{\phi^*f,\phi^*g\}_M=\phi^*(\{f,g\}_N)\qquad (f,g\in C^\infty(N))$$

が成立していることである. ここで, ϕ^*f は ϕ と f の合成が定める M 上の函数である.

M, N が Poisson 多様体のとき, 次を満たす $M\times N$ 上の Poisson 構造が一意に定まる:

(1) $M\times N$ から M, N への射影は Poisson になる.

(2) M 上の函数の $M\times N$ への引き戻しと N 上の函数の $M\times N$ への引き戻しは Poisson bracket に関して互いに可換である.

よって, Poisson 多様体の直積は自然に Poisson 多様体とみなせる.

M, N の Poisson bivectors をそれぞれ P, Q と書くとき, 直積 Poisson 多様体 $M\times N$ の Poisson bivector R は次のように表わされる:

$$R_{(x,y)}=P_x+Q_y\in\bigwedge^2(T_xM)+\bigwedge^2(T_yN)\subset\bigwedge^2 T_{(x,y)}(M\times N).$$

ここで, $x\in M$, $y\in N$ である.

14 Lie 環から生成される外積代数における Schouten bracket

G は Lie 群であるとし, $\mathfrak{g}$ はその Lie algebra とする. 簡単のため G は行列群であると仮定する.

任意の $X\in\mathfrak{g}$ に対して, G 上のベクトル場 $X^R,X^L\in V^1(G)$ を次のように定める:

$$(X^Rf)(g):=[\partial_s f(e^{sX}g)]_{s=0},$$
$$(X^Lf)(g):=[\partial_s f(ge^{sX})]_{s=0}.$$

補題 14.1 X^R, X^L はそれぞれ $X \in \mathfrak{g}$ に対応する G 上の右不変ベクトル場と左不変ベクトル場であり, 以下を満たしている:

$$
\begin{aligned}
&[X^R, Y^R] = -[X, Y]^R, \\
&[X^L, Y^L] = [X, Y]^L, \\
&[X^R, Y^L] = 0 \qquad\qquad (X, Y \in \mathfrak{g}). \quad \square
\end{aligned}
$$

行列の積を用いれば, X^R, X^L は G 上の行列値函数と次のように同一視できる:

$$
X^R(g) = Xg, \quad X^L(g) = gX \qquad (X \in \mathfrak{g},\ g \in G).
$$

$\mathfrak{g}$ から生成される外積代数 $\bigwedge(\mathfrak{g}) = \bigoplus \bigwedge^k(\mathfrak{g})$ にも degree -1 の Schouten bracket が定義され, super Poisson algebra の構造が入ることが知られている. Schouten bracket は以下の条件によって一意に特徴付けられる:

(0) $[[\ ,\ ]]$ は $\bigwedge^k(\mathfrak{g}) \otimes \bigwedge^l(\mathfrak{g})$ を $\bigwedge^{k+l-1}(\mathfrak{g})$.

(1) $[[Q, P]] = (-1)^{(k-1)(l-1)}[[P, Q]]$ for $P \in \bigwedge^k(\mathfrak{g})$, $Q \in \bigwedge^l(\mathfrak{g})$.

(2) $[[P, Q \wedge R]] = [[P, Q]] \wedge R + (-1)^{(k-1)l} Q \wedge [[P, R]]$ for $P \in \bigwedge^k(\mathfrak{g})$, $Q \in \bigwedge^l(\mathfrak{g})$, $R \in \bigwedge^m(\mathfrak{g})$.

(3) $[[f, g]] = 0$ for $f, g \in \bigwedge^0(\mathfrak{g}) = C$.

(4) $[[X, f]] = 0$ for $X \in \bigwedge^1(\mathfrak{g})$, $f \in C$.

(5) $[[X, Y]] = [X, Y]$ for $X, Y \in \bigwedge^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.

ここで, 基礎体を C と書いた. 例えば, real Lie algebra の範疇で議論しているならば $C = \mathbb{R}$ であり, complex Lie algebra ならば $C = \mathbb{C}$ である.

$P \in \bigwedge^k(\mathfrak{g}) = \bigwedge^k(T_e G)$ に対して, G 上の k-vector $P^R, P^L \in V^k(G)$ を上と同様に次のように定める:

$$
P = \sum P_{i_1} \wedge \cdots \wedge P_{i_k}, \qquad P_{i_m} \in \mathfrak{g}
$$

のとき,

$$
\begin{aligned}
P^R &:= P^R_{i_1} \wedge \cdots \wedge P^R_{i_k} \in \bigwedge^k (T_g G), \\
P^L &:= P^L_{i_1} \wedge \cdots \wedge P^L_{i_k} \in \bigwedge^k (T_g G).
\end{aligned}
$$

これを行列の積を用いて書けば次のようになる:

$$
\begin{aligned}
P^R(g) &= (P_{i_1} g) \wedge \cdots \wedge (P_{i_k} g) \in \bigwedge^k (T_g G), \\
P^L(g) &= (g P_{i_1}) \wedge \cdots \wedge (g P_{i_k}) \in \bigwedge^k (T_g G).
\end{aligned}
$$

補題 14.2 $P \in \bigwedge(\mathfrak{g})$ を $P^R, P^L \in \bigoplus V^k(G)$ に対応させる写像は algebra homomorphism である．そして, $P, Q \in \bigwedge(\mathfrak{g})$ に対して,

$$[[P^R, Q^R]] = -[[P, Q]]^R,$$
$$[[P^L, Q^L]] = [[P, Q]]^L,$$
$$[[P^R, Q^L]] = 0.$$

証明. 補題 14.1 に帰着する． □

注意 14.3 この補題 14.2 を用いれば, Lie 群上の invariant k-vectors の Schouten bracket の計算を $\mathfrak{g}$ 上のそれに帰着できる．実際, Lie 群上の Sklyanin bracket が Jacobi 律を満たしていることの証明などで決定的な役目を果たし, 一般化された quadratic Poisson bracket が Jacobi 律を満たすための適切な十分条件を見付けるためにも役に立つ． □

注意 14.4 一般に G が多様体 M に右から作用しているとき, $X \in \mathfrak{g}$ に対して, M 上のベクトル場 $\lambda(X) \in V^1(M)$ が次のように定まる:

$$(\lambda(X)f)(x) = [\partial_s f(xe^{sX})]_{s=0}.$$

$\lambda : \mathfrak{g} \to V^1(M)$ は Lie algebra homomorphism である．このとき, λ は上と同様に, algebra homomorphism $\lambda : \bigwedge(\mathfrak{g}) \to \bigoplus V^k(M)$ に自然に拡張される．このとき,

$$[\lambda(X), \lambda(Y)] = \lambda([X, Y]) \qquad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

から, Schouten bracket に関する

$$[[\lambda(P), \lambda(Q)]] = \lambda([[P, Q]]) \qquad (P, Q \in \bigwedge(\mathfrak{g}))$$

が導かれる．同様に, G が多様体 M に左から作用しているとき, $X \in \mathfrak{g}$ に対して, M 上のベクトル場 $\rho(X) \in V^1(M)$ が次のように定まる:

$$(\rho(X)f)(x) = [\partial_s f(e^{sX}x)]_{s=0}.$$

$\rho : \mathfrak{g} \to V^1(M)$ は Lie algebra anti-homomorphism である．このとき, ρ は上と同様に, algebra homomorphism $\rho : \bigwedge(\mathfrak{g}) \to \bigoplus V^k(M)$ に自然に拡張される．このとき,

$$[\rho(X), \rho(Y)] = -\rho([X, Y]) \qquad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

から, Schouten bracket に関する

$$[[\rho(P), \rho(Q)]] = -\rho([[P, Q]]) \qquad (P, Q \in \bigwedge(\mathfrak{g}))$$

が導かれる．さらに, G の M への左作用と右作用が可換であれば,

$$[\rho(X), \lambda(Y)] = 0 \qquad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

が成立し, これから Schouten bracket に関する

$$[[\rho(P), \lambda(Q)]] = 0 \qquad (P, Q \in \mathfrak{g})$$

が導かれる． □

これ以後, $a=\sum A_i\otimes B_i\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ に対して,

$$\begin{aligned} a^{12} &= \sum A_i\otimes B_i\otimes 1, \\ a^{13} &= \sum A_i\otimes 1\otimes B_i, \\ a^{23} &= \sum 1\otimes A_i\otimes B_i, \\ a^{21} &= \sum B_i\otimes A_i\otimes 1, \\ a^{31} &= \sum B_i\otimes 1\otimes A_i, \\ a^{32} &= \sum 1\otimes B_i\otimes A_i \end{aligned}$$

と書くことにする.

$\mathfrak{g}$ には invariant nondegenerate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ が定められていると仮定する. このとき, $\mathrm{Ad}(G)$-invariant な $\Omega_3\in\bigwedge^3(\mathfrak{g})$ を

$$\langle\Omega_3,\ X\otimes Y\otimes Z\rangle := \langle[X,Y],\ Z\rangle \quad (X,Y,Z\in\mathfrak{g})$$

と定めることができる.

$a\in\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ に関する次の方程式を modified classical Yang-Baxter equation (mCYBE) と呼ぶ:

$$[a^{21},a^{13}]+\mathrm{c.p.}=\lambda^2\Omega_3. \tag{mCYBE$_\lambda$}$$

ここで, λ は定数であり, c.p. は $(1,2,3)$ の巡回置換に関する和を意味する. さらに, $f\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ に関する次の方程式を classical Yang-Baxter equation (CYBE) と呼ぶ:

$$[f^{21},f^{13}]+\mathrm{c.p.}=0. \tag{CYBE}$$

また, $f\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ が $f\in\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ であることを, f は skew symmetric であると言ったり, f は unitarity condition (UC) を満たすと言ったりする.

次の補題は mCYBE と Schouten bracket の関係を与える.

補題 14.5 $a\in\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ に対して,

$$[[a,a]]=-\frac{4}{3}([a^{21},a^{13}]+\mathrm{c.p.}).$$

すなわち, $[[a,a]]$ は mCYBE の左辺の $-4/3$ 倍である. □

証明は Schouten bracket の特徴付けの条件を用いて直接計算すれば得られる.

mCYBE の解 $a\in\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ は多くの場合において, 次の補題の方法を用いて構成される.

補題 14.6 $\mathfrak{g}$ は Lie algebra であり, invariant nondegenerate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ を持つとする. $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{n}_-$ は $\mathfrak{g}$ の subalgebras であり, 以下の条件を満たしていると仮定する:

(1) $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_-\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$ (線形直和),

(2) $\mathfrak{h}$ は Abelian であり, $[\mathfrak{h},\mathfrak{n}_\pm]\subset\mathfrak{n}_\pm$ でかつ, $\mathfrak{n}_\pm$ は $\mathfrak{h}$ に関して有限次元 root spaces の直和に分解する.

(3) $\langle \mathfrak{n}_+, \mathfrak{n}_+ \rangle = \langle \mathfrak{n}_-, \mathfrak{n}_- \rangle = \langle \mathfrak{h}, \mathfrak{n}_+ \rangle = \langle \mathfrak{h}, \mathfrak{n}_- \rangle = 0$.

$\langle\ ,\ \rangle$ の $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ と $\mathfrak{n}_+ \times \mathfrak{n}_-$ 上への制限は共に nondegenerate である. 以下, このような $\mathfrak{g}$ の分解を $\mathfrak{g}$ の三角分解と呼ぶことにする. このとき. $\mathfrak{h}$ の $\langle\ ,\ \rangle$ に関する dual bases を H_a, H^a と書き, $\mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{n}_-$ の dual bases を E_i, F_i と書き,

$$\begin{aligned} r_+ &= \frac{1}{2}\sum H_a \otimes H^a + \sum E_i \otimes F_i, \\ r_- &= -\frac{1}{2}\sum H^a \otimes H_a - \sum F_i \otimes E_i = -\sigma(r_+), \\ r &= r_+ + r_- = \sum (E_i \otimes F_i - F_i \otimes E_i) \end{aligned}$$

とおく. $A \wedge B = \frac{1}{2}(A \otimes B - B \otimes A)$ に注意すれば,

$$r = 2a, \qquad a = \sum E_i \wedge F_i \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$$

である. 一般に, $f = \sum A_i \otimes B_i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ に対して,

$$f(X) = \sum A_i \langle B_i, X \rangle \qquad (X \in \mathfrak{g})$$

と置き, $[\ ,\ ]_r$ を次のように定める:

$$[X, Y]_r := [r_+(X), r_+(Y)] - [r_-(X), r_-(Y)] \quad (X, Y \in \mathfrak{g})$$

このとき, 以下が成立している:

(1) $r_\pm$ は共に classical Yang-Baxter equation を満たしている.

(2) r は $\lambda = 1$ の modified classical Yang-Baxter equation を満たしている.

(3) a は $\lambda = \frac{1}{2}$ の modified classical Yang-Baxter equation を満たしている.

(4) $[\ ,\ ]_r$ は $\mathfrak{g}$ にもう一つの Lie algebra 構造を定める.

(5) $[X, Y]_r = [a(X), Y] + [X, a(Y)]$.

(6) その $\mathfrak{g}$ を $[\ ,\ ]_r$ によって Lie algebra とみなしたものを $\mathfrak{g}_r$ と書くと, $r_\pm$ は $\mathfrak{g}_r$ から $\mathfrak{g}$ への Lie algebra homomorphism である. □

15 tensor notation

M は多様体であるとし, P は M 上の bivector であるとし, 対応する bracket を

$$\{f, g\} := P(f, g) \qquad (f, g \in C^\infty(M))$$

と定めておく. M の局所座標 x^i を使うと, 局所的には

$$P = \sum P^{ij} \partial_i \otimes \partial_j, \qquad P^{ij} = \{x^i, x^j\}.$$

U, V はベクトル空間とし, M 上の U 値函数 F と V 値函数 G に対して, $U \otimes V$ 値函数 $\{F \underset{,}{\otimes} G\}$ を定義しよう. U の基底 u_i と V の基底 v_i を取り,

$$F = \sum f_i u_i, \quad G = \sum g_j v_j, \qquad f_i, g_i \in C^\infty(M)$$

と書いておき,

$$\{F \underset{,}{\otimes} G\} := \sum \{f_i, g_j\} u_i \otimes v_j$$

と定める. $\{F \underset{,}{\otimes} G\}$ は U, V の基底の取り方によらずに定まる. 基底を使わずに定義したければ, $u^* \in U^*$, $v^* \in V^*$ に対して,

$$\langle u^* \otimes v^*,\ \{F \underset{,}{\otimes} G\}\rangle := \{\langle u^*, F\rangle,\ \langle v^*, G\rangle\}$$

によって, $\{F \underset{,}{\otimes} G\}$ を定義すればよい. これがロシア学派によってよく使われている tensor notation である.

補題 15.1 多様体 M はベクトル空間 V の部分多様体であるとし, $L : M \to V$ は埋め込み写像であるとする. このとき, M 上の bivector P は $\{L \underset{,}{\otimes} L\}$ と自然に同一視できる:

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\} = P.$$

証明. P は M の任意の局所座標 x^i において次のように表わせる:

$$P = \sum \{x^i, x^j\} \partial_i \otimes \partial_j.$$

任意の $m \in M$ に対して, V^* の基底 $\{x^i\}_{i \in I} \cup \{y^a\}_{a \in A}$ をうまく取って, x^i の M 上への制限が m の近傍の局所座標を与えるようにできる. $\{u_i, v_a\} \subset V$ は $\{x^i, y^a\}$ の dual basis であるとする. このとき, L は局所的に,

$$L = \sum x^i(L) u_i + \sum y^a(L) v_a$$

と表わせる. M 上で y^a は x^i たちの函数とみなせるので,

$$\partial_i(L) = u_i + \sum \partial_i(y_a) v_a.$$

一方,

$$\begin{aligned}
\{L \underset{,}{\otimes} L\} &= \sum \{x^i, x^j\} u_i \otimes u_j \\
&\quad + \sum \{x^i, x^j\} \partial_j(y^b) u_i \otimes v_b \\
&\quad + \sum \{x^i, x^j\} \partial_i(y^a) v_a \otimes u_j \\
&\quad + \sum \{x^i, x^j\} \partial_i(y^a) \partial_j(y^b) v_a \otimes v_b \\
&= \sum \{x^i, x^j\} \partial_i(L) \otimes \partial_j(L).
\end{aligned}$$

よって, $\partial_i(L)$ と ∂_i を同一視すると,

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\} = P$$

とみなせる. $\square$

上の補題は, ロシア学派の論文によくあるように, Poisson bracket を定義するときに $\{L \underset{,}{\otimes} L\}$ の定義式を与えることは, Poisson bivector を与えることに他ならないことを意味している.

よって, tensor notation を intrinsic に理解するためには multi-vector (特に bivector) のレベルでその内容を理解すれば良い.

16 Poisson Lie group

Lie group G が Poisson であるとは, G が Poisson 多様体であり, G の積写像 $m : G \times G \to G$ が Poisson になること, すなわち,

$$\{f, g\}(xy) = \{f(\bullet\, y), g(\bullet\, y)\}(x) + \{f(x\,\bullet), g(x\,\bullet)\}(y) \tag{$*$}$$

が成立することである. ここで, $\{\ ,\ \}$ は G 上の Poisson brakcet であり, 右辺は $G \times G$ 上の Poisson bracket による $\{f(xy), g(xy)\}_{G\times G}$ に等しい.

Poisson Lie group において, G の逆元を取る写像は anti-Poisson になる (すなわち Poisson bracket をその -1 倍にうつす).

補題 16.1 G は Lie group であるとし, P はその上の bivector であるとし,

$$\{f, g\} = P(f, g) \qquad (f, g \in C^\infty(G))$$

と置き, P の $x \in G$ における値を $P_x \in \bigwedge^2(T_x G)$ と書く. さらに, G 上の $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ 値函数 ϕ, ψ を次のように定める:

$$\begin{aligned} \phi(x) &:= x^{-1} P_x, \\ \psi(x) &:= P_x x^{-1} \qquad (x \in G). \end{aligned}$$

このとき, 以下の条件は互いに同値である:

(1) 上の $(*)$ が成立する.

(2) $P_{xy} = P_x y + x P_y$.

(3) $\phi(xy) = \mathrm{Ad}(y^{-1})\phi(x) + \phi(y)$.

(4) $\psi(xy) = \mathrm{Ad}(x)\psi(y) + \psi(x)$.

ここで, Ad は G の adjoint representation の $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ への自然な拡張である.

証明. (2), (3), (4) の同値性は trivial であり,

$$\{f, g\}(xy) = P_{xy}(f, g),$$

$$\begin{aligned} &\{f(\bullet\, y), g(\bullet\, y)\}(x) + \{f(x\,\bullet), g(x\,\bullet)\}(y) \\ &= P_x(f(\bullet\, y), g(\bullet\, y)) + P_y(f(x\,\bullet), g(x\,\bullet)) \\ &= (P_x y)(f, g) + (x P_y)(f, g) \end{aligned}$$

であるから, (1) と (2) が同値であることがわかる. □

注意 16.2 G の左表現 V に値を持つ G 上の函数 ψ で

$$\psi(xy) = x\psi(y) + \psi(x) \qquad (x, y \in G)$$

を満たすものは一般に V を係数とする G の 1-cocycle と呼ばれている.

$v \in V$ に対して,

$$\psi_v(x) := xv - v$$

と置けば ψ_v は 1-cocycle である. 実際,

$$x\psi_v(y) + \psi_v(x) = x(yv - v) + xv - v = xyv - v = \psi_v(xy).$$

この ψ_v は 1-coboundary と呼ばれている. 上の定理の (4) の ψ は $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ を係数とする G の 1-cocycle である.

$\psi : G \to V$ が 1-cocycle であるとき, $\delta : \mathfrak{g} \to V$ を

$$\delta(X) := [\partial_s \psi(e^{sX})]_{s=0}$$

と定めると, δ は

$$\delta([X, Y]) = X\delta(Y) - Y\delta(X)$$

を満たしている. この条件を満たす $\delta : \mathfrak{g} \to V$ は一般に V 係数の $\mathfrak{g}$ の 1-cocycle と呼ばれている.

$v \in V$ に対する G の 1-coboundary $\psi_v(x) = xv - v$ $(x \in G)$ に対応する $\mathfrak{g}$ の 1-cocycle は

$$\delta_v(X) = [\partial_s e^{sX} v]_{s=0} = Xv \qquad (X \in \mathfrak{g})$$

となる. これが cocycle condition を満たしていることは, V が $\mathfrak{g}$ の表現になっていることと同値である:

$$\delta_v([X, Y]) = [X, Y]v = X(Yv) - Y(Xv) = X\delta_v(Y) - Y\delta_v(X). \quad \square$$

注意 16.3 $a \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ に対応する $\mathfrak{g}$ の 1-cocycle は

$$\delta_a(X) = [\Delta(X), a] = [X \otimes 1 + 1 \otimes X, a]$$

と書け, a に対応する G の cocycle は

$$\psi_a(x) = \mathrm{Ad}(x)a - a$$

と書ける. この ψ_a に対して,

$$P_x := \psi_a(x)x = xa - ax \in \bigwedge^2 (T_x G)$$

と置くと, P は G 上の bivector であり,

$$P_{xy} = xP_y + P_x y$$

を満たしている. よって, この P が $[[P, P]] = 0$ を満たしていれば P は G に Poisson-Lie group 構造を定める. 次の節で $[[P, P]] = 0$ となるための応用上便利な十分条件を与える. $\square$

G が simply connected ならば G の 1-cocycle と $\mathfrak{g}$ の 1-cocycle は一対一に対応していることを使えば次を証明することができる.

定理 16.4 Lie bialgebra と simply connected Poisson-Lie group は函手的に一対一に対応している. $\square$

17 Sklyanin bracket と Heisenberg bracket

G は Lie group とし, $\mathfrak{g}$ はその Lie algebra とする.

$a \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ に対して, G, $\mathfrak{g}$ の 1-coboundaries ψ, δ を次のように定める:

$$\psi(x) = \mathrm{Ad}(x)a - a \qquad (x \in G), \qquad\qquad \delta(X) = [\Delta(X), a] \qquad (X \in \mathfrak{g}).$$

さらに, ψ に対応する bivector P を

$$P_x := \psi(x)x = xa - ax$$

と定める. 注意 16.3 より, P が G に Poisson Lie group の構造を定めるための必要十分条件は $[[P, P]] = 0$ (これは Jacobi 律と同値) が成立することである.

定理 17.1 上の P が G に Poisson Lie group の構造を定めるための必要十分条件は $[[a, a]]$ が $\mathrm{Ad}(G)$-invariant なことである.

証明. $a^L(x) = xa$, $a^R(x) = ax$ であるから, 補題 14.2 より,

$$[[P, P]] = [[a^L - a^R, a^L - a^R]] = [[a, a]]^L - [[a, a]]^R$$

であるから,

$$[[P, P]]_x = x[[a, a]] - [[a, a]]x = (\mathrm{Ad}(x)[[a, a]] - [[a, a]])x.$$

よって, $[[P, P]] = 0$ と $\mathrm{Ad}(x)[[a, a]] = [[a, a]]$ $(x \in G)$ は同値である. □

系 17.2 (Sklyanin bracket) $a \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ が unitarity condition (すなわち $a \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$) と modified classical Yang-Baxter equation を満たしているとき,

$$P_x = xa - ax \qquad (x \in G)$$

によって, G 上の Poisson bivector P を構成でき, それによって G は Poisson Lie group をなす. その Poisson bracket は **Sklyanin bracket** と呼ばれ, よく a の代わりに $\frac{1}{2}r$ と書き, tensor notation を用いて次のように表わされる:

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\} = \frac{1}{2}[L \otimes L, r] = \frac{1}{2}((L \otimes L)r - r(L \otimes L)).$$

証明. 定理 17.1 と補題 14.5 からただちに得られる. □

G 上には Poisson Lie group の構造を定めない (すなわち群の演算が Poisson ではない) ような Poisson 構造を定めることもできる. 定理 17.1 は次のようにただちに一般化される:

定理 17.3 $a, b \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ を任意に取り,

$$P_x = xa - bx$$

によって G 上の bivector P を定める. このとき, P が Poisson であるための必要十分条件は, $[[a, a]] = [[b, b]]$ でかつ $[[a, a]]$ が $\mathrm{Ad}(G)$-invariant であることである. この Poisson 構造は tensor notation で書くと,

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\} = (L \otimes L)a - b(L \otimes L).$$

証明. $a^L(x) = xa$, $b^R(x) = bx$ であるから, 補題 14.2 より,

$$[[P, P]] = [[a^L - b^R, a^L - b^R]] = [[a, a]]^L - [[b, b]]^R$$

である. よって,

$$[[P, P]]_x = x[[a, a]] - [[b, b]]x = (\mathrm{Ad}(x)[[a, a]] - [[b, b]])x.$$

よって, $[[P, P]] = 0$ と $\mathrm{Ad}(x)[[a, a]] = [[a, a]] = [[b, b]]$ $(x \in G)$ は同値である. □

系 17.4 (Heisenberg bracket) $a \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ が unitarity condition (すなわち $a \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$) と modified classical Yang-Baxter equation を満たしていると仮定する. このとき,

$$P_x = xa + ax$$

によって, G 上の Poisson bivector を定めることができる. 対応する Poisson bracket を **Heisenberg bracket** と呼ぶことにする. この Poisson 構造を tensor notation で書くと,

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\} = (L \otimes L)a + a(L \otimes L).$$

証明. $b = -a$ の場合に定理 17.3 と補題 14.5 を適用すれば良い. □

注意 17.5 $a \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ が定める線形写像 $a : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$ が線形同形であるとき, Heisenberg bracket は G の単位元の近傍に symplectic 構造を定める. これとは対照的に, Sklyanin bracket のような Poisson-Lie 群の Poisson 構造の単位元における rank は 0 になる. □

系 17.6 $a, b \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ は unitarity condition $(a, b \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g})$ を満たし, 同一のパラメータ λ に関する modified classical Yang-Baxter equation を満たしていると仮定する. このとき,

$$P_x = xa - bx$$

によって, G 上の Poisson bivector P が定まる. この Poisson 構造を tensor notation で書くと,

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\} = (L \otimes L)a - b(L \otimes L).$$

証明. 定理 17.3 と補題 14.5 より. □

例 17.7 $\mathfrak{g}$ は symmetrizable Kac-Moody Lie algebra であるとし, $\mathfrak{g}$ 上の invariant nondegenerate symmetric bilinear form を $\langle\ ,\ \rangle$ と書くことにする. $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra であるとし, $\mathfrak{n}_\pm$ は $\mathfrak{g}$ の subalgebras であり, 以下を満たしていると仮定する:

(1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ (線形直和).

(2) $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}_\pm] \subset \mathfrak{n}_\pm$.

(3) $\langle \mathfrak{n}_+, \mathfrak{n}_+ \rangle = \langle \mathfrak{n}_-, \mathfrak{n}_- \rangle = \langle \mathfrak{h}, \mathfrak{n}_+ \rangle = \langle \mathfrak{h}, \mathfrak{n}_- \rangle = 0.$

補題 14.6 をこの場合に適用しよう. $\mathfrak{h}$ の $\langle\ ,\ \rangle$ に関する dual bases を H_a, H^a と書き, $\mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{n}_-$ の dual root bases を E_i, F_i と書き,

$$\begin{aligned} r_+ &= \frac{1}{2}\sum H_a \otimes H^a + \sum E_i \otimes F_i, \\ r_- &= -\frac{1}{2}\sum H^a \otimes H_a - \sum F_i \otimes E_i = -\sigma(r_+), \\ r &= r_+ + r_- = \sum (E_i \otimes F_i - F_i \otimes E_i) \end{aligned}$$

と置く. $A \wedge B = \frac{1}{2}(A \otimes B - B \otimes A)$ に注意すれば,

$$r = 2a, \qquad a = \sum E_i \wedge F_i \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$$

である. このとき, r と a はそれぞれ $\lambda = 1, 1/2$ に関する modified classical Yang-Baxter equation を満たし, $r_\pm$ は classical Yang-Baxter equation を満たしている.

よって, 別の三角分解に関する a を b と書くと, (少なくとも形式的には) $\mathfrak{g}$ に対応する Lie group G 上に,

$$P_x = xa - bx \qquad (x \in G)$$

もしくは

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\} = (L \otimes L)a - b(L \otimes L)$$

によって, Poisson 構造を構成できる. 特に, $b = a$ のとき, この Poisson 構造は G に Poisson Lie group の構造を定める. □

18 quadratic Poisson bracket (1)

この節では [FM1], [Su1], [P] で発表された一般化された quadratic Poisson bracket について説明する. ([FM1], [FM2], [P] はその量子化である一般化された quantum quadratic algebra も扱っている.)

以下, $a, b \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$, $s \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, $t = \sigma(s)$ と仮定する. すなわち, a, b に関しては unitarity condition を仮定するが, s (および $t = \sigma(s)$) については仮定しない.

このとき, G 上の bivector P を次の式によって定めることができる:

$$P_x = (x \otimes x)a - b(x \otimes x) + (x \otimes 1)s(1 \otimes x) - (1 \otimes x)t(x \otimes 1).$$

ここで,

$$\begin{aligned} a &= \sum A_i \otimes B_i = -\sum B_i \otimes A_i, \\ b &= \sum C_i \otimes D_i = -\sum D_i \otimes C_i, \\ s &= \sum S_i \otimes T_i, \\ t &= \sigma(s) = \sum T_i \otimes S_i \end{aligned}$$

と書くことにすると,

$$(x \otimes x)a = \sum (xA_i) \otimes (xB_i) = -\sum (xB_i) \otimes (xA_i),$$

$$
\begin{aligned}
&b(x\otimes x)=\sum(C_i x)\otimes(D_i x)=-\sum(D_i x)\otimes(C_i x),\\
&(x\otimes 1)s(1\otimes x)=\sum(xS_i)\otimes(T_i x),\\
&(1\otimes x)t(x\otimes 1)=\sigma((1\otimes x)s(x\otimes 1))=\sum(T_i x)\otimes(xS_i).
\end{aligned}
$$

よって,

$$S=\sum S_i^L\wedge T_i^R$$

と置くと,

$$P=a^L-b^R+2S.$$

この P を tensor notation で書くと,

$$\{L\underset{,}{\otimes}L\}=L^1L^2a-bL^1L^2+L^1sL^2-L^2s^{21}L^1.$$

ここで,

$$L^1=L\otimes 1,\quad L^2=1\otimes L,\quad s^{21}=\sigma(s).$$

Schouten bracket を特徴付ける条件と補題 14.2 を用いて地道に計算することによって次の補題を証明できる.

補題 18.1 以下が成立する:

$$[[a^L,a^L]]=[[a,a]]^L=-\frac{4}{3}([a^{21},a^{13}]+\text{c.p.})^L, \tag{1}$$

$$[[b^R,b^R]]=-[[b,b]]^R=\frac{4}{3}([b^{21},b^{13}]+\text{c.p.})^R, \tag{2}$$

$$[[a^L,b^R]]=0, \tag{3}$$

$$[[a^L,S]]=1/3([(a^L)^{12},S^{13}+S^{23}]+\text{c.p.}), \tag{4}$$

$$[[b^R,S]]=1/3([(b^R)^{12},S^{31}+S^{32}]+\text{c.p.}), \tag{5}$$

$$[[S,S]]=-1/3([S^{13},S^{23}]+\text{c.p.})+1/3([S^{31},S^{32}]+\text{c.p.}).\quad\square \tag{6}$$

定理 18.2 $a,b\in\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$, $s\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ に関して以下の条件が成立していると仮定する:

(1) $[a^{12},s^{13}+s^{23}]=[s^{13},s^{23}]$,

(2) $[b^{12},s^{31}+s^{32}]=[s^{31},s^{32}]$.

このとき, 上の $P=a^L-b^R+2S$ が G 上に Poisson 構造を定めるための必要十分条件は次が成立することである:

(3) $[[a,a]]=[[b,b]]$ でかつ $[[a,a]]$ が $\mathrm{Ad}(G)$-invariant なことである.

特に, $\mathfrak{g}$ に invariant nondegenerate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ が定められているとき, a, b が共に同じ λ に関する mCYBE を満たしていれば, P は G 上に Poisson 構造を定める.

証明. 補題 14.2 と補題 18.1 より,

$$
\begin{aligned}
[[P,P]] &= [[a^L,a^L]] + [[b^R,b^R]] + 2[[a^L,b^R]] + 4[[S,S]] + 4[[a^L,S]] - 4[[b^R,S]] \\
&= [[a,a]]^L - [[b,b]]^R \\
&\quad - \frac{4}{3}([S^{13},S^{23}] + \text{c.p.}) + \frac{4}{3}([S^{31},S^{32}] + \text{c.p.}) \\
&\quad + \frac{4}{3}([(a^L)^{12}, S^{13}+S^{23}] + \text{c.p.}) - \frac{4}{3}([(b^R)^{12}, S^{31}+S^{32}] + \text{c.p.})
\end{aligned}
$$

よって, (1) を仮定すると第 3 項目と第 6 項目がキャンセルし, (2) を仮定すると第 4 項目と第 6 項目がキャンセルする. そのとき,

$$
[[P,P]]_x = x[[a,a]] - [[b,b]]x = (\mathrm{Ad}(x)[[a,a]] - [[b,b]])x.
$$

これが消えるための必要十分条件は (3) である. □

注意 18.3 $\mathfrak{g}$ に invariant nondegenerate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ が定められている場合を考える. $f = \sum A_i \otimes B_i \in \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ に対して,

$$
f(X) = \sum A_i \langle B_i, X\rangle \qquad (X \in \mathfrak{g})
$$

と置くと,

$$
\langle f(X), Y\rangle = \sum \langle A_i, Y\rangle\langle B_i, X\rangle = \langle X, \sigma(f)(Y)\rangle
$$

であるから, $f \in \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ と $\langle f(X), Y\rangle = -\langle X, f(Y)\rangle$ は同値である. $\mathfrak{g}$ に別の braket 積 $[\ ,\ ]_a$, $[\ ,\ ]_b$ を次のように定める:

$$
[X,Y]_a := [a(X),Y] + [X,a(Y)], \quad [X,Y]_b := [b(X),Y] + [X,b(Y)].
$$

このとき, 以下が成立している:

(1) 定理 18.2 の条件 (1) は $t = \sigma(s)$ に関して次が成立することと同値である:

$$
t([X,Y]_a) = [t(X), t(Y)] \qquad (X, Y \in \mathfrak{g}).
$$

(2) 定理 18.2 の条件 (2) は次が成立することと同値である:

$$
s([X,Y]_b) = [s(X), s(Y)](X, Y \in \mathfrak{g}).
$$

(3) a が mCYBE を満たしていることと次は同値である:

$$
a([X,Y]_a) - [a(X), a(Y)] = \lambda^2[X,Y] \qquad (X, Y \in \mathfrak{g}). \tag{mCYBE$'_\lambda$}
$$

そして, これが成立するとき, $[\ ,\ ]_a$ は $\mathfrak{g}$ に別の Lie algebra 構造を定める. b に関しても同様の結果が成立する. 証明は第 2 節と同様である.

この注意より, 上の定理から次の系が得られる.

系 18.4 $\mathfrak{g}$ は invariant nondegenerate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ を持つと仮定し, $a, b \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$, $s \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, $t = \sigma(s)$ とし, 以下の条件が成立していると仮定する:

$$t([a(X), Y] + [X, a(Y)]) = [t(X), t(Y)], \tag{1}$$

$$s([b(X), Y] + [X, b(Y)]) = [s(X), s(Y)], \tag{2}$$

$$a([a(X), Y] + [X, a(Y)]) - [a(X), a(Y)] = \lambda^2 [X, Y], \tag{3}$$

$$b([b(X), Y] + [X, b(Y)]) - [b(X), b(Y)] = \lambda^2 [X, Y]. \tag{4}$$

このとき,

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\} = L_1 L_2 a - b L_1 L_2 + L_1 s L_2 - L_2 t L_1$$

は G 上に Poisson 構造を定める. □

Part 7 (2001年6月27日)

19 休憩： CYBE を満たす r-matrix と mCYBE を満たす r-matrix の違い

classical r-matrix には classical Yang-Baxter equation (CYBE) を満たすものと, modified classical Yang-Baxter equation (mCYBE) を満たすものの二種類がある. それらを混同してはいけない.

標準的な例において, より基本的な対象は前者の CYBE を満たす r-matrix であり, mCYBE を満たす後者は前者の skew-symmetric part (の 2 倍) として構成される.

19.1 基本設定

以下, 補題 14.6 における次の状況を仮定する:

- $\mathfrak{g}$ は Lie algebra である.
- $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathfrak{g}$ の invariant nondegenerate symmetric bilinear form である.
- $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ (subalgebras の線形直和).
- $\mathfrak{h}$ は Abelian である.
- $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}_\pm] \subset \mathfrak{n}_\pm$.
- $\langle \mathfrak{n}_\pm, \mathfrak{n}_+ \rangle = \langle \mathfrak{n}_-, \mathfrak{n}_- \rangle = \langle \mathfrak{h}, \mathfrak{n}_+ \rangle = \langle \mathfrak{h}, \mathfrak{n}_- \rangle = 0$.

このとき, $\langle\ ,\ \rangle$ の $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ と $\mathfrak{n}_+ \times \mathfrak{n}_-$ 上への制限は共に nondegenerate になる. このとき, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ を $\mathfrak{g}$ の三角分解と呼ぶことにする.

例 19.1 symmetrizable Kac-Moody Lie algebra の標準的な三角分解は上の意味での三角分解の典型的な例である. □

例 19.2 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_- \oplus \mathfrak{a}_0 \oplus \mathfrak{a}_+$ が有限次元複素単純 Lie 環の標準的な三角分解であるとき,

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{g} &= \mathfrak{a}((t)), \\
\mathfrak{h} &= \mathfrak{a}_0, \\
\mathfrak{n}_+ &= \mathfrak{a}_+((t)) + \mathfrak{a}_0[[t]]t, \\
\mathfrak{n}_- &= \mathfrak{a}_-((t)) + \mathfrak{a}_0[t^{-1}]t^{-1}
\end{aligned}
$$

と置き, $\mathfrak{a}$ の不変内積 $(\ ,\ )$ を用いて, $\mathfrak{g}$ の不変内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$
\langle A(t), B(t) \rangle = \operatorname*{Res}_{t=0}[(A(t), B(t))\, t^{-1}\, dt]
$$

によって定めると, $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ も上の意味での三角分解の例になっている．これは affine Lie algebra の標準的な三角分解を affine Weyl 群でひねることによって得られ**ない**三角分解である．ひねりの limit になっている[5]． □

例 19.3 $\mathfrak{h} = 0$ であるような三角分解[6]の例として, 有限次元複素単純 Lie 環の loop Lie algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}((t))$ を

$$\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{n}_+ = \mathfrak{a}[[t]], \qquad \mathfrak{g}_- = \mathfrak{n}_- = \mathfrak{a}[t^{-1}]t^{-1}$$

によって $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_+$ と分解する例がある．ただし, $\mathfrak{g}$ には例 19.2 とは異なる次の不変内積を入れておかなければいけない[7]:

$$\langle A(t), B(t) \rangle = \operatorname*{Res}_{t=0}[(A(t), B(t))\, dt].$$

この他に次のような例もある:

$$\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{n}_+ = \mathfrak{a}[z], \qquad \mathfrak{g}_- = \mathfrak{n}_- = \mathfrak{a}[[z^{-1}]]z^{-1} \qquad (z = t^{-1}).$$

ただし, $\mathfrak{g}$ には上とは異なる次の不変内積を入れておく:

$$\langle A(z), B(z) \rangle = -\operatorname*{Res}_{z=\infty}[(A(z), B(z))\, dt].$$

右辺の負号が入っている理由は $-\operatorname{Res}_{z=\infty}(z^{-1}\, dz) = \operatorname{Res}_{t=0}(t^{-1}\, dt) = 1$ という公式を見ればわかる． □

例 19.4 他に $\mathfrak{h} = 0$ であるような三角分解の例には elliptic function を使った例もある．Dynamical System VII [ReyS] p.189 の Proposition 11.1 を参照せよ． □

例 19.5 $\mathfrak{h} = 0$ であるような例として, 次のような擬微分作用素環の例もある:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g} = \mathcal{E} = \mathbb{C}((x))((\partial^{-1})), \\
&\mathfrak{g}_+ = \mathcal{D} = \mathfrak{n}_+ = \mathbb{C}((x))[\partial], \\
&\mathfrak{g}_- = \mathcal{E}_{<0} = \mathfrak{n}_- = \mathbb{C}((x))[[\partial^{-1}]]\partial^{-1}.
\end{aligned}$$

$\mathfrak{g}$ の不変内積は Adler trace

$$\operatorname{trace}(A) = \operatorname*{Res}_{x=0}[A_{-1}(x)\, dx] \qquad \left(A = \sum A_i(x)\partial^i \in \mathcal{E}\right)$$

を用いて,

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{trace}(AB)$$

と定義される． □

---

[5]有限次元単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$ を固定するとき, $\mathfrak{g}$ の三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ の全体と Weyl 群の元は一対一に対応している．同様の結果は loop Lie algebra や Kac-Moody algebra の場合には成立しない．

[6]この場合は「三角分解」という呼び名はふさわしくない．

[7]この内積に関して $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ は Manin triple をなす．一般に $\mathfrak{h} = 0$ であるような分解と Manin triple は一対一に対応している．

19.2 classical Yang-Baxter equation の解 $r_\pm$

上のような状況のもとで, $\mathfrak{h}$ の dual bases H_a, H^a と $\mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{n}_-$ の dual bases E_i, F_i を取り,

$$\begin{aligned} r_+ &= \ \ \frac{1}{2}\sum H_a \otimes H^a + \sum E_i \otimes F_i \\ r_- &= -\frac{1}{2}\sum H^a \otimes H_a - \sum F_i \otimes E_i = -\sigma(r_+) \end{aligned}$$

と置くと, $s = r_\pm$ は classical Yang-Baxter equation

$$[s^{21}, s^{13}] + [s^{32}, s^{21}] + [s^{13}, s^{32}] = 0 \tag{CYBE}$$

の解になっている. CYBE の典型的な解はこのようにして構成されてされる. しかし, $s = r_\pm$ は unitarity condition

$$\sigma(s) = -s \tag{UC}$$

を全然満たしてない.

要点 19.6 CYBE の典型的な解は unitarity condition を満たして**いない**.

例 19.7 上の諸例において r_+ は以下のような CYBE の解になる:

- 例 19.1 において $\mathfrak{g}$ が affine Lie algebra ならば r_+ は本質的に CYBE の三角函数解になる. 例 19.1 の $\mathfrak{g}$ の量子化は Jimbo-Drinfeld の量子展開環である.
- 例 19.2 に関してはどういう文献があるのかよく知らないが, その量子化は affine 量子展開環の Drinfeld realization と関係がある.
- 例 19.3 における r_+ は CYBE の有理函数解になる. 例 19.3 の後者の場合における $\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{a}[z]$ の量子化は Yangian と呼ばれている. 注意しなければいけないことは Yangian は $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}((z^{-1}))$ 自身の量子化ではないことである. $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}_+$ の double になっている.
- 例 19.4 に関する r_+ は CYBE の楕円函数解になる. この場合の量子化は楕円量子群と呼ばれている.
- 例 19.5 は KP 方程式の舞台である. 例 19.5 の量子化はまだ何も構成されてないと思う. 文献があれば教えて欲しい. □

19.3 modified classical Yang-Baxter equation の解 a, r

それでは, unitarity condition を満たす解はどのようにして構成されるのか? そのためには, CYBE を少し変更して得られる次の modified classical Yang-Baxter equation を考えなければいけない:

$$[s^{21}, s^{13}] + [s^{32}, s^{21}] + [s^{13}, s^{32}] = c^2\Omega_3. \tag{mCYBE}$$

ここで, Ω_3 は

$$\langle \Omega_3,\ X \otimes Y \otimes Z \rangle = \langle [X, Y],\ Z \rangle \qquad (X, Y, Z \in \mathfrak{g})$$

という条件によって定義される $\bigwedge^3(\mathfrak{g})$ の $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ 不変な要素である. $c = 0$ の場合に限って mCYBE は CYBE と同値になる. $c \neq 0$ の mCYBE の解 s が存在するならば, $c^{-1}s$ は $c = 1$ の mCYBE の解になる.

上の r_+ の skew symmetric part を a と書き, その 2 倍を r と書くことにする:

$$a = \frac{r_+ - \sigma(r_+)}{2} = \frac{r_+ + r_-}{2}, \qquad r = r_+ - \sigma(r_+) = r_+ + r_-.$$

定義より, a, r は unitarity condition を満たしている. そして, r_+ に関する CYBE から, $s = a, r$ がそれぞれ $c = 1/2, 1$ の mCYBE の解になることを証明できる. これが, mCYBE の典型的な解である.

要点 19.8 mCYBE の典型的な解は unitarity condition を満たして**いる**.

要するに上の典型的な状況のもとでは, CYBE の解は unitarity condition を満たしてなく, unitarity condition を満たしているのは mCYBE の解の方なのだ. この違いを忘れると混乱することになる.

逆に r から r_+ を構成することもできる. $\mathfrak{g}$ の $\langle\ ,\ \rangle$ に関する Casimir element $C \in S^2(\mathfrak{g})$ は次のように書ける:

$$C = \sum H_a \otimes H^a + \sum (E_i \otimes F_i + F_i \otimes E_i).$$

よって,

$$C = r_+ + \sigma(r_+) = r_+ - r_-.$$

すなわち, C は r_+ の symmetric part の 2 倍である. このことより, 逆に r を用いて, r_+ を表わすことができる:

$$r_+ = \frac{r + C}{2}.$$

この式を用いると, r に関する $c = 1$ の mCYBE から, r_+ に関する CYBE を導くことができる.

19.4 r_+ に関する CYBE と $r = r_+ - \sigma(r_+)$ に関する mCYBE の同値性

上の例が CYBE や mCYBE の解になっていることやそれらの同値性の証明は第 2 節を見て欲しい. その要点は直接的に CYBE や mCYBE を扱うのではなく (そうしても簡単だが), それらを以下のように書き直して $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}$ への linear map の問題に焼き直すことであった.

一般に, $f = \sum A_i \otimes B_i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ に対して, $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を

$$f(X) = \sum A_i \langle B_i, X \rangle \qquad (X \in \mathfrak{g})$$

によって定める．このとき,

$$\langle f(X), Y\rangle = \sum \langle A_i, Y\rangle\langle B_i, X\rangle = \langle X, \sigma(f)(Y)\rangle$$

なので, 写像として $f^* = \sigma(f)$ である．そして, $C(X) = Y$ なので, Casimir element C は identy map に対応している．この記号のもとで $[\,,\,]_r$ 次のように定める:

$$[X, Y]_r := [r_+(X), r_+(Y)] - [r_-(X), r_-(Y)].$$

このとき,

$$[X, Y]_r = [a(X), Y] + [X, a(Y)] = \frac{1}{2}\big([r(X), Y] + [X, r(Y)]\big)$$

が成立している．r_+ に関する CYBE と a, r に関する mCYBE はそれぞれ次の方程式と同値になる:

$$r_+([X, Y]_r) = [r_+(X), r_+(Y)], \tag{CYBE'}$$

$$a([a(X), Y] + [X, a(Y)]) - [a(X), a(Y)] = \frac{1}{4}[X, Y], \tag{$\mathrm{mCYBE}'_{c=1/2}$}$$

$$r([r(X), Y] + [X, r(Y)]) - [r(X), r(Y)] = [X, Y]. \tag{$\mathrm{mCYBE}'_{c=1}$}$$

これらは互いに全て同値であることが第 2 節にあるように容易に証明できる．そして, これらの条件のどれかが成立していれば, $[\,,\,]_r$ が Jacobi law を満たすことが導かれ, $\mathfrak{g}$ にはもう一つの Lie algbra 構造が入ることになる．そして, そのとき, $\mathfrak{g}$ には

$$\delta(X) = [\Delta(X), a] = \frac{1}{2}[\Delta(X), r] = [\Delta(X), r_+]$$

によって, Lie bialgebra 構造が定義できます．これはロシア学派の tensor notation における

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\} = \frac{1}{2}[L \otimes 1 + 1 \otimes L, r] = [L \otimes 1 + 1 \otimes L, r_+]$$

に対応する式である．

δ が誘導する $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$ の Lie algebra 構造を $[\,,\,]^*$ と書くと,

$$\begin{aligned}
\langle [X, Y]^*, Z\rangle &= \langle X \otimes Y,\ \delta(Z)\rangle \\
&= \langle X \otimes Y,\ [\Delta(Z), a]\rangle \\
&= \sum \langle X \otimes Y,\ [Z, A_i] \otimes B_i + A_i \otimes [Z, B_i]\rangle \\
&= \sum (\langle X,\ [Z, A_i]\rangle\langle Y,\ B_i\rangle + \langle X,\ A_i\rangle\langle Y,\ [Z, B_i]\rangle) \\
&= \sum (-\langle [X, A_i],\ Z\rangle\langle Y, B_i\rangle + \langle X,\ A_i\rangle\langle [B_i, Y],\ Z\rangle) \\
&= -\langle [X, a(Y)],\ Z\rangle - \langle [a(X), Y],\ Z\rangle \\
&= -\langle [X, Y]_r,\ Z\rangle.
\end{aligned}$$

ここで, $a = \sum A_i \otimes B_i = -\sum B_i \otimes A_i$ と書き,

$$a(Z) = \sum A_i\langle B_i,\ Z\rangle = -\sum \langle A_i,\ Z\rangle B_i$$

を用いた．よって,

$$[X, Y]^* = -[X, Y]_r.$$

すなわち, Lie coboracket δ の定義を -1 倍すれば $[\,,\,]^* = [\,,\,]_r$ とできるのだが, $\bigwedge^2(\mathfrak{g})$ への $\mathfrak{g}$ の作用を右作用に取るという convention を採用することになるので悩ましいところだ．他にも色々符号が変わって来てしまう．

19.5 quadratic Poisson bracket と相性が良いのは mCYBE + UC の方

Sklyanin bracket
$$\{L \underset{,}{\otimes} L\} = \frac{1}{2}[L \otimes L, r]$$
に代表される quadratic Poisson bracket と相性が良いのは modified classical Yang-Baxter equation + unitarity condition (mCYBE + UC) の解の方である. 実際, 第 17 節より, 次の定理を証明できる.

定理 19.9 $a \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ が mCYBE + UC の解であれば,
$$\{L \underset{,}{\otimes} L\} = (L \otimes L)a \pm a(L \otimes L)$$
は G 上に Poisson 構造を定める. これは, 符号がマイナスのとき Sklyanin bracket と呼ばれ, G 上に Poisson Lie group の構造を定める. 符号がプラスの場合は Heisenberg bracket と呼ぶことにする. より一般に, $a, b \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ が同一の c に関する mCYBE + UC の解であれば,
$$\{L \underset{,}{\otimes} L\} = (L \otimes L)a - b(L \otimes L)$$
は G 上に Poisson 構造を定める. □

注意 19.10 unitariry condition $\sigma(a) = -a$ は Poisson bracket が skew symmetric になるための十分条件である. その条件は Sklyanin bracket の場合には少しゆるめることができる. 実際, $a = r/2$ が r_+ の skew symmetric part である場合には次の等式が成立している:
$$[L \otimes L, a] = [L \otimes L, r_+].$$
実際, $r_+ = a + C/2$ であり, Casimir element C は $\mathrm{Ad}(G)$-invariant なので,
$$(L \otimes L)C = C(L \otimes L)$$
であるから,
$$[L \otimes L, r_+] = [L \otimes L, a] + \frac{1}{2}[L \otimes L, C] = [L \otimes L, a].$$
よって, Sklyanin bracket は unitarity condition はみたしてないが CYBE の解にはなっている r_+ を用いて,
$$\{L \underset{,}{\otimes} L\} = [L \otimes L, a] = [L \otimes L, r_+]$$
と書くことができる.

しかし, Heisenber bracket の場合や a, b と 2 つの mCYBE の解を用いて Poisson bracket を構成する場合はこのようなやり方は効かない. その場合には unitarity condition を仮定するのが以前である. □

注意 19.11 $\mathfrak{g}$ における mCYBE + UC の解は $\mathfrak{g}$ の三角分解を選ぶごとに得られるので, G の上にはたくさんの quadratic Poisson structure が入る. そして, さらに, 第 18 節で証明したように, quadratic Poisson bracket の形はさらに次のように一般化された:
$$\{L \underset{,}{\otimes} L\} = (L \otimes L)a - b(L \otimes L) + (L \otimes 1)s(1 \otimes L) - (1 \otimes L)t(L \otimes 1).$$

ここで, a, b は同一の c に対する mCYBE + UC の解であり, $t = \sigma(s)$ でかつ,

$$t([a(X), Y] + [X, a(Y)] = [t(X), t(Y)],$$
$$s([b(X), Y] + [X, b(Y)] = [s(X), s(Y)]$$

が成立していると仮定しておく.

なお, s, t に関してこの convention (Suris のそれに近い) を採用するのではなく, s と $t = \sigma(s)$ を交換して,

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\} = (L \otimes L)a - b(L \otimes L) + (L \otimes 1)t(1 \otimes L) - (1 \otimes L)s(L \otimes 1),$$
$$s([a(X), Y] + [X, a(Y)] = [s(X), s(Y)],$$
$$t([b(X), Y] + [X, b(Y)] = [t(X), t(Y)]$$

という式を採用した方が良いのかもしれないのだが, 具体的な例の多くでは, unitarity condition を満たしてないような mCYBE' の解 r と

$$\frac{1}{2}r = a + t = b + s \qquad (s \text{ と } t \text{ を交換した記号法のもとでの式})$$

という関係式が成立しているので, この式を書くときに alphabet の順番を揃えたければ, 上の convention を採用しなければいけなくなるのだ. 上の convention のもとでは,

$$\frac{1}{2}r = a + s = b + t \qquad (s \text{ と } t \text{ を交換しない上の記号法のもとでの式}).$$

もともと, quadratic Poisson structure の一般化の仕事は unitarity condition を満たしてないような mCYBE' の解が現われるような場合にどうするかという問題があった[8]. □

注意 19.12 ここで, mCYBE' と mCYBE の違いに注意せよ. mCYBE'

$$r([r(X), Y] + [X, r(Y)]) - [r(X), r(Y)] = c^2[X, Y] \qquad \text{(mCYBE')}$$

は Lie algebra $\mathfrak{g}$ に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が定められてなくても $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}$ への線形写像 r に関する方程式として意味を持つ. その典型的な解は $\mathfrak{g}$ の subalgebras への任意の分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ (線形直和) ごとに簡単に構成される. すなわち, $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}_\pm$ への projections をそれぞれ $p_\pm$ と書くとき, $r = p_+ - p_-$ は $c = 1$ の場合の mCYBE' の解になる. そして, $r_+ = p_+$ と $r_- = -p_-$ はどちらも r を given とする f に関する方程式

$$f([X, Y]_r) = [f(X), f(Y)] \qquad \left([X, Y]_r = \frac{1}{2}\bigl([r(X), Y] + [X, r(Y)]\bigr)\right). \qquad \text{(CYBE')}$$

の解になる. 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ が特殊な場合以外は, このようにして構成される mCYBE' の解 r は unitarity condition を満たしてない. 実際, r が unitarity condition $r^* = -r$ を満たしていることと, $r_+^* = -r_-$ という条件は同値であり, そのとき $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ は Manin triple をなす. 一般に, ソリトン系の基本設定において分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ をそのように取るとは限らない.

[8]追記 2002 年 1 月 20 日: 後の方の節では (a, s, b, t) の代わりにより本質がわかり易い (a, b, c, d) と書くことになる. 後者の記号における (a, b, c, d) は $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ の要素からなる 2×2 行列の成分とみなされる. そのとき, (a, b, c, d) が満たすべき条件はそれらを成分に持つ行列が $\mathfrak{g}$ の double $\mathfrak{d}$ における CYBE + UC の解になっていることと同値になる. この事実は [Se2], [SS] で注意された.

例えば, 例 19.3 の

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}((z^{-1})), \quad \mathfrak{g}_+ = \mathfrak{a}[z], \quad \mathfrak{g}_- = \mathfrak{a}[[z^{-1}]]z^{-1}$$

は Manin triple をなす. ただし, $\mathfrak{g}$ の内積は $\langle\ ,\ \rangle$ 内積は $\mathfrak{a}$ の内積 $(\ ,\ )$ を利用して,

$$\langle A(z), B(z)\rangle = \mathrm{Res}[(A(z), B(z))\ dz]$$

と定義しておかなければいけない. ここで, $\mathrm{Res}[f(z)\ dz]$ は $f(z)$ の z に関する Laurent 展開の z^{-1} の係数を取り出す汎函数である. 注意しなければいけないことは, loop algebra $\mathfrak{g}$ には様々な内積が入ることである. よく使われるのは,

$$\langle A(z), B(z)\rangle = \mathrm{Res}[(A(z), B(z))\ z^{-1}\ dz]$$

である. この内積は affine Lie algebra を symmetrizable Kac-Moody Lie algebra とみなしたときの標準的な内積に一致している. Yangian の古典極限の場合では内積をそれとは違うものに取っていることになる.

別の例としては, 例 19.5 の擬微分作用素のなす Lie algebra

$$\mathfrak{g} = \mathcal{E} = \mathbb{C}((x))((\partial^{-1}))$$

を k = 0, 1, 2 に対する subalegebras

$$\mathfrak{g}_+ = \mathcal{E}_{\geq k} = \mathbb{C}((x))[\partial]\partial^k, \qquad \mathfrak{g}_- = \mathcal{E}_{<k} = \mathbb{C}((x))[[\partial^{-1}]]\partial^{k-1}$$

の線形直和への分解を考える場合もある. $k = 0$ の場合が KP hierarchy の場合に対応しており, $k = 1$ の場合から得られる hierarchy に含まれる最初の非自明な微分方程式を modified KP equation と呼ぶ場合があるらしい. $k = 2$ の場合も意味を持つ.

このように, r-matrix を $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ の要素だとみなす立場から出発して, CYBE, mCYBE を考察すると r-matrix を $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ の要素だとみなす立場から大量にかつ容易に構成される CYBE', mCYBE' の解を見逃してしまう可能性がある. □

要点 19.13 mCYBE' の解は一般に unitarity condition を満たして**いない**.

要点 19.14 休憩するつもりでいても予定が狂ってしまうことはよくある!!

Part 8 (2001年6月28日)

これでやっと Poisson 群上での計算をする準備が整いました.

20 quadratic Poisson bracket (2)

この節では, $\mathfrak{g}$ は Lie group G の Lie algebra であるとし, $\langle\ ,\ \rangle$ はその invariant non-degenerate symmetric bilinear form であるとし, $\langle\ ,\ \rangle$ に関する線形写像 $f:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ の adjoint を f^* と書くことにする:

$$\langle f(X), Y\rangle = \langle X, f^*(Y)\rangle \qquad (X, Y\in\mathfrak{g}).$$

さらに, $\langle\ ,\ \rangle$ を用いて, $\mathfrak{g}^*=\mathfrak{g}$ とみなし,

$$\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}=\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*=\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$$

によって $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ と $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ を同一視しておく:

$$f(X)=\sum A_i\langle B_i, X\rangle \qquad \text{for } f=\sum A_i\otimes B_i\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}.$$

この同一視のもとで, f^* は $\sigma(f)=\sum B_i\otimes A_i$ と同一視される. 特に, f が skew-symmetric (i.e. $f\in\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$) であることと $f^*=-f$ であることは同値である.

復習のために系 18.4 を以下に再掲しておく.

定理 20.1 $a,b\in\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$, $s\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$, $t=\sigma(s)$ とし, 以下の条件が成立していると仮定する:

$$t([a(X),Y]+[X,a(Y)])=[t(X),t(Y)], \tag{A}$$

$$s([b(X),Y]+[X,b(Y)])=[s(X),s(Y)], \tag{B}$$

$$a([a(X),Y]+[X,a(Y)])-[a(X),a(Y)]=\frac{1}{4}\lambda^2[X,Y], \tag{C}$$

$$b([b(X),Y]+[X,b(Y)])-[b(X),b(Y)]=\frac{1}{4}\lambda^2[X,Y]. \tag{D}$$

このとき,

$$\{L\underset{,}{\otimes}L\}=L^1L^2a-bL^1L^2+L^1sL^2-L^2tL^1$$

は G 上に Poisson 構造を定める. □

例えば, $a=b$, $s=0$ の場合が Sklyanin bracket であり, $a=-b$, $s=0$ の場合が Heisenberg bracket である.

20.1 基本設定と条件のあいだの関係

以下では, $r,a,b,s,t\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ に関して,

$$t=s^*. \tag{a}$$

$$a^*=-a, \quad b^*=-b \qquad (\text{すなわち } a,b\in\mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}). \tag{b}$$

$$\frac{1}{2}r = a + s = b + t \tag{c}$$

と仮定する．上の定理 20.1 にはない新たな仮定は (c) である．r に関しては $r^* = -r$ を仮定しないことに注意せよ．応用上重要なのはこの場合である．さらに, 前節の定理の条件 (A),...,(D) に加えて r に関する次の条件も考える:

$$r([r(X), Y] + [X, r(Y)]) - [r(X), r(Y)] = \lambda^2[X, Y]. \tag{E}$$

定理 20.2 上の条件 (a), (b), (c) のもとで以下が成立する:

(1) (A) と (B) を仮定すると, (C) と (D) と (E) は互いに同値になる．

(2) (A) を仮定すると, (B),(C),(E) の 2 つから残りの 1 つが導かれる．

(3) (B) を仮定すると, (A),(D),(E) の 2 つから残りの 1 つが導かれる．

よって以下が成立する:

(4) (A),(B),(C) $\implies$ (D),(E).

(5) (A),(C),(E) $\implies$ (B),(D).

証明. 以下, 簡単のため $r(X)$ などをを rX のように書くことにする．(c) より,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\big(r([rX, Y] + [X, rY])\big) \\
&= a\big([rX, Y] + [X, rY]\big) + s\big([rX, Y] + [X, rY]\big) \\
&= a\big([(a+s)X, Y] + [X, (a+s)Y]\big) + s\big([(b+t)X, Y] + [X, (b+t)Y]\big) \\
&= a\big([aX, Y] + [X, aY]\big) + a\big([sX, Y] + [X, sY]\big) \\
&+ s\big([bX, Y] + [X, bY]\big) + s\big([tX, Y] + [X, tY]\big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}[rX, rY] = [(a+s)X, (a+s)Y] \\
&= [aX, aY] + [aX, sY] + [sX, aY] + [sX, sY].
\end{aligned}$$

よって,

$$R(X, Y) = A(X, Y) + S(X, Y) + T_1 + T_2.$$

ここで,

$$\begin{aligned}
R(X, Y) &= \frac{1}{4}\big(r([rX, Y] + [X, rY]) - [rX, rY] - \lambda^2[X, Y]\big), \\
A(X, Y) &= a\big([aX, Y] + [X, aY]\big) - [aX, aY] - \frac{1}{4}\lambda^2[X, Y], \\
S(X, Y) &= s\big([bX, Y] + [X, bY]\big) - [sX, sY], \\
T_1 &= -[sX, aY] + a[sX, Y] + s[X, tY], \\
T_2 &= -[aX, sY] + a[X, sY] + s[tX, Y],
\end{aligned}$$

と置いた．そして,

$$T(X, Y) = t\big([aX, Y] + [X, aY]\big) - [tX, tY]$$

と置くと, (a), (b) より,

$$\langle T_1, Z\rangle = -\langle X, T(Y,Z)\rangle, \qquad \langle T_2, Z\rangle = -\langle Y, T(Z,X)\rangle$$

である. 以上によって次の等式が得られた:

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y),\ Z\rangle &= \langle A(X,Y),\ Z\rangle + \langle S(X,Y),\ Z\rangle \\ &\quad - \langle X,\ T(Y,Z)\rangle - \langle Y,\ T(Z,X)\rangle\end{aligned}$$

よって, (A) $T=0$ と (B) $S=0$ を仮定すると,

$$\langle R(X,Y),\ Z\rangle = \langle A(X,Y),\ Z\rangle$$

となるので, (C) $A=0$ と (E) $R=0$ は同値になる. 同様にして, (A), (B) を仮定すると, (D) と (E) が同値になることも示される. これで (1) が示された.

また, (A) を仮定すると,

$$\langle R(X,Y), Z\rangle = \langle A(X,Y), Z\rangle + \langle S(X,Y), Z\rangle$$

となるので, (B) $S=0$, (C) $A=0$, (E) $R=0$ のうちの 2 つから残りの 1 つが導かれる. これで (2) が示された. (3) も同様にして示される. □

系 20.3 $r \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ が skew symmetric とは限らない modified classical Yang-Baxter equation (mCYBE) (E) の解であり, $a \in \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g}$ は mCYBE (C) の skew symmetric な解であるとする. このとき, $t = (r-a)^*$ が (A) を満たしているならば, $s = r-a$, $b = r-t$ に関して以下が成立する:

(1) b も mCYBE (D) を満たし, s は (B) を満たす.

(2) 次によって G 上に quadratic Poisson 構造が入る:

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\}_2 = L^1L^2a - bL^1L^2 + L^1sL^2 - L^2tL^1.$$

証明. (1) は定理 20.2 (5) そのものであり, (2) は定理 20.1 から導かれる. □

20.2 linear Poisson bracket との compatibility

補題 20.4 $r \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ が mCYBE (E) を満たしているとき, $\mathfrak{g}$ には次によって linear Poisson 構造が入る:

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\}_1 = \frac{1}{2}([L\otimes 1, r] - [1\otimes L, r^*]).$$

証明. 第 2 節の結果より, $\mathfrak{g}$ には次の r-bracket によって別の Lie algebra 構造が入る:

$$[X,Y]_r := \frac{1}{2}([r(X),Y] + [X, r(Y)]).$$

この r-bracket に関する Lie algebra $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}_r$ と書いたのであった. $\mathfrak{g}_r$ の dual space $\mathfrak{g}_r^* = \mathfrak{g}^*$ に入る Kirillov-Kostant Poisson 構造は,

$$\{X, Y\}(L) = \langle L,\ [X, Y]_r\rangle \qquad (X, Y \in \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{**}, L \in \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*)$$

によって定義されるのであった. (ここで, $X, Y \in \mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$ 上の linear functional と同一視されている. $\mathfrak{g}^*$ の函数環は $\mathfrak{g}$ から生成される多項式環なので $\mathfrak{g}$ の元のあいだの Poisson bracket を与えれば $\mathfrak{g}^*$ 上の Poisson 構造が決まる.) この式に r-bracket の定義を代入すると,

$$\begin{aligned}
\{X, Y\}(L) &= \frac{1}{2}\langle L,\ [r(X), Y] + [X, r(Y)]\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum \big(\langle B_i, X\rangle \langle L,\ [A_i, Y]\rangle + \langle L,\ [X, A_i]\rangle \langle B_i, Y\rangle\big) \\
&= \frac{1}{2}\sum \big(\langle B_i, X\rangle \langle [L, A_i], Y\rangle - \langle [L, A_i],\ X\rangle \langle B_i, Y\rangle\big) \\
&= \frac{1}{2}(\langle [1\otimes L, r^*] - [L\otimes 1, r],\ X\otimes Y\rangle) \\
&= \langle -\{L \underset{,}{\otimes} L\}_1,\ X\otimes Y\rangle.
\end{aligned}$$

ここで, $r = \sum A_i \otimes B_i$ と書いた. よって, $\{L \underset{,}{\otimes} L\}_1$ は $\mathfrak{g}_r^*$ の Kirillov-Kostant Poisson 構造の -1 倍に等しい. よって, $\mathfrak{g}$ 上の Poisson 構造である. □

定理 20.5 (Poisson brackets の compatibility) $\mathfrak{g}$ は associative algebra であるとし, commutator によって $\mathfrak{g}$ を Lie algebra とみなす. $\mathfrak{g}$ に対応する Lie 群 G は自然に $\mathfrak{g}$ の open dense subset とみなされていると仮定する. (例えば $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = M(n, \mathbb{C})$, $G = GL(n, \mathbb{C})$.) このとき, 単位行列 1 とパラメータ p, q に関して,

$$\{pL + q1 \underset{,}{\otimes} pL + q1\}_2 = p^2\{L \underset{,}{\otimes} L\}_2 + pq\{L \underset{,}{\otimes} L\}_1.$$

よって, quadratic Poisson 構造 $\{\ ,\ \}_2$ と linear Poisson 構造 $\{\ ,\ \}_1$ は compatible である[9].

証明. $X^1Y^2a - bX^1Y^2 + X^1sY^2 - Y^2tX^1$ の (X, Y) に (L, L), $(L, 1)$, $(1, L)$, $(1, 1)$ を代入したものをそれぞれ A, B, C, D と書くと,

$$\{pL + q1 \underset{,}{\otimes} pL + q1\}_2 = p^2A + pq(B + C) + q^2D.$$

$\{\ \underset{,}{\otimes}\ \}_2$ の定義より $A = \{L \underset{,}{\otimes} L\}_2$ である. (c) $\frac{1}{2}r = a + s = b + t$ より,

$$D = (a + s) - (b + t) = \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}r = 0.$$

(a) $t = s^*$, (b) $a^* = -a$, $b^* = -b$ より,

$$\frac{1}{2}r^* = -a + t = -b + s \tag{c'}$$

[9] Poisson brackets の集合が compatible であるとはそれらの任意の一次結合が Poisson bracket の公理を満たしていること (すなわち Jacobi 律を満たしていること) である.

であるから,

$$B = L^1 a - bL^1 + L^1 s - tL^1 = \frac{1}{2}[L^1, r],$$
$$C = L^1 a - bL^2 + sL^2 - L^1 t = -\frac{1}{2}[L^2, r^*].$$

よって, 補題 20.4 より,

$$B + C = \{L \underset{,}{\otimes} L\}_1.$$

以上によって定理の前半が証明された.

$\{L \underset{,}{\otimes} L\}_{p,q} = \{pL + q1 \underset{,}{\otimes} pL + q1\}_2$ は $\mathfrak{g}$ 上の Poisson 構造を定める. よって, 定理の前半の結果より, $\{\ ,\ \}_2$ と $\{\ ,\ \}_1$ の一次結合が $\mathfrak{g}$ 上の Poisson 構造を定めることがわかる. □

以上によって, skew symmetric とは限らない mCYBE の解 r に関する linear Poisson 構造と compatible な quadratic Poisson 構造を構成するための処方箋が得られたことになる. これが, quadratic Poisson 構造を一般化した動機の一つである. もちろん, 与えられた r に対して適切な a を構成するのは non-trivial な問題である.

20.3 adjoint invariant functions の Poisson 可換性

次の定理は quadratic Poisson bracket に関して互いに可換な Hamiltonians を構成するための一つの処方箋を与えている.

定理 20.6 (adjoint invariant functions の Poisson 可換性) H, K が G 上の adjoint invariant functions ならば $\{H, K\}_2 = 0$.

証明. H が G 上の adjoint invariant function であれば, $H(gx) = H(xg)$ であるから, $X \in \mathfrak{g}$ に対して, $X^L H = X^R H$ である. ここで,

$$(X^L H)(x) = [\partial_s H(xe^{sX})]_{s=0}, \qquad (X^R H)(x) = [\partial_s H(e^{sX} x)]_{s=0}.$$

よって, $a = \sum A_i \otimes B_i$, $b = \sum C_i \otimes D_i$, $s = \sum S_i \otimes T_i$ と書くと,

$$\begin{aligned}
\{H, K\}_2 &= \sum A_i^L(H) B_i^L(K) - \sum C_i^R(H) D_i^R(K) \\
&\quad + \sum S_i^L(H) T_i^R(K) - \sum T_i^R(H) S_i^L(K) \\
&= \sum A_i^L(H) B_i^L(K) - \sum C_i^L(H) D_i^L(K) \\
&\quad + \sum S_i^L(H) T_i^L(K) - \sum T_i^L(H) S_i^L(K).
\end{aligned}$$

ここで, $\frac{1}{2} r = a + s = b + t$, $t = \sigma(s)$ を使うと, 最後の式が 0 になることがわかる. □

20.4 群 G 上の Lax 方程式との関係

G 上の函数 F に対して, G 上の $\mathfrak{g}$-valued function DF, $D'F$ を次のように定義する:

$$\langle DF(x), X \rangle = (X^L F)(x) = [\partial_s F(xe^{sX})]_{s=0},$$

$$\langle D'F(x), X\rangle = (X^R F)(x) = [\partial_s F(e^{sX}x)]_{s=0}.$$

このとき,

$$\{F,H\}_2 = \langle DF, a(DH)\rangle - \langle D'F, b(D'H)\rangle + \langle DF, s(D'H)\rangle - \langle D'F, t(DF)\rangle.$$

実際, $a=\sum A_i\otimes B_i$, $b=\sum C_i\otimes D_i$, $s=\sum S_i\otimes T_i$ と書くと,

$$a(X)=\sum A_i\langle B_i, X\rangle, \text{ etc}$$

によって $\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ と $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ を同一視していたので,

$$\begin{aligned}
\{F,H\}_2 &= \sum A_i^L(F)B_i^L(H) - \sum C_i^R(F)D_i^R(H) \\
&\quad + \sum S_i^L(F)T_i^R(H) - \sum T_i^R(F)S_i^L(H) \\
&= \sum\langle DF, A_i\rangle\langle DH, B_i\rangle - \sum\langle D'F, C_i\rangle\langle D'H, D_i\rangle \\
&\quad + \sum\langle DF, S_i\rangle\langle D'H, T_i\rangle - \sum\langle D'F, T_i\rangle\langle DH, S_i\rangle \\
&= \langle DF, a(DH)\rangle - \langle D'F, b(D'H)\rangle + \langle DF, s(D'H)\rangle - \langle D'F, t(DH)\rangle.
\end{aligned}$$

よって, H に対応する Hamiltonian vector field $P_2(H)=\{\bullet, H\}_2$ は

$$P_2(H) = a(DH)^L - b(D'H)^R + s(D'H)^L - t(DH)^R$$

と書ける. これを tensor notation で書くと,

$$P_2(H) = La(DH(L)) - b(D'H(L))L + Ls(D'H(L)) - t(DH(L))L.$$

ここで, H は G 上の adjoing invariant function であると仮定する. このとき,

$$DH = D'H, \qquad xDH(x)x^{-1} = DH(x) \quad \text{for } x\in G$$

が成立することが容易に確かめられる. よって, $\frac{1}{2}r = a+s = b+t$ より,

$$P_2(H) = ((a+s)(DH))^L - ((b+t)(DH))^R = \frac{1}{2}(r(DH)^L - r(DH)^R).$$

これを tensor notation で書くと,

$$P_2(H) = \frac{1}{2}(Lr(DH(L)) - r(DH(L))L) = \frac{1}{2}[L, r(DH(L))].$$

ここで, 第 2 節にしたがって, $r_\pm\in\mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ を

$$r = r_+ + r_-, \qquad 1 = r_+ - r_-$$

という条件によって定めると, $r = 2r_+ - 1 = 2r_- + 1$ でかつ

$$[L, DH(L)] = 0 \qquad (\text{これは } xDH(x)x^{-1} = DH(x) \text{ for } x\in G \text{ の言い換え})$$

あるから,

$$\frac{1}{2}[L, r(DH(L))] = [L, r_+(DH(L))] = [L, r_-(DH(L))].$$

以上によって, 次の定理が示された.

定理 20.7 G 上の adjoint invariant function H に対する quadratic Poisson bracket についての Hamilton 方程式は次ような Lax 方程式の形になる:

$$\partial_t(L) = \frac{1}{2}[L, r(DH(L))] = [L, r_+(DH(L))] = [L, r_-(DH(L))].$$

これは $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$ 上ではなく G 上の Lax 方程式であることに注意せよ. □

注意 20.8 この Lax 方程式の右辺は他のノートのそれの -1 倍になってしまっているが, それを $+1$ 倍にしたければ Poisson 構造の定義を全て -1 倍すれば良い. □

注意 20.9 以上の定式化を群 G の自己同形 τ によって捻った version が存在する. Sklyanin bracket とその twist の場合に関しては, Dynamical System VII [ReyS] の 208 頁を見よ. その Theorem 12.25 の我々の場合における version を定式化可能である. τ の典型的な例は G を別の群 G_0 の N 個の直積に取った場合における巡回置換であり, 巡回格子上の古典可積分系 (連続時間変数) の構成と関係している. □

例 20.10 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$, $\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr}(XY)$, $G = GL(n)$, $H(L) = \frac{1}{m}\operatorname{tr}(L^m)$ であるとき, H は adjoint invariant でかつ

$$\langle DH(L), X\rangle = \frac{1}{m}[\partial_s \operatorname{tr}((Le^{sX})^m)]_{s=0} = \operatorname{tr}(L^m X) = \langle L^m, X\rangle.$$

すなわち, $DH(L) = L^m$ である. よって, quadratic Poisson bracket に関する Hamilton 方程式は次の形になる:

$$\partial_t(L) = [L, r_+(L^m)] = [L, r_-(L^m)]. \quad \square$$

Part 9　(2001年6月28日)

21　quadratic Poisson bracket (3) 群演算との関係

G は Lie group であるとし, $\mathfrak{g}$ はその Lie algebra であり, $\mathfrak{g}$ には invariant nondegenerate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ が入っているとし, $\langle\ ,\ \rangle$ を通して, $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$ とみなす.

$a_i, b_i, s_i, t_i \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ は以下の条件を満たしていると仮定する:

$$t = s^*, \tag{a}$$

$$a^* = -a, \quad b^* = -b \qquad (\text{すなわち } a, b \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}). \tag{b}$$

$$t([a(X), Y] + [X, a(Y)]) = [t(X), t(Y)], \tag{A}$$

$$s([b(X), Y] + [X, b(Y)]) = [s(X), s(Y)], \tag{B}$$

$$a([a(X), Y] + [X, a(Y)]) - [a(X), a(Y)] = \frac{1}{4}\lambda^2 [X, Y], \tag{C}$$

$$b([b(X), Y] + [X, b(Y)]) - [b(X), b(Y)] = \frac{1}{4}\lambda^2 [X, Y]. \tag{D}$$

このとき,

$$P_{i,x} = (x \otimes x) a_i - b_i (x \otimes x) + (x \otimes 1) s_i (1 \otimes x) - (1 \otimes x) t_i (x \otimes 1) \qquad (x \in G)$$

によって定められる G 上の Poisson bivector P_i は G に Poisson 構造を定めるのであった (系 18.4 = 定理 20.1).

P_i によって Poisson 多様体とみなされた G を G_i と書き, その Poisson bracket を $\{\ ,\ \}_i$ と書くことにする.

一般に Poisson 多様体のあいだの写像 $\phi : M \to N$ が Poisson であるとは,

$$\{\phi^* f, \phi^* g\}_M = \phi^* \{f, g\}_N \qquad (f,\ g \text{ は } N \text{ 上の函数})$$

が成立することである. ここで, $\phi^* f(x) = f(\phi(x))$.

以下において, 群演算

$$u : e \to G_1, \qquad u(e) = e,$$
$$i : G_1 \to G_2, \qquad i(x) = x^{-1},$$
$$m : G_2 \times G_1 \to G_3, \qquad m(x, y) = xy,$$

が Poisson map になるための十分条件を与える.

21.1　単位元の 1 点が Poisson 部分多様体になるための条件

記号の簡単のため, a_1, b_1, s_1, t_1, G_1, $\{\ ,\ \}_1$ の添字の 1 を省略して書くことにする.

1 点の上の Poisson 構造は trivial なものしかないので, 包含写像

$$u : \{e\} \to G, \qquad u(e) = e$$

が Poisson になるための必要十分条件は

$$\{f,g\}(e)=0 \qquad (f,\ g \text{ は } G \text{ 上の函数})$$

となることである．これは, $P_e=0$ と同値である．しかし,

$$P_e=a-b+s-t$$

であるから, $P_e=0$ となるための必要十分条件は

$$a+s=b+t$$

が成立することである.

21.2 逆元を取る演算が Poisson map になるための条件

逆元を取る演算 $i:G_1\to G_2$, $i(x)=x^{-1}$ が Poisson であることの定義は

$$\{i^*f,i^*g\}_1=i^*\{f,g\}_2 \qquad (f,\ g \text{ は } G_2 \text{ 上の函数})$$

が成立することである．ここで, $i^*f(x)=f(x^{-1})$ である．これは

$$-P_{1,x}=P_{2,x}$$

すなわち,

$$P_{1,x}+P_{2,x}=0$$

と同値である．そのことは,

$$X^L(i^*f)=-i^*(X^Rf), \quad X^R(i^*f)=-i^*(X^Lf) \qquad (X\in\mathfrak{g})$$

を用いれば容易に確かめられる．よって,

$$a_2=-a_1, \quad b_2=-b_1, \quad s_2=-s_1, \quad t_2=-t_1$$

のとき, 逆元を取る演算は Poisson map になる.

21.3 群の積演算が Poisson map になるための条件

群の積演算 $m:G_2\times G_1\to G_3$, $m(x,y)=xy$ が Poisson map であることの定義は,

$$\{f(x\,\bullet),g(x\,\bullet)\}_1(y)+\{f(\bullet\,y),g(\bullet\,y)\}_2(x)=\{f,g\}_3(xy)$$

が成立することである．ここで, f, g は G_3 上の函数である．これは,

$$(x\otimes x)P_{1,y}+P_{2,x}(y\otimes y)=P_{3,xy}$$

と同値である．そして,

$$(x\otimes x)P_{1,y}$$

$$
\begin{aligned}
&= (xy\otimes xy)a_1 - (x\otimes x)b_1(y\otimes y) + (xy\otimes x)s_1(1\otimes y) - (x\otimes xy)t_1(y\otimes 1)),\\
&P_{2,x}(y\otimes y)\\
&= (x\otimes x)a_2(y\otimes y) - b_2(xy\otimes xy) + (x\otimes 1)s_2(y\otimes xy) - (1\otimes x)t_2(xy\otimes y)
\end{aligned}
$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
&(x\otimes x)P_{1,y} + P_{2,x}(y\otimes y)\\
&= (xy\otimes xy)a_1 + (x\otimes x)(a_2-b_1) - b_2(xy\otimes xy)\\
&+ (xy\otimes 1)((1\otimes x)s_1(1\otimes x^{-1}) + (y^{-1}\otimes 1)s_2(y\otimes 1))(1\otimes xy)\\
&- (1\otimes xy)((x\otimes 1)t_1(x^{-1}\otimes 1) + (1\otimes y^{-1})t_2(1\otimes y))(xy\otimes 1).
\end{aligned}
$$

これと,

$$
P_{3,xy} = (xy\otimes xy)a_3 - b_3(xy\otimes xy) + (xy\otimes 1)s_3(1\otimes xy) - (1\otimes xy)t_3(xy\otimes 1)
$$

を比べると,

$$
\begin{aligned}
&s_1 = s_2 = s_3 = 0 \qquad (\text{そのとき}, t_1 = t_2 = t_3 = 0),\\
&a_3 = a_1, a_2 = b_1, b_3 = b_2
\end{aligned}
$$

のとき, 群の積演算 $G_2\times G_1 \to G_3$ が Poisson map になることがわかる.

注意 21.1 以上の議論では, s や t が生き残っているとき, quadratic Poisson bracket は群の積演算との相性があまり良くないように見える.

しかし, その原因は $G\times G$ 上に Poisson 多様体の直積としての Poisson 構造を入れたからそうなったのである. $G\times G$ 上に直積型ではない quadratic Poisson 構造を入れることによって, s や t が生き残っている場合でも, 群の積演算が Poisson map になるようにできる.

一般に N 個の直積 G^N 上には直積型とは異なる quadratic Poisson 構造を入れることができる. そのような Poisson 構造は nonultralocal systems で重要になる. Semenov-Tian-Shansky と Sevostyanov の `hep-th/9509029` や Y. B. Suris の `solv-int/9610001` などを参照せよ[10]. (一般に, 直積型の Poisson 構造に基いた system は ultralocal と呼ばれる. S^1 上の connections の空間に入る Poisson 構造が S^1 上のパラメーターに関する導函数を取る演算を含まず, 各点ごとの演算で書けているとき, その Poisson 構造は ultralocal であると言う.)

この事実は巡回格子上の模型を扱う場合に重要である. 群の積演算が定める N 個の G の直積 G^N から G への写像は T は monodromy map と呼ばれている. もしも, monodromy map T が Poisson map であれば, G 上の互いに Poisson 可換な函数の T による引き戻しは G^N 上で Poisson 可換になる. この事実は可積分系に関する逆散乱法の理論において基本的である.

そういう基本的な哲学に関しては M. A. Semenov-Tian-Shansky の仕事を参照せよ. □

[10] G^N から G への積写像 (monodromy map) が Poisson map になるようなの G^N (および G) 上の quadratic Poisson bracket の一般論に関しては Suris の [Su2] を参照せよ. その量子化が [FM2] で扱われている.

見易く整理するために, $a = a_1$, $b = b_1 = a_2$, $c = b_2 = b_3$ と置いて, 定理の形でまとめておこう.

定理 21.2 $f = a, b, c \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ はどれも

$$f^* = -f, \qquad f([f(X), Y] + [X, f(Y)]) - [f(X), f(Y)] = \frac{1}{4}\lambda^2 [X, Y]$$

を満たしていると仮定する. このとき, G 上の bivector $P_{a,b}$ を次のように定めると $P_{a,b}$ は G 上に Poisson 構造を定める:

$$P_{a,b;x} = (x \otimes x)a - b(x \otimes x) \qquad (x \in G).$$

G を $P_{a,b}$ によって Poisson 多様体とみなしたものを $G_{a,b}$ と書くことにする. $G_{b,c}$, $G_{a,c}$ も同様に定める. このとき, 群の積演算

$$G_{b,c} \times G_{a,b} \to G_{a,c}$$

は Poisson map になる. □

注意 21.3 $P_{a,b}$ に対応する Poisson bracket $\{\ ,\ \}_{a,b}$ を tensor notation で書くと,

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\} = (L \otimes L)a - b(L \otimes L).$$

なお, 群の積演算が定める Poisson map

$$G_{b,c} \times G_{a,b} \to G_{a,c}$$

は写像の合成

$$\mathrm{Hom}(B, C) \times \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C)$$

と同じ規則にしたがっているとおぼえておけば忘れることがないだろう. □

系 21.4 (Sklyanin bracket) Sklyanin bracket の定理の記号における $P_{a,a}$ に対応する Poisson 構造のことであり, 群の積演算

$$G_{a,a} \times G_{a,a} \to G_{a,a}$$

は Poisson map になる. すなわち, G は Sklyanin bracket に関して Poisson Lie group をなす. □

系 21.5 群の積演算が定める次の写像は共に Poisson である:

$$G_{a,b} \times G_{a,a} \to G_{a,b},$$
$$G_{a,a} \times G_{b,a} \to G_{b,a}.$$

すなわち, a に対応する Sklyanin braket で G を Poisson Lie group とみなすとき, G は $G_{a,b}$ に右から Poisson 作用し, $G_{b,a}$ に左から Poisson 作用する. □

Part 10 (2001年7月2日)

22 modified CYBE + unitarity condition の parabolic induction

この節では modified classical Yang-Baxter equation + unitarity condition (mCYBE + UC) の解を subalgebra への induction で構成する方法を説明する.

$\mathfrak{g}$ は Lie algebra であり, $\langle\ ,\ \rangle$ はその invariant nondegenerate symmetric bilinear form であるとする. $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_\pm$ は $\mathfrak{g}$ の subalgebras であり, 以下が成立していると仮定する:

(1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$ (線形直和).

(2) $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_\pm] \subset \mathfrak{g}_\pm$.

(3) $\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_\pm$, $\mathfrak{g}_+ \times \mathfrak{g}_+$, $\mathfrak{g}_- \times \mathfrak{g}_-$ の上で $\langle\ ,\ \rangle$ は 0 である.

さらに, $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_\pm$ への projection を p_0, $p_\pm$ と書き,

$$X_0 = p_0(X), \quad X_+ = p_+(X), \quad X_- = -p_-(X) \qquad (X \in \mathfrak{g})$$

と置き, p_0 と $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}_0)$ の合成も f と書くことにする.

$r \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ が modified classical Yang-Baxter equation を満たしているとは,

$$r([r(X), Y] + [X, r(Y)]) - [r(X), r(Y)] - [X, Y] = 0 \qquad (X, Y \in \mathfrak{g}) \tag{mCYBE}$$

が成立していることであり, r が unitarity condition を満たしているとは,

$$r^* = -r \qquad (\text{i.e. } \langle r(X), Y\rangle = -\langle X, r(Y)\rangle) \tag{UC}$$

が成立していることである.

定理 22.1 以上の記号のもとで, $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}_0)$ に対して,

$$r = p_+ - p_- + f \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$$

と置くと, 以下が成立する:

(1) r が mCYBE を満たす $\iff$ f が mCYBE を満たす.

(2) r が UC を満たす $\iff$ f が UC を満たす.

証明. $X = X_+ - X_- + X_0$, $r(X) = X_+ + X_- + f(X_0)$, etc. を用いて計算すると以下の公式が成立する:

$$\begin{aligned}
&r([r(X), Y] + [X, r(Y)]) - [r(X), r(Y)] - [X, Y] \\
&= f([f(X_0), Y_0] + [X_0, f(Y_0)]) - [f(X_0), f(Y_0)] - [X_0, Y_0],
\end{aligned}$$

$$\langle r(X), Y\rangle + \langle X, r(Y)\rangle = \langle f(X_0), Y_0\rangle + \langle X_0, f(Y_0)\rangle.$$

このそれぞれから (1), (2) が導かれる. □

系 22.2 上の定理で $\mathfrak{g}_0$ が Abelian ならば, 任意の f に対して r は mCYBE の解であり, $f=0$ すなわち $r=p_+-p_-$ ならば, r は mCYBE + UC の解である. □

注意 22.3 (1) $\mathfrak{g}_0$ が Abelian でないならば $f=0$ は $\mathfrak{g}_0$ における mCYBE の解ではない.

(2) $f=\mathrm{id}_{\mathfrak{g}_0}$ は常に mCYBE の解であるが, $\mathfrak{g}_0\neq 0$ ならば UC を満たしてない.

(3) f が mCYBE の解であれば, $-f$ もそうである. □

例 22.4 $\mathfrak{g}$ は symmetrizable Kac-Moody algebra であり,

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_0&=\mathfrak{h}=(\mathfrak{g}\text{ の Cartan subalgebra}),\\ \mathfrak{g}_+&=\mathfrak{n}_+=(\mathfrak{g}\text{ の標準的な上三角}),\\ \mathfrak{g}_-&=\mathfrak{n}_-=(\mathfrak{g}\text{ の標準的な下三角})\end{aligned}$$

と置くと, $\mathfrak{h}$ は Abelian であるから, 任意の $f\in\mathrm{End}(\mathfrak{h})$ に対して,

$$r=p_+-p_-+f: X_+-X_-+X_0\mapsto X_++X_-+f(X_0)$$

は mCYBE の解であり, さらに $f^*=-f$ であれば, r は UC の解でもある. $f=0$ に対する r を $\mathfrak{g}$ の標準的な r-matrix と呼ぶ. $f=\mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$ のとき, r は $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{b}_+=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_+$ と $\mathfrak{n}_-$ に分解した場合に対応する r-operator であり, UC を満たしてない mCYBE の解の典型的な例である. □

例 22.5 上の定理の状況で, $f\in\mathrm{End}(\mathfrak{g}_0)$ は mCYBE の解であるとする. このとき, $r=p_+-p_-+f$ と $r'=p_+-p_--f$ は共に mCYBE の解である. 特に, $f=\mathrm{id}_{\mathfrak{g}_0}$ に対応する

$$r=p_{\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_+}-p_{\mathfrak{g}_-},\qquad r'=p_{\mathfrak{g}_+}-p_{\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_-}$$

は mCYBE の解である. ここで, $p_{\mathfrak{a}}$ は $\mathfrak{a}$ への projection である. しかし, これは $\mathfrak{g}_0=0$ でなければ UC の解ではない. □

23 quadratic Poisson bracket (4) 例の構成

この節では一般化された quadratic Poisson bracket の Semenov-Tian-Shansky による解釈を紹介し, それを用いて一般化された quadratic Poisson bracket の例を構成する. 基本文献は [Se2], [SS] である.

$\mathfrak{g}$ は Lie algebra であり, $\langle\ ,\ \rangle$ はその invariant nondegenerate symmetric bilinear form であるとする.

$\mathfrak{d}=\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ (直積 Lie algebra) と置き, $\mathfrak{d}$ に invariant nondegenerate symmetric bilinear form を次のように定める:

$$\langle (X,Y),\ (X',Y')\rangle=\langle X,X'\rangle-\langle Y,Y'\rangle\qquad (X,Y,X',Y'\in\mathfrak{g}).$$

この $(\mathfrak{d},\langle\ ,\ \rangle)$ を $(\mathfrak{g},\langle\ ,\ \rangle)$ の double と呼ぶことにする. Semenov-Tian-Shansky は一般化された quadratic Poisson bracket の double を用いた自然な解釈を発見した ([Se2]).

$\mathfrak{d}$ の元を $\mathfrak{g}$ の元を 2 つ縦に並べた縦ベクトルで表わすことにし, $r_{\mathfrak{d}} \in \mathrm{End}(\mathfrak{d})$ を $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ に関する 2×2 行列で表わすことにする:

$$r_{\mathfrak{d}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad r_{\mathfrak{d}} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aX + bY \\ cX + dY \end{bmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$$

定理 23.1 前節の用語のもとで, $r_{\mathfrak{d}}$ が mCYBE + UC の解であるための必要十分条件は次の条件が成立していることである:

$$b^* = c. \tag{a}$$

$$a^* = -a, \qquad d^* = -d. \tag{b}$$

$$c([a(X), Y] + [X, a(Y)]) = [c(X), c(Y)]. \tag{A}$$

$$b([d(X), Y] + [X, d(Y)]) = [b(X), b(Y)]. \tag{B}$$

$$a([a(X), Y] + [X, a(Y)]) - [a(X), a(Y)] = [X, Y]. \tag{C}$$

$$d([d(X), Y] + [X, d(Y)]) - [d(X), d(Y)] = [X, Y]. \tag{D}$$

これらの条件が成立するとき, $\mathfrak{g}$ に対応する群 G 上に次の tensor notation によって Poisson 構造を入れることができる:

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\}_2 = \frac{1}{2}(L^1 L^2 a + L^1 b L^2 - L^2 c L^1 - d L^1 L^2).$$

証明. 前半の証明は straightforward である. 系 18.4 より, 前半から後半が導かれる. ただし, この定理における a, b, c, d が系 18.4 において a, s, t, b と書かれていることに注意せよ. (より正確に言えば, この定理における a, b, c, d の $\lambda/2$ 倍が系 18.4 における a, s, t, b に対応している.) □

この結果を用いることによって, 前節の結果を用いて, (a), (b), (A), ..., (D) の解を大量に構成することができる.

次の補題は本質的に定理 2.2 の再掲である.

補題 23.2 $r \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ に対して, $r_{\pm} \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ を

$$r_+ + r_- = r, \qquad r_+ - r_- = 1$$

という条件によって定めると以下が成立する:

(1) r は mCYBE を満たす $\iff$ $2r_+([r(X), Y] + [X, r(Y)]) = [2r_+(X), 2r_+(Y)]$.

(2) r は mCYBE を満たす $\iff$ $2r_-([r(X), Y] + [X, r(Y)]) = [2r_-(X), 2r_-(Y)]$.

(3) r は UC を満たす $\iff$ $r_+^* = -r_-$. □

例 23.3 上の補題の記号のもとで, $r_{\mathfrak{d}} \in \mathrm{End}(\mathfrak{d})$ を

$$r_{\mathfrak{d}} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & -2r_- \\ 2r_+ & -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_+ + r_- & -r_- - r_- \\ r_+ + r_+ & -r_+ - r_- \end{bmatrix}.$$

すなわち

$$r_{\mathfrak{d}}\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r(X)-2r_-(Y)\\2r_+(X)-r(Y)\end{bmatrix}$$

と定めるとき, $r_{\mathfrak{d}}$ が mCYBE + UC の解であることと r が mCYBE + UC の解であることは同値である. 同値性は定理 23.1 と補題 23.2 から導かれる. このとき,

$$a+b=r-2r_-=r_+-r_-=1,$$
$$c+d=2r_+-r=r_+-r_-=1$$

であることに注意せよ. $1\in\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ は UC を満たしてない mCYBE の解の最も簡単な場合である. なお, $r_{\mathfrak{d}}$ が

$$r_{\mathfrak{d}}\begin{bmatrix}X\\X\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X\\X\end{bmatrix},\qquad r_{\mathfrak{d}}\begin{bmatrix}r_-(Y)\\r_+(Y)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}r_-(Y)\\r_+(Y)\end{bmatrix}$$

を満たしていることに注意すれば $r_{\mathfrak{d}}$ が mCYBE を満たしていることを直接証明することも易しい. □

前節と同様に, $\mathfrak{g}_+$, $\mathfrak{g}_-$, $\mathfrak{g}_0$ は $\mathfrak{g}$ の subalgebras であり, 以下が成立していると仮定する:

(1) $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_-\oplus\mathfrak{g}_0\oplus\mathfrak{g}_+$ (線形直和).

(2) $[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_\pm]\subset\mathfrak{g}_\pm$.

(3) $\mathfrak{g}_0\times\mathfrak{g}_\pm$, $\mathfrak{g}_+\times\mathfrak{g}_+$, $\mathfrak{g}_-\times\mathfrak{g}_-$ の上で $\langle\ ,\ \rangle$ は 0 である.

さらに, $\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_\pm$ への projection を p_0, $p_\pm$ と書き,

$$X_0=p_0(X),\quad X_+=p_+(X),\quad X_-=-p_-(X)\qquad(X\in\mathfrak{g})$$

と置き, p_0 と $f\in\mathrm{End}(\mathfrak{g}_0)$ の合成も f と書くことにする.

$f\in\mathrm{End}(\mathfrak{g}_0)$ は $\mathfrak{g}_0$ における mCYBE + UC の解であると仮定する. このとき, 定理 22.1 より,

$$r=p_+-p_-+f\in\mathrm{End}(\mathfrak{g}),$$
$$r'=p_+-p_--f\in\mathrm{End}(\mathfrak{g})$$

は $\mathfrak{g}$ における mCYBE + UC の解である.

定理 23.4 次の $r_{\mathfrak{d}}$ は $\mathfrak{d}$ における mCYBE + UC の解である[11]:

$$r_{\mathfrak{d}}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r&-2f_-\\2f_+&r'\end{bmatrix}.\quad\square$$

証明は後回しにして重要な注意を述べておく.

[11] この定理に含まれない重要な例が [O1], [O2] にある.

注意 23.5 上の定理の状況において,

$$a + b = c + d = (p_0 + p_+) - p_-$$

が成立していることに注意せよ. この等式の最右辺は $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$ と $\mathfrak{g}_-$ への分解に対応する r-operator である. それは, $\mathfrak{g}$ における mCYBE の解であるが, $\mathfrak{g}_0 \neq 0$ であれば常に UC を満たしてない. $M \in \mathfrak{g}$ に対して, 次のように置く:

$$M_{0+} = (p_0 + p_+)(M), \qquad M_- = -p_-(M).$$

さて, 第 20.4 節の定理 20.7 によれば, このような a, b, c, d に対応する G 上の quadratic Poisson structure

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\}_2 = \frac{1}{2}(L^1 L^2 a + L^1 b L^2 - L^2 c L^1 - d L^1 L^2)$$

を考えると, G 上の adjoint invariant function H に関する Hamilton 方程式は次の形になるのであった:

$$\partial_t(L) = \frac{1}{2}[L,\ M(L)_{0+} - M(L)_-] = [L,\ M(L)_{0+}] = [L,\ M(L)_-].$$

ここで, $M(L) = DH(L)$ であり, G 上の $\mathfrak{g}$-valued function DH は次のように定義される:

$$\langle DH(x), X\rangle = [\partial_s H(x e^{sX})]_{s=0} \qquad (x \in G,\ X \in \mathfrak{g}).$$

したがって, 定理 23.4 によって, $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$ と $\mathfrak{g}_-$ への分解に対応する G 上の Lax 方程式を Hamilton 方程式として与えるような G 上の Poisson 構造の構成の仕方が得られたことになる. □

定理 23.4 の証明. $\mathfrak{d}$ の subalgebras $\mathfrak{d}_0$, $\mathfrak{d}_\pm$ を次のように定める:

$$\mathfrak{d}_0 = \mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0, \qquad \mathfrak{d}_\pm = \mathfrak{g}_\pm \times \mathfrak{g}_\pm.$$

このとき, $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_- \oplus \mathfrak{d}_0 \oplus \mathfrak{d}_+$ という分解は前節の $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+$ と同様の条件を満たしている.

補題 23.2 のように, $f_\pm$ を次のように定める:

$$f_+ + f_- = f, \qquad f_+ - f_- = 1.$$

このとき, $r_{\mathfrak{d}_0} \in \mathrm{End}(\mathfrak{d}_0)$ を

$$r_{\mathfrak{d}_0} = \begin{bmatrix} f & -2f_- \\ 2f_+ & -f \end{bmatrix}$$

と定めると, 例 23.3 より, $r_{\mathfrak{d}_0}$ は $\mathfrak{d}_0$ における mCYBE + UC の解である.

よって, $\mathfrak{d}_0$, $\mathfrak{d}_\pm$ への projection をそれぞれ q_0, $q_\pm$ と書き, q_0 と $r_{\mathfrak{d}_0}$ の合成も $r_{\mathfrak{d}_0}$ と書くことにすると, 定理 22.1 より, $q_+ - q_- + r_{\mathfrak{d}_0}$ は $\mathfrak{d}$ における mCYBE + UC の解になっている. そして,

$$(q_+ - q_- + r_{\mathfrak{d}_0}) \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_+ + X_- + f(X_0) - 2f_-(Y_0) \\ Y_+ + Y_- + 2f_+(X_0) - f(Y_0) \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \big(X_+ + X_- + f(X_0)\big) + \big(-2f_-(Y_0)\big) \\ \big(2f_+(X_0)\big) + \big(Y_+ + Y_- - f(Y_0)\big) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r & -2f_- \\ 2f_+ & r' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

すなわち, $r_{\mathfrak{d}} = q_+ - q_- + r_{\mathfrak{d}_0}$. □

例 23.6 $\mathfrak{a}$ は有限次元 complex reductive Lie algebra であり, (,) はその invariant nondegenerate symmetric bilinear form であるとし,

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{a}_+$$

は $\mathfrak{a}$ の Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$ に関する標準的な三角分解であるとする. $\mathfrak{a}$ から $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{a}_\pm$ への projections をそれぞれ q_0, $q_\pm$ と書くことにする. このとき,

$$f = q_+ - q_- \in \mathrm{End}(\mathfrak{a})$$

は mCYBE + UC の解である. (,) を用いて $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}$ と同一視し, さらに $\mathrm{End}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}^* = \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$ とみなすと, f は次のように表わされる:

$$f = \sum (E_i \otimes F_i - F_i \otimes E_i).$$

ここで, E_i, F_i は $\mathfrak{a}_+$, $\mathfrak{a}_-$ の dual bases である. $f_\pm$ を

$$f_+ + f_- = f, \qquad f_+ - f_- = 1$$

によって定めると,

$$
\begin{aligned}
f_+ &= \ \ \frac{1}{2}\sum H_a \otimes H_a + \sum E_i \otimes F_i, \\
f_- &= -\frac{1}{2}\sum H_a \otimes H_a - \sum F_i \otimes E_i.
\end{aligned}
$$

ここで, H_a は $\mathfrak{h}$ の orthonormal basis である. f_+ は $\mathfrak{a}$ の standard classical r-matrix である.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}((z))$ と置き, $\mathfrak{g}$ の invariant nondegenerate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$\langle X, Y\rangle := \mathrm{Res}[(X(z), Y(z))\, z^{-1}\, dz] \qquad (X, Y \in \mathfrak{g} = \mathfrak{a}((z)))$$

と定める. このとき, $\mathfrak{a}$ は自然に $\mathfrak{g}$ の subalgebra とみなせ,

$$\langle X_0, Y_0\rangle = (X_0, Y_0) \qquad (X_0, Y_0 \in \mathfrak{a})$$

が成立している. $\mathfrak{g}$ の subalgebras $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_\pm$ を次のように定める:

$$\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{g}_+ := \mathfrak{a}[[z]]z, \quad \mathfrak{g}_- := \mathfrak{a}[z^{-1}]z^{-1}$$

$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_\pm$ projections をそれぞれ p_0, $p_\pm$ と書くことにする. p_0 と f, $f_\pm$ の合成も f, $f_\pm$ と書くことにする. このとき,

$$r = p_+ - p_- + f, \qquad r' = p_+ - p_- - f$$

はともに $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}((z))$ における mCYBE + UC の解である. $\langle\ ,\ \rangle$ を用いて $\mathfrak{g}^*=\mathfrak{g}$ と同一視し, さらに $\mathrm{End}(\mathfrak{g})=\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^*=\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ と同一視すると, $p_\pm$ は次のように表わされる:

$$p_+=\sum_{m\geq 1} z_1^m z_2^{-m}\Omega=(z_2-z_1)^{-1}z_1\Omega \qquad (|z_1|<|z_2|),$$
$$p_-=\sum_{m\leq -1} z_1^m z_2^{-m}\Omega=(z_1-z_2)^{-1}z_2\Omega \qquad (|z_1|>|z_2|).$$

ここで, $z_1=z\otimes 1$, $z_2=1\otimes z$,

$$\Omega=\sum H_a\otimes H_a+\sum(E_i\otimes F_i+F_i+E_i)$$

と置いた. $r_\pm$ を

$$r_+ + r_- = r, \qquad r_+ - r_- = 1$$

によって定めると,

$$r_+ = p_+ + f_+, \qquad r_- = -p_- + f_-.$$

r_+ は次のように表わされる:

$$\begin{aligned} r_+ = \frac{1}{2}\frac{z_2+z_1}{z_2-z_1}\sum_a H_a\otimes H_a \\ + \frac{z_2}{z_2-z_1}\sum_i E_i\otimes F_i + \frac{z_1}{z_2-z_1}\sum_i F_i\otimes E_i. \end{aligned}$$

これは $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}((z))$ の standard classical r-matrix である.

$\mathfrak{d}=\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ と置き, $\mathfrak{d}$ の invariant nondegenerate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$\langle (X_1,X_2),\ (Y_1,Y_2)\rangle = \langle X_1,Y_1\rangle - \langle X_2,Y_2\rangle \qquad (X_i,Y_i\in\mathfrak{g})$$

と定める. このとき,

$$\mathfrak{d}_+=\Delta(\mathfrak{g})=\{\,(X,X)\mid X\in\mathfrak{g}\,\},$$
$$\mathfrak{d}_-=\{\,(-H+F,H+E)\mid H\in\mathfrak{h},\ E\in\mathfrak{a}_+ + \mathfrak{g}_+,\ F\in\mathfrak{a}_- + \mathfrak{g}_-\,\}$$

と置くと, $(\mathfrak{d},\mathfrak{d}_+,\mathfrak{d}_-)$ は Manin triple をなす. $\mathfrak{d}$ を $\mathfrak{g}$ の double と呼ぶ. $\mathfrak{d}=\mathfrak{d}_+\oplus\mathfrak{d}_-$ という分解に関する $\mathfrak{d}$ から $\mathfrak{d}_+$, $\mathfrak{d}_-$ への projection をそれぞれ $r_{\mathfrak{d}_+}$, $-r_{\mathfrak{d}_-}$ と書くことにする. このとき, $r_\mathfrak{d}=r_{\mathfrak{d},+}+r_{\mathfrak{d},-}$ と置くと, $r_\mathfrak{d}$ は $\mathfrak{d}$ における mCYBE + UC の解である. $(A,B)\in\mathfrak{d}$ に対して,

$$\begin{aligned} X &= \quad (f_+ + p_+)(A) - (f_- - p_-)(B) \\ Y_- &= -(f_- - p_-)(A) + (f_- - p_-)(B), \\ Y_+ &= -(f_+ + p_+)(A) + (f_+ + p_+)(B), \end{aligned}$$

と置くと, $X+Y_-=A$, $X+Y_+=B$ であるから,

$$r_{\mathfrak{d}_+}(A,B)=(X,X), \qquad r_{\mathfrak{d}_-}(A,B)=-(Y_-,Y_+).$$

よって, $r_{\mathfrak{d}_\pm}$, $r_{\mathfrak{d}}$ を $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ の元を成分に持つ 2×2 行列で表わすと次のようになる:

$$r_{\mathfrak{d}_+} = \begin{bmatrix} f_+ + p_+ & -f_- + p_- \\ f_+ + p_+ & -f_- + p_- \end{bmatrix},$$
$$r_{\mathfrak{d}_-} = \begin{bmatrix} f_- - p_- & -f_- + p_- \\ f_+ + p_+ & -f_+ - p_+ \end{bmatrix},$$
$$r_{\mathfrak{d}} = \begin{bmatrix} r & -2r_- \\ 2r_+ & -r \end{bmatrix}.$$

この $r_{\mathfrak{d}}$ は例 23.3 の $r_{\mathfrak{d}}$ の形をしている. このとき,

$$r - 2r_- = 2r_+ - r = 1_{\mathfrak{g}}$$

が成立していることに注意せよ.

定理 23.4 より,

$$r'_{\mathfrak{d}} = \begin{bmatrix} r & -2f_- \\ 2f_+ & r' \end{bmatrix}$$

も $\mathfrak{d}$ における mCYBE + UC の解である. このとき,

$$r - 2f_- = 2f_+ - r = (p_0 + p_+) - p_-$$

が成立し, $p_0 + p_+$, p_- はそれぞれ $\mathfrak{a}((z))$ から $\mathfrak{a}[[z]]$, $a[z^{-1}]z^{-1}$ への projections であり, $(p_0 + p_+) - p_-$ は UC を満たしてない mCYBE の解であることに注意せよ. □

注意 23.7 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}((z))$ 上の invariant nondegenerate symmetric bilnear form $\langle\ ,\ \rangle_k$ を

$$\langle X, Y\rangle_k = \mathrm{Res}[(X(z), Y(z))\, z^{k-1}\, dz]$$

と定めることもできる. 上の例は $\langle\ ,\ \rangle = \langle\ ,\ \rangle_0$ の場合である.

$\langle\ ,\ \rangle_1$ に関して, $(\mathfrak{a}((z)), \mathfrak{a}[[z]], \mathfrak{a}[z^{-1}]z^{-1})$ は Manin triple をなすが, $\langle\ ,\ \rangle_0$ に関してはそうではない. $\langle\ ,\ \rangle_1$ に関しては, 上の例における $(p_0 + p_+) - p_-$ は mCYBE + UC の解である.

当たり前のことであるが, 内積の入れ方によって unitarity condition の正否が変化することに注意せよ. □

Part 11　(2001年7月3日)

このノートでは G 上の一般化された quadratic Poisson bracket が実は G の double $D = G \times G$ の上のより扱い易い quadratic Poisson bracket から誘導されることを示す. $\Delta(G)\backslash D$ と G は

$$\Delta(G)\backslash D \cong G, \qquad [(x_1, x_2)] \leftrightarrow x_2^{-1} x_1$$

によって同一視できるので, もしも $\Delta(G)$ の D への左作用で不変な D 上の函数全体が D 上の Poisson bracket で閉じていれば G の上に Poisson 構造が誘導されることになる.

一般化された quadratic Poisson bracket のこの解釈は [Se2], [SS] で注意された.

24　admissible action による商空間への Poisson 構造の reduction

G は Poisson Lie group であるとし, $\mathfrak{g}$ はその tangent Lie bialgebra であるとする. $\mathfrak{g}^*$ の Lie bracket を $[\ ,\ ]_*$ と書くことにする. さらに, M は Poisson 多様体であるとし, M には G が作用しているとする.

$X \in \mathfrak{g}$ に対応する M 上のベクトル場を X_M と書く:

$$X_M f(m) = [\partial_s f(e^{-sX} m)]_{s=0} \qquad (f \text{ は } M \text{ 上の函数で } m \in M).$$

さらに, M 上の函数 f に対して, M 上の $\mathfrak{g}^*$-valued function Df を

$$\langle Df(m), X\rangle = X_M f(m) \qquad (X \in \mathfrak{g},\ m \in M)$$

と定める.

補題 24.1 G が connected であるとき, G の M への作用が Poisson であるための必要十分条件は, M 上の函数 f, g と $X \in \mathfrak{g}$ に対して次が成立することである:

$$X_M\{f, g\}_M - \{X_M f, g\}_M - \{f, X_M g\}_M = \langle [Df, Dg]_*, X\rangle. \tag{$*$}$$

証明. G の M への作用が Poisson であることの定義は M 上の函数 f, g に対して次が成立することである:

$$\{f, g\}_M(xm) = \{f(x\,\bullet), g(x\,\bullet)\}_M(m) + \{f(\bullet\, m), g(\bullet\, m)\}_G(x). \tag{$**$}$$

ここで, $x \in G$, $m \in M$ である. この等式の各項に, $x = e^{-sX}$ $(X \in \mathfrak{g})$ を代入し, s で微分して $s = 0$ と置くと,

$$\begin{aligned}
&\{f, g\}_M(xm) \mapsto X_M\{f, g\}_M(m), \\
&\{f(x\,\bullet), g(x\,\bullet)\}_M(m) \mapsto \{X_M f, g\}_M(m) + \{f, X_M g\}_M(m), \\
&\{f(\bullet\, m), g(\bullet\, m)\}_G(x) \mapsto \langle [Df(m), Dg(m)]_*, X\rangle.
\end{aligned}$$

よって, $(**)$ から $(*)$ が導かれる. G が connected であるとき, 逆向きも成立することもわかる. □

定理 24.2 G の M への作用が Poisson であり, H は G の connected Lie subgroup であり, $\mathfrak{h}$ はその Lie algebra であるとする. このとき, $\mathfrak{h}^\perp$ が $\mathfrak{g}^*$ の Lie subalgebra であれば, M 上の H-invariant functions は Poisson bracket で閉じている.

証明. f, g は M 上の H-invariant function すなわち $\mathfrak{h}$-invariant function であるとする. すなわち, $X \in \mathfrak{h}$ に対して,

$$\langle Df(m), X\rangle = [\partial_s f(e^{-sX}m)]_{s=0} = 0,$$
$$\langle Dg(m), X\rangle = [\partial_s g(e^{-sX}m)]_{s=0} = 0.$$

よって, Df, Dg は $\mathfrak{h}^\perp$ に値を持つ函数である. 補題 24.1 より, $X \in \mathfrak{h}$ に対して,

$$X_M\{f,g\}_M = \langle [Df, Dg]_*, X\rangle.$$

ところが, $\mathfrak{h}^\perp$ が $[\ ,\ ]_*$ に関して閉じているならば, この式の右辺は 0 になる. よって, $\{f,g\}_M$ も $\mathfrak{h}$-invariant すなわち H-invariant である. □

注意 24.3 上の定理の状況のもとで, H が G の Poisson subgroup になるための必要十分条件は $\mathfrak{h}^\perp$ が $\mathfrak{g}^*$ の Lie ideal になることである. それに対して, 上の定理の結論は $\mathfrak{h}^\perp$ が $\mathfrak{g}^*$ の Lie subalgebra であるというそれよりもかなり弱い仮定で成立していることに注意せよ. 上の定理の結論が成立するような群作用を **admissible** と呼ぶ. □

系 24.4 G の M への作用が Poisson であり, H は G の connected Lie subgroup であり, $\mathfrak{h}$ はその Lie algebra であり, $\mathfrak{h}^\perp$ は $\mathfrak{g}^*$ の Lie subalgebra であると仮定する. さらに, $N := H\backslash M$ は多様体になると仮定する. このとき, N 上には M から N への projection が Poisson になるような Poisson 構造が一意に入る.

証明. N 上の函数は M から N への projection による引き戻しによって, M 上の H-invariant な函数と同一視できる. よって, M から N への projection が Poisson になるような Poisson 構造は一意的である. そして, 定理 24.2 より, M 上の H-invariant functions は M の Poisson bracket で閉じている. よって, N の函数環上の Poisson 構造が M のそれから誘導されることがわかる. □

25 quadratic Poisson bracket (5) その正体

G は Lie group であり, $\mathfrak{g}$ はその Lie algebra であるとし, $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathfrak{g}$ 上の invariant nondegenerate symmetric bilinear form であるとする. $\langle\ ,\ \rangle$ を用いて, $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$ と同一視し, $\mathrm{End}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ とみなす.

この節では次の形の G 上の quadratic Poisson bracket がその double $D = G\times G$ 上のより扱い易い Poisson 構造の reduction によって得られることを説明する:

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\} = L^1L^1a + L^1bL^2 - L^2cL^1 - dL^2L^2.$$

ただし, $a^* = -a$, $b^* = c$, $d^* = -d$ であり, $a,\dots,d$ は定理 23.1 の条件を満たしていると仮定する. この Poisson bracket は次のようにも書ける:

$$\{f,g\} = \langle Df, a(Dg)\rangle + \langle Df, b(D'g)\rangle - \langle D'f, c(Dg)\rangle - \langle D'f, d(D'g)\rangle.$$

ここで,

$$\langle Df(x), X\rangle := [\partial_s f(xe^{sX})]_{s=0},$$
$$\langle D'f(x), X\rangle := [\partial_s f(e^{sX}x)]_{s=0}.$$

Df, $D'f$ は D 上の $\mathfrak{g}$-valued function である.

$D = G \times G$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ と置き, $\mathfrak{d}$ 上の invariant nondegenerate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$\langle (X,Y), (X',Y')\rangle = \langle X, X'\rangle - \langle Y, Y'\rangle$$

と定める. $r, r' \in \mathrm{End}(\mathfrak{d})$ を $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ に関する 2×2 行列で表わしておく:

$$r = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad r' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}.$$

r, r' は同一のパラメータ λ に関する mCYBE + UC を満たしていると仮定する. ここで, r に関する mCYBE とは

$$r([r(X), Y] + [X, r(Y)]) - [r(X), r(Y)] - \lambda^2 [X, Y] = 0 \qquad \text{(mCYBE)}$$

という方程式のことであり, UC とは

$$r^* = -r \qquad \text{(UC)}$$

という条件のことである.

このとき, 系 17.6 より, 次のように D 上の Poisson 構造を定めることができる:

$$\{F, G\}_{r,r'} = \langle DF, r(DG)\rangle - \langle D'F, r'(D'F)\rangle.$$

ここで, F, G は $D = G \times G$ 上の函数であり, $(X_1, X_2) \in \mathfrak{d} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ と $(x_1, x_2) \in D$ に対して,

$$\langle DF(x_1, x_2),\ (X_1, X_2)\rangle := [\partial_s F(x_1 e^{sX_1}, x_2 e^{sX_2})]_{s=0},$$
$$\langle D'F(x_1, x_2),\ (X_1, X_2)\rangle := [\partial_s F(e^{sX_1} x_1, e^{sX_2} x_2)]_{s=0}.$$

DF, $D'F$ は D 上の $\mathfrak{d}$-valued function である.

D に $\{F, G\}_{r,r'}$ によって Poisson 構造を入れたものを $D_{r,r'}$ と書くことにする. 第 21.2 節より $D_{r',r'}$ は Poisson Lie group であり, 群演算は $D_{r',r'}$ の $D_{r,r'}$ への left Poisson action を定める.

補題 25.1 $a' + b' = c' + d'$ であり, G が connected であるとき, $D = G \times G$ の diagonal subgroup $\Delta(G) = \{\, (x, x) \mid x \in G \,\}$ は Poisson Lie group $D_{r',r'}$ の Lie subgroup として, 前節の定理 24.2 の条件を満たしている. すなわち, $\Delta(\mathfrak{g}) = \{\, (X, X) \mid X \in \mathfrak{g} \,\}$ の直交補空間 $\Delta(\mathfrak{g})^\perp$ は $D_{r',r'}$ の Poisson Lie group 構造から定まる $\mathfrak{d}^*$ の Lie algebra 構造のもとで $\mathfrak{d}^*$ の subalgebra である.

証明. $D_{r',r'}$ の Poisson Lie group 構造に対応する $\mathfrak{d}^*$ の bracket $[\ ,\ ]_*$ は $\mathfrak{d}^*=\mathfrak{d}$ と同一視すると次のように書ける:

$$[X,Y]_* = -[r'(X),Y]-[X,r'(Y)] \qquad (X,Y\in\mathfrak{d}).$$

また, $\Delta(\mathfrak{g})$ の直交補空間は $\Delta(\mathfrak{g})$ 自身に等しい. よって, $\Delta(\mathfrak{g})$ が $[\ ,\ ]_*$ で閉じていることを示せば良い. $X,Y\in\mathfrak{g}$ に対して,

$$\begin{aligned}
&-[(X,X),\ (Y,Y)]_* \\
&= \Big[\big((a'+b')(X),(c'+d')(X)\big),\ (Y,Y)\Big] + \Big[(X,X),\ \big((a'+b')(Y),(c'+d')(Y)\big)\Big] \\
&= \Big(\big[(a'+b')(X),\ Y\big],\ \big[(c'+d')(X),\ Y\big]\Big) + \Big(\big[X,\ (a'+b')(Y)\big],\ \big[X,\ (c'+d')(Y)\big]\Big).
\end{aligned}$$

よって, $a'+b'=c'+d'$ ならば $[(X,X),\ (Y,Y)]_*\in\Delta(\mathfrak{g})$ である. □

$D=G\times G$ から G への写像 $(x_1,x_2)\mapsto x_2^{-1}x_1$ による G 上の函数の引き戻しの Poisson bracket を計算しよう. そのために, G 上の函数 f, g に対して,

$$F(x_1,x_2)=f(x_2^{-1}x_1), \qquad G(x_1,x_2)=g(x_2^{-1}x_1)$$

と置く. F, G は共に $\Delta(G)=\{\,(y,y)\mid y\in G\,\}$ の D への左作用で不変であり, 逆にそのような D 上の函数は F, G のような形で書ける. D 上の $\mathfrak{g}$-valued function PF を次のように定める:

$$\langle PF(x_1,x_2),X\rangle := [\partial_s F(e^{sX}x_1,x_2)]_{s=0} = [\partial_s F(x_1,e^{-sX}x_2)]_{s=0} \qquad (X\in\mathfrak{g}).$$

補題 25.2 以上の記号のもとで,

$$DF(x_1,x_2)=(Df(x_2^{-1}x_1),D'f(x_2^{-1}x_1)), \tag{1}$$
$$D'F(x_1,x_2)=(PF(x_1,x_2),PF(x_1,x_2)). \tag{2}$$

証明.

$$\begin{aligned}
\langle DF(x_1,x_2),(X_1,X_2)\rangle &= [\partial_s f(e^{-sX_2}x_2^{-1}x_1e^{sX_1})]_{s=0} \\
&= \langle Df(x_2^{-1}x_1),X_1\rangle - \langle D'f(x_2^{-1}x_1),X_2\rangle \\
&= \langle (Df(x_2^{-1}x_1),D'f(x_2^{-1}x_1)),(X_1,X_2)\rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle D'F(x_1,x_2),(X_1,X_2)\rangle &= [\partial_s F(e^{sX_1}x_1,e^{sX_2}x_2)]_{s=0} \\
&= \langle PF(x_1,x_2),X_1\rangle - \langle PF(x_1,x_2),X_2\rangle \\
&= \langle (PF(x_1,x_2),PF(x_1,x_2)),(X_1,X_2)\rangle. \quad \square
\end{aligned}$$

以下, 記号の簡単のため, x_1, x_2 を省略して例えば $f=f(x_2^{-1}x_1)$ などと書くことにする.

補題 25.3 以上の記号のもとで,

$$\langle DF,r(DG)\rangle = \langle Df,a(Dg)\rangle + \langle Df,b(D'g)\rangle - \langle D'f,c(Dg)\rangle - \langle D'f,d(D'g)\rangle. \tag{1}$$
$$\langle D'F,r(D'G)\rangle = \langle PF,(a'+b'-c'-d')(PG)\rangle. \tag{2}$$

証明. 補題 25.2 を使うと,

$$\begin{aligned}
\langle DF, r(DG)\rangle &= \langle (Df, D'f), r(Dg, D'g)\rangle \\
&= \langle (Df, D'f), (a(Dg) + b(D'g), c(Dg) + d(D'g))\rangle \\
&= \langle Df, a(Dg)\rangle + \langle Df, b(D'g)\rangle - \langle D'f, c(Dg)\rangle - \langle D'f, d(D'g)\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle D'F, r(D'G)\rangle &= \langle (PF, PF), r'(PG, PG)\rangle \\
&= \langle (PF, PF), (a'(PG) + b'(PG), c'(PG) + d'(PG))\rangle \\
&= \langle PF, a'(PG) + b'(PG)\rangle - \langle PF, c'(PG) + d'(PG)\rangle \\
&= \langle PF, (a' + b' - c' - d')(PG)\rangle. \quad \square
\end{aligned}$$

定理 25.4 以上の記号のもとで, G 上に

$$\{f, g\} = \langle Df, a(Dg)\rangle + \langle Df, b(D'g)\rangle - \langle D'f, c(Dg)\rangle - \langle D'f, d(D'g)\rangle. \qquad (*)$$

と Poisson 構造を入れることができ, $a' + b' = c' + d'$ のとき, 写像

$$D_{r,r'} \to G, \qquad (x_1, x_2) \mapsto x_2^{-1} x_1$$

は Poisson map になる.

証明. 第 21.2 節より $D_{r',r'}$ は Poisson Lie group であり, 群演算は $D_{r',r'}$ の $D_{r,r'}$ への left Poisson action を定める.

補題 25.1, 定理 24.2 より, $a' + b' = c' + d'$ のとき, $D_{r',r'}$ の diagonal subgroup $\Delta(G)$ の $D_{r,r'}$ への左作用は admissible である. すなわち, $\Delta(G)$ の左作用で不変な $D_{r,r'}$ 上の函数の全体は Poisson bracket $\{\ ,\ \}_{r,r'}$ について閉じている. ($\Delta(G)$ は $D_{r',r'}$ の Poisson subgroup とは限らないことに注意せよ.) よって, 系 24.4 より, 商空間 $\Delta(G)\backslash D_{r,r'}$ 上に Poisson 構造が誘導される.

$\Delta(G)\backslash D_{r,r'}$ 上に誘導されたその Poisson 構造を

$$\Delta(G)\backslash D = G, \qquad [(x_1, x_2)] \leftrightarrow x_2^{-1} x_1$$

という同一視のもとで計算すると, 補題 25.3 より, それは $(*)$ によって定められた G 上の Poisson 構造に一致することがわかる. $\square$

以上によって, 系 18.4 の計算によらない幾何的な別証明が得られたことになる. (r, r' に関する仮定を少しゆるめられることに注意すれば, 定理 18.2 の別証明も得られる.)

Lie bialgebra や Poisson Lie group に関係した議論はその double を経由して扱うと良いようである.

Part 12 (2001年7月6日)

一般化された quadratic Poisson bracket の具体的な計算の仕方は第 20.4 節で説明した. その場合では Hamilton 方程式は Lax 方程式の形に書き表わせるのであった.

このノートでは Manin triple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ に付随した Poisson Lie group G_- 上の Poisson bracket の具体的な計算の仕方を説明する. この場合もやはり Hamilton 方程式は Lax 方程式の形になる.

Manin triple に関しては, 第 10 節を参照せよ.

例えば, 擬微分作用素の立場から定式化した KP 方程式は一般化された擬微分作用素環からなる Manin triple $(\mathcal{E}, \mathcal{E}_+, \mathcal{E}_-)$ で定式化され, $\mathcal{E}_-$ に対応する群 G_- 上の Lax 方程式で書けるのでした. それが実際に Hamiltonian system になっていることを示すためには G_- 上の Hamilton 方程式を計算する処方箋が必要になる. このノートではそれについて説明する. 計算だけしたい人は第 26 節の最初の要約だけを見れば十分である.

26 一般の Poisson Lie group 上の Hamilton 方程式

一般に, double の構成より, Lie bialgebra は Manin triple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ の $\mathfrak{g}_-$ の形で実現される. よって, tangent Lie bialgebra が $\mathfrak{g}_-$ であるような Poisson Lie group G_- 上の Hamilton 方程式の計算の仕方がわかれば原理的に任意の Poisson Lie group 上の Hamilton 方程式の計算の仕方がわかったことになる.

要約 26.1 (第 26 節の要約) $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ が Manin triple であるとき, $\mathfrak{g}_-$ に対応する Poisson Lie group G_- の上の函数 H に対する Hamilton 方程式は tensor notation を用いれば次の形に書ける:

$$\partial_t(L) = \{L, H\}_{G_-} = L\,DH(L) - D'H(L)\,L.$$

ここで, DH と DH' は次の条件によって定められた G_- 上の $\mathfrak{g}_+$-valued function である:

$$\begin{aligned}
\langle DH(L), X\rangle &= [\partial_s H(Le^{sX})]_{s=0} \qquad (L \in G_-, X \in \mathfrak{g}_-), \\
\langle D'H(L), X\rangle &= [\partial_s H(e^{sX}L)]_{s=0} \qquad (L \in G_-, X \in \mathfrak{g}_-).
\end{aligned}$$

上の方程式の右辺の各項は $T_L G$ $(L \in G_-)$ に含まれ, それらの差は $T_L G_-$ に含まれる. 実際, 一般に $X \in \mathfrak{g}$ に対して $X_+ \in \mathfrak{g}_+, X_- \in \mathfrak{g}_-$ を $X = X_+ - X_-$ という条件によって定めると,

$$\begin{aligned}
L\,DH(L) - D'H(L)\,L &= L\,DH(L)L^{-1}L - [L\,DH(L)L^{-1}]_+ L \\
&= -[L\,DH(L)L^{-1}]_- L \in \mathfrak{g}_- L = T_L G_-.
\end{aligned}$$

よって, 上の方程式は確かに G_- で閉じている.

特に H が adjoint invariant なとき, Hamilton 方程式は次の形になる:

$$\partial_t(L) = [L, DH(L)]. \quad \square$$

26.1 Manin triple に対応する Lie group 上の Sklyanin bracket

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ は Manin triple であるとする．すなわち, $\mathfrak{g}$ には invariant nondegenerate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ が定められており, $\mathfrak{g}_\pm$ は $\mathfrak{g}$ の subalgebras であり,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-, \quad \langle \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_+ \rangle = 0, \quad \langle \mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_- \rangle = 0$$

が成立しているとする．このとき, $\langle\ ,\ \rangle$ によって, $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_-^* = \mathfrak{g}_+$ と同一視できる．$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$ という同一視を用いて, さらに,

$$\mathrm{End}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$

と同一視しておく．

G は $\mathfrak{g}$ に対応する simply connected な Lie group であるとし, G_+, G_- は $\mathfrak{g}_+$, $\mathfrak{g}_-$ に対応する subgroup であるとする．

$\mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}_+$, $\mathfrak{g}_-$ への射影をそれぞれ r_+, $-r_-$ と書くことにする:

$$X = r_+(X) - r_-(X), \quad r_\pm(X) \in \mathfrak{g}_\pm \qquad (X \in \mathfrak{g}).$$

$r \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ を

$$r = r_+ + r_-$$

と定める．このとき,

$$r = 2r_+ - 1 = 2r_- - 1.$$

さらに, $\langle\ ,\ \rangle$ に関して $r_+^* = -r_-$ が成立し, r は modified classical Yang-Baxter equation と unitarity condition を満たしている．

よって, G 上には次の Sklyanin bracket によって, Poisson Lie group の構造を入れることができる:

$$\{\phi, \psi\}_G = \frac{1}{2}(\langle D\phi, r(D\psi)\rangle - \langle D'\phi, r(D'\psi)\rangle) \qquad (\phi,\ \psi \text{ は } G \text{ 上の函数}).$$

ここで, $D\phi$, $D'\phi$ は次のように定められた G 上の $\mathfrak{g}$-valued function である:

$$\langle D\phi(x), X\rangle = [\partial_s \phi(xe^{sX})]_{s=0} \qquad (x \in G,\ X \in \mathfrak{g}),$$
$$\langle D'\phi(x), X\rangle = [\partial_s \phi(e^{sX}x)]_{s=0} \qquad (x \in G,\ X \in \mathfrak{g}).$$

補題 26.2 (1) $D'\phi(x) = \mathrm{Ad}(x) D\phi(x)$.

(2) ϕ が adjoint invariant function であれば $D'\phi = D\phi$.

証明. $X \in \mathfrak{g}$ に対して,

$$\begin{aligned}\langle D'\phi(x), X\rangle &= [\partial_s \phi(e^{sX}x)]_{s=0} = [\partial_s \phi(xx^{-1}e^{sX}x)]_{s=0} = [\partial_s \phi(xe^{s\,\mathrm{Ad}(x^{-1})X})]_{s=0} \\ &= \langle D\phi(x), \mathrm{Ad}(x^{-1})X\rangle = \langle \mathrm{Ad}(x)D\phi(x), X\rangle.\end{aligned}$$

よって (1) が成立する．$\phi(gx) = \phi(xg)$ $(g \in G)$ のとき,

$$\langle D'\phi(x), X\rangle = [\partial_s \phi(e^{sX}x)]_{s=0} = [\partial_s \phi(xe^{sX})]_{s=0} = \langle D\phi(x), X\rangle.$$

よって (2) が成立する． □

Sklyanin bracket に対応する Poisson bivector P は次のように書ける:

$$P_x = \frac{1}{2}\big((x\otimes x)r - r(x\otimes x)\big) \in \bigwedge^2(T_x G).$$

これを tensor notation で書くと,

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\} = \frac{1}{2}(L^1 L^2 r - r L^1 L^2).$$

G の $x\in G$ における tangent space $T_x G$ は $x\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}x$ に等しい (G はいつものように associative algebra の中で実現されていると仮定する):

$$T_x G = x\mathfrak{g} = \mathfrak{g}x.$$

$T_x G$ には次のようにして nondegenerate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle_x$ を入れることができる:

$$\langle u,v\rangle_x := \langle x^{-1}u, x^{-1}v\rangle = \langle ux^{-1}, vx^{-1}\rangle \qquad (u,v\in T_x G).$$

二つ目の等号は $\langle\ ,\ \rangle$ の adjoint invariance から出る. $\langle\ ,\ \rangle_x$ を用いて, cotangent space $T_x^* G$ と $T_x G$ を同一視する.

このとき, $r=\sum A_i\otimes B_i$ と書くとき, $u,v\in T_x^*G = T_x G$ に対して,

$$\begin{aligned}
P_x(u,v) &= \frac{1}{2}\sum\Big(\langle u, xA_i\rangle_x\langle v, xB_i\rangle_x - \langle u, A_i x\rangle_x\langle v, B_i x\rangle_x\Big)\\
&= \frac{1}{2}\sum\Big(\langle x^{-1}u, A_i\rangle\langle x^{-1}v, B_i\rangle - \langle ux^{-1}, A_i\rangle\langle vx^{-1}, B_i\rangle\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle x^{-1}u, r(x^{-1}v)\rangle - \langle ux^{-1}, r(vx^{-1})\rangle\Big)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle u, xr(x^{-1}v)\rangle_x - \langle u, r(vx^{-1})x\rangle_x\Big)\\
&= \frac{1}{2}\langle u,\ xr(x^{-1}v) - r(vx^{-1})x\rangle_x.
\end{aligned}$$

よって, P の定める $P_x : T_x^*G = T_x G\to T_x G$ は次のようになる:

$$P_x(v) = \frac{1}{2}\Big(x\,r(x^{-1}v) - r(vx^{-1})\,x\Big) \qquad (v\in T_x^*G = T_x G). \tag{$*$}$$

G 上の函数 ϕ に対して, G 上のベクトル場 $P_x(d\phi_x)$ を Hamiltonian ϕ に対する Hamiltonian ベクトル場と呼ぶ. ここで, $d\phi_x\in T_x^*G$ は次のように定義される:

$$\langle d\phi_x, u\rangle_x := [\partial_s \phi(xe^{x^{-1}su})]_{s=0} = [\partial_s\phi(e^{sux^{-1}}x)]_{s=0} \qquad (u\in T_x G).$$

二つ目の等号は

$$\phi(xe^{x^{-1}su}) = \phi(xe^{x^{-1}(sux^{-1})x}) = \phi(xx^{-1}e^{sux^{-1}}x) = \phi(e^{sux^{-1}}x)$$

から出る. 定義より, $d\phi_x$ と $D\phi(x)$, $D'\phi(x)$ は次のような関係で結ばれていることがすぐにわかる:

$$D\phi(x) = x^{-1}\,d\phi_x, \qquad D'\phi(x) = d\phi_x\,x^{-1}.$$

実際, 前者は次のように証明される:

$$\begin{aligned}
\langle D\phi(x), u\rangle &= [\partial_s\phi(xe^{su})]_{s=0} = [\partial_s\phi(x+sxu+o(s))]_{s=0}\\
&= \langle d\phi_x, xu\rangle_x = \langle x^{-1}\,d\phi_x,\ u\rangle.
\end{aligned}$$

後者も同様である.

補題 26.3 (1) G 上の函数 ϕ に関する Hamiltonian ベクトル場は次のように書ける:

$$P_x(d\phi_x) = \frac{1}{2}\Big(x\,r(D\phi(x)) - r(D'\phi(x))\,x\Big).$$

(2) さらに, もしも ϕ が adjoint invariant function ならば,

$$P_x(d\phi_x) = \frac{1}{2}\big[x,\ r(D\phi(x))\big]. \quad \square$$

証明. 証明: (1) は上の方に書いてある式からただちに出る. 後半は (1) と補題 26.2 (2) からすぐに出る. $\square$

注意 26.4 $\mathfrak{g}$ は associative algebra であるとし, commutator によって $\mathfrak{g}$ を Lie algebra とみなす. $\mathfrak{g}$ に対応する Lie 群は自然に $\mathfrak{g}$ の open dense subset とみなされていると仮定する. さらに, $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathfrak{g}$ 上 functional trace で $\mathrm{trace}(XY) = \mathrm{trace}(YX)$ を満たすものによって, $\langle X, Y\rangle = \mathrm{trace}(XY)$ と定められていると仮定する. (例えば $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = M(n,\mathbb{C})$, $G = GL(n,\mathbb{C})$. 形式的に $\mathfrak{g} = \mathcal{E}$ の場合も類似の場合として扱える.) G 上の函数 ϕ に対して G 上の $\mathfrak{g}$ 値函数 $\nabla\phi$ を次のように定義する:

$$\langle\nabla\phi(x), u\rangle := [\partial_s\phi(x+su)]_{s=0} \qquad (x\in G,\ u\in\mathfrak{g})$$

$\nabla\phi_x$ は $d\phi_x$, $D\phi(x)$, $D'\phi(x)$ は次のような関係で結ばれている:

$$D\phi(x) = \nabla\phi(x)\,x, \qquad D'\phi(x) = x\,\nabla\phi(x), \qquad d\phi_x = x\,\nabla\phi(x)\,x.$$

例えば, 最後の式は次のように証明される:

$$\begin{aligned}\langle x^{-1}\,d\phi,\ u\rangle &= \langle d\phi(x), xu\rangle_x = [\partial_s\phi(x+sxu)]_{s=0}\\ &= \langle\nabla\phi(x), xu\rangle = \langle\nabla\phi(x)\,x,\ u\rangle.\end{aligned}$$

よって, この場合は補題 26.3 は次のよう書き直される:

(1) G 上の函数 ϕ に関する Hamiltonian ベクトル場は次のように書ける:

$$P_x(d\phi_x) = \frac{1}{2}\big(xr(\nabla\phi(x)x) - r(x\nabla\phi(x))x\big).$$

これを tensor nosation ($H=\phi$, $L=x$) で書くと,

$$\{L,H\}(L) = \frac{1}{2}\big(Lr(\nabla H(L)L) - r(L\nabla H(L))L\big).$$

(2) さらに, もしも ϕ が adjoint invariant function ならば,

$$P_x(d\phi_x) = \frac{1}{2}\big[x,\ r(\nabla\phi(x)x)\big].$$

これを tensor nosation ($H=\phi$, $L=x$) で書くと,

$$\{L,H\} = \frac{1}{2}\big[L,\ r(\nabla\phi(L)L)\big].$$

Gelfand-Dickey の second Poisson structure はこの形で導入された. $\square$

26.2 G_- が G の Poisson Lie subgroup であることの直接証明

一般論を使えば, G_- が G の Poisson Lie subgroup であることは G_- の Lie algebra $\mathfrak{g}_-$ が Lie bialgebra $\mathfrak{g}$ の sub-bialgebra であることを使えばすぐに出るが念のためにここで直接証明を与えておく.

補題 26.5 G_- は G の Poisson Lie subgroup である.

証明. ϕ と ψ は G_- の近傍上の函数であり, ψ は G_- 上で 0 になると仮定する. このとき, G_- 上で ψ の $\mathfrak{g}_-$ 方向の微分は 0 であるから,

$$D\psi(x), D'\psi(x) \in \mathfrak{g}_- \qquad \text{for } x \in G_-.$$

よって,

$$r(D\psi(x)) = -D\psi(x), \quad r(D'\psi(x)) = -D'\psi(x) \qquad \text{for } x \in G_-.$$

この等式と補題 26.2 を使うと, $x \in G_-$ のとき,

$$\begin{aligned} 2\{\phi,\psi\}_G(x) &= \langle D\phi(x), r(D\psi(x))\rangle - \langle D'\phi(x), r(D'\psi(x))\rangle \\ &= -\langle D\phi(x), D\psi(x)\rangle + \langle D'\phi(x), D'\psi(x)\rangle \\ &= -\langle D\phi(x), D\psi(x)\rangle + \langle \mathrm{Ad}(x)D\phi(x), \mathrm{Ad}(x)D\psi(x)\rangle \\ &= -\langle D\phi(x), D\psi(x)\rangle + \langle D\phi(x), D\psi(x)\rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

以上によって, G_- 上で 0 になる函数全体が Poisson ideal をなすことが示された.

G_- 上の函数 f, g に対して, それらの Poisson bracket は, f, g の G_- の近傍上への拡張 ϕ, ψ を任意に取って,

$$\{f,g\}_{G_-}(x) = \{\phi,\psi\}_G(x) \qquad \text{for } x \in G_-$$

によって定義する. この右辺が ϕ, ψ の取り方によらないことが上の結果から示される. よって, G_- は G の Poisson 部分多様体である. □

26.3 G_- 上の Hamilton 方程式の形

以下, x は G_- の中を動くものとする. このとき, T_xG_- は $x\mathfrak{g}_-$ と $\mathfrak{g}_-x$ に等しい:

$$T_xG_- = x\mathfrak{g}_- = \mathfrak{g}_-x \subset T_xG = x\mathfrak{g} = \mathfrak{g}x.$$

そして, T_xG_- の T_xG の中における直交補空間は T_xG_- 自身に等しいので,

$$T_x^*G_- = T_xG/T_xG_-$$

と同一視できる.

$r = 2r_+ - 1 = 2r_- + 1$ を第 26.1 節で得られた次の等式に代入してみよう:

$$P_x(v) = \frac{1}{2}\bigl(xr(x^{-1}v) - r(vx^{-1})x\bigr) \qquad (v \in T_x^*G = T_xG). \tag{$*$}$$

すると,

$$P_x(v) = xr_+(x^{-1}v) - r_+(vx^{-1})x = xr_-(x^{-1}v) - r_-(vx^{-1})x.$$

この最後の式から $x \in G_-$ のとき, $P_x(v) \in T_xG_-$ であることがわかる. (すなわち, G 上の Hamiltonian ベクトル場は常に G_- に接している.) さらに, $v \in T_xG_-$ のとき, $x^{-1}v, vx^{-1} \in \mathfrak{g}_-$ より,

$$r(x^{-1}v) = -x^{-1}v, \qquad r(vx^{-1}) = -vx^{-1}$$

であるから, 第 26.1 節の $(*)$ より,

$$P_x(v) = \frac{1}{2}(-xx^{-1}v + vx^{-1}x) = 0.$$

よって, $x \in G_-$ のとき, P_x は T_xG_- をゼロに移す. 以上によって, $x \in G_-$ のとき P_x は線形写像

$$Q_x : T_x^*G_- = T_xG/T_xG_- \to T_xG_-$$

を誘導することがわかった. この Q は G_- 上の Poisson 構造に対応する bivector である:

$$\{f, g\}_{G_-} = \langle df, Q(dg)\rangle \qquad (x \in G_-).$$

そして, $x \in G_-$ と $v \in T_xG$ に対して次を満たしている:

$$\begin{aligned} Q_x(v \bmod T_xG_-) &= \frac{1}{2}\bigl(xr(x^{-1}v) - r(vx^{-1})x\bigr) \\ &= xr_+(x^{-1}v) - r_+(vx^{-1})x \\ &= xr_-(x^{-1}v) - r_-(vx^{-1})x. \end{aligned} \tag{$**$}$$

ここで, G_- 上の函数 f に対して, G_- 上の $\mathfrak{g}_+$-valued function Df, $D'f$ を次のように定める:

$$\begin{aligned} \langle Df(x), X\rangle &= [\partial_s f(xe^{sX})]_{s=0} \qquad (x \in G_-,\ X \in \mathfrak{g}_-), \\ \langle D'f(x), X\rangle &= [\partial_s f(e^{sX}x)]_{s=0} \qquad (x \in G_-,\ X \in \mathfrak{g}_-). \end{aligned}$$

$\langle\ ,\ \rangle$ を用いて $\mathfrak{g}_-^* = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_- = \mathfrak{g}_+$ と同一視していることに注意せよ.

$T_x^*G_x = T_xG/T_xG_-$, $T_xG_- = x\mathfrak{g}_- = \mathfrak{g}_-x$ に注意しながら, 第 26.1 節と同様にして,

$$\begin{aligned} Df(x) &\equiv x^{-1}\,df_x \mod \mathfrak{g}_-, \\ D'f(x) &\equiv df_x\,x^{-1} \mod \mathfrak{g}_- \end{aligned}$$

が成立することを示せる. 次の定理が目標の公式である.

定理 26.6 (1) G_- 上の函数 f に対する Hamiltonian ベクトル場は次のように表わされる:

$$Q_x(df_x) = x\,Df(x) - D'f(x)\,x.$$

(2) さらに, f が adjoint invariant function ならば,

$$Q_x(df_x) = [x, Df(x)].$$

証明. f を G_- の近傍に拡張した函数を ϕ と書くと次が成立していることが容易に確かめられる:

$$\begin{aligned} &df_x \equiv d\phi_x \mod T_x G_-, \\ &Df(x) = r_+(D\phi(x)) = r_+(x^{-1}\, d\phi_x), \\ &D'f(x) = r_+(D'\phi(x)) = r_+(d\phi_x\, x^{-1}). \end{aligned}$$

これらを上の $(**)$ の 2 行目の式を適用すると,

$$\begin{aligned} Q_x(df_x) &= x r_+(x^{-1} d\phi_x) - r_+(d\phi_x x^{-1})x \\ &= xDf(x) - D'f(x)x. \end{aligned}$$

これで (1) が示された. f が adjoint invariant なとき $D'f = Df$ であることより, (2) は (1) からただちに導かれる. □

系 26.7 上の定理の内容を tensor notation で書き直すと次のようになる:

(1) G_- 上の函数 H に対して,

$$\{L, H\}_{G_-} = L\, DH(L) - D'H(L)\, L.$$

(2) さらに, もしも H が adjoint invariant ならば,

$$\{L, H\}_{G_-} = [L, DH(L)]. \quad \square$$

系 26.8 (1) G_- 上の函数 H に対する Hamilton 方程式は次の形になる:

$$\partial_t(L) = L\, DH(L) - D'H(L)\, L.$$

(2) さらに, もしも H が adjoint invariant ならば Hamilton 方程式は次のようになる:

$$\partial_t(L) = [L, DH(L)]. \quad \square$$

以上のように, Poisson Lie group G_- 上の Hamilton 方程式は Manin triple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ の言葉を用いれば Lax 方程式の形に書き表わすことができる.

Part 13 (2001年7月7日)

このノートでは, まず $\{L \underset{,}{\otimes} L\} = \{L^1, L^2\} = L^1L^2a - bL^1L^2$ タイプの quadratic Poisson bracket が homogeneous space 上にどのような Poisson bracket を誘導するかを計算する.

27 homogeneous space 上の quadratic Poisson bracket

G は Lie group であるとし, $\mathfrak{g}$ はその Lie algebra であり, invariant nondegenerate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ を持つと仮定する. $\langle\ ,\ \rangle$ を用いて, $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$ と同一視し, さらに, $\mathrm{End}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ と同一視しておく. 例えば, $a = \sum A_i \otimes B_i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ に対応する $a \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ は次のように定まる:

$$a(X) = \sum A_i \langle B_i, X\rangle \qquad (X \in \mathfrak{g}).$$

$\langle\ ,\ \rangle$ に関する $a \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ の転置を a^* と書く:

$$\langle a(X), Y\rangle = \langle X, a^*(Y)\rangle \qquad (X, Y \in \mathfrak{g}).$$

a を a^* に写す写像は $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ の方ではテンソル積の順番を交換する写像に対応している. よって, $\mathrm{End}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ という同一視のもとで,

$$a^* = \sum B_i \otimes A_i \qquad \text{if } a = \sum A_i \otimes B_i$$

が成立している.

27.1 modified classical Yang-Baxter equation に関する復習

この節の内容の証明に関しては第 2 節を参照せよ.

$r \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ が modified classical Yang-Baxter equation + unitarity condition (mCYBE + UC) を満たしているとは, 以下が成立していることである:

$$r([r(X), Y] + [X, r(Y)]) - [r(X), r(Y)] = \lambda^2 [X, Y], \tag{mCYBE}$$

$$r^* = -r. \tag{UC}$$

ここで, $X, Y \in \mathfrak{g}$. mCYBE を満たしている $r \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ に対して, $r_\pm \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ を

$$r_+ + r_- = r, \qquad r_+ - r_- = \lambda$$

という条件によって定める. これは次と同値:

$$r = 2r_+ - \lambda = 2r_- - \lambda.$$

さらに, $f = r_\pm$ は次を満たしている:

$$f([f^*(X), Y] + [X, f(Y)]) = [f(X), f(Y)], \tag{CYBE}$$

$$r_- = -r_+^*. \tag{UC'}$$

ここで, $f = r_\pm$ に対して,

$$\begin{aligned}[f^*(X), Y] + [X, f(Y)] &= [r_+(X), r_+(Y)] - [r_-(X), r_-(Y)] \\ &= \frac{1}{2}\bigl([r(X), Y] + [X, r(Y)]\bigr)\end{aligned}$$

が成立していることにも注意せよ. 実は, r が mCYBE を満たしているならば, 次の r-bracket は $\mathfrak{g}$ にもう一つの Lie algebra 構造を定める:

$$[X, Y]_r = \frac{1}{2}\bigl([r(X), Y] + [X, r(Y)]\bigr).$$

r-bracket によって $\mathfrak{g}$ を Lie algebra とみなしたものを $\mathfrak{g}_r$ と書くことにすると, 上の $f = r_\pm$ に関する CYBE は $r_\pm$ が $\mathfrak{g}_r$ から $\mathfrak{g}$ への Lie algebra homomorphism であることを意味している.

以下, パラメーター λ は固定し, mCYBE と言えばその固定された λ に関する mCYBE のことであるとする.

27.2 群上の quadratic Poisson brakcet に関する復習

この節の内容の証明に関しては第 18 節, 第 21 節, 第 24 節を参照せよ.

定理 27.1 $a, b \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ は mCYBE + UC を満たしているとき, 以下の互いに同値な条件によって, 群 G に Poisson 構造を入れることができる:

(1) G 上の Poisson bivector P を次のように定める:

$$P_x = (x \otimes x)a - b(x \otimes x) \in \bigwedge^2 (T_x G) \qquad \text{for } x \in G.$$

(2) tensor notation を用いて, Poisson 構造を次のように定める:

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\} = \{L^1, L^2\} = L^1 L^2 a - b L^1 L^2.$$

(3) Poisson bracket を次のように定める:

$$\{f, g\}_{a,b} = \langle Df, a(Dg)\rangle - \langle D'f, b(D'g)\rangle \qquad (f, g \text{ は } G \text{ 上の函数}).$$

ここで, G 上の函数 f に対して, Df, $D'f$ は次のように定められた G 上の $\mathfrak{g}$-valued function である:

$$\langle Df(x), X\rangle := [\partial_s f(xe^{sX})]_{s=0}, \quad \langle D'f(x), X\rangle := [\partial_s f(e^{sX}x)]_{s=0} \qquad (X \in \mathfrak{g}).$$

これらの間には次のような関係がある:

$$Df'(x) = \mathrm{Ad}(x) Df(x) \qquad (x \in G).$$

もしも, f が adjoint invariant ならば,

$$D'f = Df, \qquad xDf(x) = Df(x)x \in T_x G \qquad (x \in G). \quad \square$$

$\{\ ,\ \}_{a,a}$ を Sklyanin bracket と呼び, $\{\ ,\ \}_{a,-a}$ を Heisenberg bracket と呼ぶことにしたのであった.

定理 27.2 前定理の $\{\ ,\ \}_{a,b}$ によって G に Poisson 構造を入れたものを $G_{a,b}$ と書くことにすると, 群の演算の定める以下の写像を Poisson である:

(1) 単位元の埋め込み: $\{e\} \to G_{a,a}$,

(2) 逆元を取る操作: $G_{a,b} \to G_{b,a}$,

(3) 群の積演算: $G_{b,c} \times G_{a,b} \to G_{a,c}$.

特に, $G_{a,a}$, $G_{b,b}$ は Poisson Lie group であり, 以下の群作用は Poisson である:

(4) $G_{b,b}$ の $G_{a,b}$ への左作用,

(5) $G_{a,a}$ の $G_{a,b}$ への右作用.

また, $G_{a,a}$ の tangent Lie bialgebra の cobracket $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ は次の形になる:

(6) $\delta(X) = [X \otimes 1 + 1 \otimes X, a] \qquad (X \in \mathfrak{g})$.

すなわち, $\mathfrak{g}^*$ の Lie algebra 構造は $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$ という同一視を用いると次ように書ける:

(7) $[X, Y]_* = -([a(X), Y] + [X, a(Y)])$. □

定理 27.3 (1) G は Poisson Lie group とし, Poisson 多様体 M に作用していると仮定する. P は G の connected Lie subgroup であり, その Lie algebra $\mathfrak{p}$ の $\mathfrak{g}^*$ における直交補空間は $\mathfrak{g}^*$ の Lie subalgebra になっていると仮定する. このとき, M 上の P-invariant function たちは M 上の Poisson bracket で閉じている. よって, もしも商空間 $P\backslash M$ も多様体になるならば, M 上の Poisson 構造は $P\backslash M$ 上の Poisson 構造を誘導する.

(2) さらに, 別の Poisson Lie group H の M への Poisson 作用が与えられていて, それが G の作用と可換であるならば, $P\backslash M$ の上に誘導される H の作用もまた Poisson である. □

注意 27.4 上の定理 27.3 における P は G の Poisson subgroup であるとは限らない. 以下ではその P と同様の条件を満たしている G の Lie subgroup を admissible subgroup と呼ぶことにする. □

以上で準備が終了である.

27.3 homogeneous space 上の quadratic Poisson bracket と Hamilton 方程式

a, b は mCYBE + UC を満たしていると仮定する．(a, b はそれぞれ r, r' と書いた方が良いかもしれないが, $a = r/2$, $b = r'/2$ と置きたくなる場合が存在することと, r' と書くのが面倒だという理由で a, b と書くことにする.)

定理 27.5 (1) P は $G_{b,b}$ の admissible subgroup であるとし,

$$M = P\backslash G_{a,b}$$

と置く．このとき, $G_{a,b}$ 上の Poisson 構造は M 上の Poisson 構造を誘導し, $G_{a,a}$ の M への右からの作用は Poisson である．さらに, P の Lie algebra $\mathfrak{p}$ の $\langle\ ,\ \rangle$ に関する直交補空間上で b_+ または b_- が消えていると仮定する．このとき, M 上の Poisson bracket は次の形になる:

$$\begin{aligned}\{f, g\} &= \langle Df, a(Dg)\rangle \\ &= \langle Df, a_+(Dg)\rangle - \langle a_+(Df), Dg\rangle \\ &= \langle Df, a_-(Dg)\rangle - \langle a_-(Df), Dg\rangle.\end{aligned}$$

ここで, f, g は M 上の函数であり, G 上の P-invariant functions と同一視されている.

(2) P は $G_{a,a}$ の admissible subgroup であるとし,

$$M = G_{a,b}/P$$

と置く．このとき, $G_{a,b}$ 上の Poisson 構造は M 上の Poisson 構造を誘導し, $G_{b,b}$ の M への左からの作用は Poisson である．さらに, P の Lie algebra $\mathfrak{p}$ の $\langle\ ,\ \rangle$ に関する直交補空間上で a_+ または a_- が消えていると仮定する．このとき, M 上の Poisson bracket は次の形になる:

$$\begin{aligned}\{f, g\} &= -\langle D'f, b(D'g)\rangle \\ &= -\langle D'f, b_+(D'g)\rangle + \langle b_+(D'f), D'g\rangle \\ &= -\langle D'f, b_-(D'g)\rangle + \langle b_-(D'f), D'g\rangle.\end{aligned}$$

ここで, f, g は M 上の函数であり, G 上の P-invariant functions と同一視されている.

証明. (2) は (1) と同様なので (1) のみを示す．定理 27.2 と定理 27.3 より, M 上に Poisson 構造が誘導され, $G_{a,a}$ の M への右からの作用は Poisson であることがわかる.

f が G 上の P-invariant function であるとき, $Y \in \mathfrak{p}$ に対して,

$$\langle D'f(x), Y\rangle = [\partial_s f(e^{sY}x)]_{s=0} = [\partial_s f(x)]_{s=0} = 0$$

であるから, $D'f$ は $\mathfrak{p}$ の直交補空間に値を持つ．そして, $b = b_+ + b_-$ と $b_+^* = -b_-$ より,

$$\langle D'f, b(D'g)\rangle = \langle D'f, b_+(D'g)\rangle - \langle b_+(D'f), D'g\rangle$$

$$= \langle D'f, b_-(D'g)\rangle - \langle b_-(D'f), D'g\rangle.$$

よって, $\mathfrak{p}$ の $\langle\ ,\ \rangle$ に関する直交補空間上で b_+ または b_- が消えているとき, G 上の P-invariant functions f, g に対して, $\langle D'f, b(D'g)\rangle = 0$ なので,

$$\{f,g\} = \langle Df, a(Dg)\rangle$$

である. この式に $a = a_+ + a_-$ を代入して, $a_+^* = -a_-$ を使うと,

$$\begin{aligned}\{f,g\} &= \langle Df, a_+(Dg)\rangle - \langle a_+(Df), Dg\rangle \\ &= \langle Df, a_-(Dg)\rangle - \langle a_-(Df), Dg\rangle. \quad \square\end{aligned}$$

系 27.6 (1) 定理 27.5 の (1) の状況を考える. そのとき, M 上の函数 H に関する Hamilton 方程式は次の形になる:

$$\partial_t(W) = W\,a(DH(W)) \qquad (W \in M = P\backslash G).$$

ここで, $W \in M$ と $X \in \mathfrak{g}$ に対する WX は X の M への右からの無限小作用が定める M 上のベクトル場である.

(2) 定理 27.5 の (2) の状況を考える. そのとき, M 上の函数 H に関する Hamilton 方程式は次の形になる:

$$\partial_t(W) = -b(D'H(W))\,W \qquad (W \in M = G/P).$$

ここで, $W \in M$ と $X \in \mathfrak{g}$ に対する XW は X の M への左からの無限小作用が定める M 上のベクトル場である.

証明. (2) の証明は (1) と同様なので (1) のみを証明する. H を G 上の P-invariant function と同一視すると, H の定める G 上の Hamiltonian vector field ξ は

$$\xi_x \equiv x\,a(DH(x)) \mod x\,\mathfrak{p} = T_xG \qquad (x \in G)$$

の形になる. これを M 上に落としたものが M 上の Hamiltonian vector field になる. よって, Hamilton 方程式の形は上のようになる. $\square$

Part 14 (2001年7月9日)

このノートは第 27 節の一般化である. 第 25 節でも見たように, G 自身ではなく, double Poisson Lie group $D = G \times G$ をより基礎的な対象とした方がずっと一般的な quadratic Poisson bracket を考えることができる.

G 自身よりもむしろ D を扱った方が優れていることは, Lie algebra $\mathfrak{g}$ の dual $\mathfrak{g}^*$ よりも G の cotangent bundle T^*G を扱った方が優れていることの類似になっている. ($\mathfrak{g}^*$ は Poisson 多様体として T^*G の G の作用による商空間に同型である.)

ここで大事な注意:

> 色々悩んだすえに, 今まで採用してきた quadratic Poisson bracket の定義をその -1 倍に変更する! そのせいで, あちこちで符号が変化したり, 文字の使い方の convention が変化したりする.

28 double Poisson Lie group の商空間上の quadratic Poisson bracket

G は Lie group であるとし, $\mathfrak{g}$ はその Lie algebra であり, invariant nondegenerate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ を持つと仮定する. $\langle\ ,\ \rangle$ を用いて, $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$ と同一視し, さらに $\mathrm{End}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ と同一視しておく. 例えば, $a = \sum A_i \otimes B_i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ に対応する $a \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ は次のように定まる:

$$a(X) = \sum A_i \langle B_i, X\rangle \qquad (X \in \mathfrak{g}).$$

$\langle\ ,\ \rangle$ に関する $a \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ の転置を a^* と書く:

$$\langle a(X), Y\rangle = \langle X, a^*(Y)\rangle \qquad (X, Y \in \mathfrak{g}).$$

a を a^* に写す写像は $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ の方ではテンソル積の順番を交換する写像に対応している. よって, $\mathrm{End}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ という同一視のもとで,

$$a^* = \sum B_i \otimes A_i \qquad \text{if } a = \sum A_i \otimes B_i$$

が成立している.

$D = G \times G$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ と置き, $\mathfrak{d}$ の invariant nondegenerate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ を

$$\langle (X, Y),\ (X', Y')\rangle = \langle X, X'\rangle - \langle Y, Y'\rangle$$

と定める. $\mathfrak{d}$ の元を $\mathfrak{g}$ の元を成分に持つ縦ベクトルで表わし, $\mathrm{End}(\mathfrak{d})$ を $M(2, \mathrm{End}(\mathfrak{g}))$ と同一視する. すなわち, $s \in \mathrm{End}(\mathfrak{d})$, $Z \in \mathfrak{d}$ を

$$s = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}), \qquad Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \quad X, Y \in \mathfrak{g}$$

と表わすとき,

$$sZ = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aX + bY \\ cX + dY \end{bmatrix} \in \mathfrak{d}.$$

28.1 modified classical Yang-Baxter equation に関する復習

この節の内容の証明に関しては第 2 節を参照せよ．

$r \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ が modified classical Yang-Baxter equation + unitarity condition (mCYBE + UC) を満たしているとは, 以下が成立していることである:

$$r([r(X), Y] + [X, r(Y)]) - [r(X), r(Y)] = \lambda^2 [X, Y], \tag{mCYBE}$$

$$r^* = -r. \tag{UC}$$

ここで, $X, Y \in \mathfrak{g}$. mCYBE を満たしている $r \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ に対して, $r_\pm \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ を

$$r_+ + r_- = r, \qquad r_+ - r_- = \lambda$$

という条件によって定める．これは次と同値:

$$r = 2r_+ - \lambda = 2r_- - \lambda.$$

さらに, $f = r_\pm$ は次を満たしている:

$$f([f^*(X), Y] + [X, f(Y)]) = [f(X), f(Y)], \tag{CYBE}$$

$$r_- = -r_+^*. \tag{UC'}$$

ここで, $f = r_\pm$ に対して,

$$\begin{aligned}[f^*(X), Y] + [X, f(Y)] &= [r_+(X), r_+(Y)] - [r_-(X), r_-(Y)] \\ &= \frac{1}{2}\bigl([r(X), Y] + [X, r(Y)]\bigr)\end{aligned}$$

が成立していることにも注意せよ．実は, r が mCYBE を満たしているならば, 次の r-bracket は $\mathfrak{g}$ に別の Lie algebra 構造を定める:

$$[X, Y]_r = \frac{1}{2}\bigl([r(X), Y] + [X, r(Y)]\bigr).$$

r-bracket によって $\mathfrak{g}$ を Lie algebra とみなしたものを $\mathfrak{g}_r$ と書くことにすると, 上の $f = r_\pm$ に関する CYBE は $r_\pm$ が $\mathfrak{g}_r$ から $\mathfrak{g}$ への Lie algebra homomorphism であることを意味している．

以下, パラメーター λ は固定し, mCYBE と言えばその固定された λ に関する mCYBE のことであるとする．

28.2 Lie group 上の quadratic Poisson brakcet に関する復習

この節の内容の証明に関しては第 18 節, 第 21 節, 第 24 節を参照せよ．

定理 28.1 $a, b \in \mathrm{End}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ が mCYBE + UC を満たしているとき, 以下の互いに同値な条件によって, 群 G に Poisson 構造を入れることができる:

(1) G 上の Poisson bivector P を次のように定める:

$$P_x = a(x \otimes x) - (x \otimes x)b \in \bigwedge^2 (T_x G) \qquad \text{for } x \in G.$$

(2) tensor notation を用いて, Poisson 構造を次のように定める:

$$\{L \underset{,}{\otimes} L\} = \{L^1, L^2\} = aL^1L^2 - L^1L^2b.$$

(3) Poisson bracket を次のように定める:

$$\{f, g\}_{a,b} = \langle Df, a(Dg)\rangle - \langle D'f, b(D'g)\rangle \qquad (f,\ g \text{ は } G \text{ 上の函数}).$$

ここで, G 上の函数 f に対して, Df, $D'f$ は次のように定められた G 上の $\mathfrak{g}$-valued function である:

$$\langle Df(x), X\rangle := [\partial_s f(e^{sX}x)]_{s=0}, \quad \langle D'f(x), X\rangle := [\partial_s f(xe^{sX})]_{s=0} \qquad (X \in \mathfrak{g}).$$

これらの間には次のような関係がある:

$$D'f(x) = \mathrm{Ad}(x^{-1})Df(x) \qquad (x \in G).$$

もしも, f が adjoint invariant ならば,

$$Df' = Df,$$
$$xDf(x) = Df(x)x \in T_xG(x \in G). \quad \square$$

$\{\ ,\ \}_{a,a}$ を Sklyanin bracket と呼び, $\{\ ,\ \}_{a,-a}$ を Heisenberg bracket と呼ぶことにしたのであった.

定理 28.2 前定理の $\{\ ,\ \}_{a,b}$ によって G に Poisson 構造を入れたものを $G_{a,b}$ と書くことにすると, 群の演算の定める以下の写像を Poisson である:

(1) 単位元の埋め込み: $\{e\} \to G_{a,a}$,

(2) 逆元を取る操作: $G_{a,b} \to G_{b,a}$,

(3) 群の積演算: $G_{a,b} \times G_{b,c} \to G_{a,c}$.

特に, $G_{a,a}$, $G_{b,b}$ は Poisson Lie group であり, 次の群作用は Poisson である:

(4) $G_{a,a}$ の $G_{a,b}$ への左作用,

(5) $G_{b,b}$ の $G_{a,b}$ への右作用.

また, $G_{a,a}$ の tangent Lie bialgebra の cobracket $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ は次の形になる:

(6) $\delta(X) = [a, X \otimes 1 + 1 \otimes X] \qquad (X \in \mathfrak{g})$.

すなわち, $\mathfrak{g}^*$ の Lie algebra 構造は $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$ という同一視を用いると次ように書ける:

(7) $[X, Y]_* = [a(X), Y] + [X, a(Y)]. \quad \square$

定理 28.3 G は Poisson Lie group とし, Poisson 多様体 M に Poisson 作用していると仮定する. このとき以下が成立する:

(1) P は G の connected Lie subgroup であり, その Lie algebra $\mathfrak{p}$ の $\mathfrak{g}^*$ における直交補空間は $\mathfrak{g}^*$ の Lie subalgebra になっていると仮定する. このとき, M 上の P-invariant functions は M 上の Poisson bracket で閉じている.

(2) よって, もしも商空間 $P\backslash M$ が多様体になるならば, M 上の Poisson 構造は $P\backslash M$ 上の Poisson 構造を誘導し, $P\backslash M$ も Poisson 多様体になる.

(3) さらに, 別の Poisson Lie group H の M への Poisson 作用が与えられていて, その作用が G の作用と可換であるならば, $P\backslash M$ の上に誘導される H の作用もまた Poisson である. □

注意 28.4 上の定理 28.3 における P は G の Poisson subgroup であるとは限らないことに注意せよ. 以下では P と同様の条件を満たしている G の Lie subgroup を admissible subgroup と呼ぶことにする. □

以上で準備が終了である.

28.3 double Poisson Lie group とその商空間上の quadratic Poisson bracket

この節の内容については第 25 節を参照せよ.

定理 28.5 $s \in \mathrm{End}(\mathfrak{d})$ を

$$s = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad a, b, c, d \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$$

と表わすとき, s が $\mathfrak{d}$ における mCYBE + UC を満たしているための必要十分条件は以下が成立することである:

(1) $a^* = -a$, $b^* = c$, $d^* = -d$.

(2) a, d は $\mathfrak{g}$ における mCYBE の解である. (UC を満たしている必要はない.)

(3) $c([a(X), Y] + [X, a(Y)]) = [c(X), c(Y)]$,
$b([d(X), Y] + [X, d(Y)]) = [b(X), b(Y)]$.

ただし, s, a, d に関する mCYBE は同一の λ に関する mCYBE を考える. □

定理 28.6 $s, s' \in \mathrm{End}(\mathfrak{d})$ を

$$s = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad s' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}. \qquad a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$$

と表わしておく. このとき以下が成立する:

(1) s, s' が $\mathfrak{d}$ における mCYBE + UC を満たしているとき, D 上に Poisson 構造を次のように定めることができる:

$$\{f,g\}_{s,s'} = \langle Df, s(Dg)\rangle - \langle D'f, s'(D'g)\rangle \qquad (f,\ g \text{ は } D \text{ 上の函数}).$$

D にこの Poisson 構造を入れたものを $D_{s,s'}$ と表わすことにする.

(2) $D_{s,s}$ は Poisson Lie group であり, その tangent Lie bialgebra $\mathfrak{d}$ の cobracket は次の形になる:

$$\delta(X) = [s, X\otimes 1 + 1\otimes X] \in \bigwedge^2(\mathfrak{d}) \qquad (X\in\mathfrak{d}).$$

(3) $D_{s,s'}$ への $D_{s,s}$ の左作用と $D_{s',s'}$ の右作用は共に Poisson であり, 互いに可換である.

(4) G が connected であり, $a+b=c+d$ であるとき,

$$\Delta(G) = \{\,(x,x) \mid x\in G\} \subset D$$

は $D_{s,s}$ の admissible subgroup である. (すなわち $\Delta(\mathfrak{g})^{\perp}$ は $\mathfrak{d}^*$ の Lie subalgebra である.)

(5) G が connected で, $a'+b'=c'+d'$ であるとき, $D_{s,s'}/\Delta(G)$ 上には自然に Poisson 構造が誘導される. $D/\Delta(G)$ と G を

$$D/\Delta(G) \cong G, \quad [(x_1,x_2)] \leftrightarrow x_1x_2^{-1}$$

によって同一視するとき, $D_{s,s'}/\Delta(G)$ 上に誘導された Poisson 構造は G 上の次の Poisson 構造に一致する:

$$\{f,g\}_s = \langle Df, a(Dg)\rangle + \langle Df, b(D'g)\rangle - \langle D'f, c(Dg)\rangle - \langle D'f, d(D'g)\rangle.$$

G にこの Poisson 構造を入れたものを G_s と表わすことにする.

(6) さらに, $D_{s,s'}/\Delta(G)$ への $D_{s,s}$ の左作用は Poisson である. よって, $D_{s,s}$ の G_s への次の作用も Poisson である:

$$D\times G\to G, \quad \bigl((y_1,y_2),x\bigr) \mapsto y_1xy_2^{-1}.$$

(7) よって, $D_{s,s}$ の admissible subgroup K が与えられたとき,

$$K\backslash D_{s,s'}/\Delta(G) = K\backslash G$$

が多様体になるならば, その上に Poisson 構造が自然に誘導される. □

補足 28.7 第 25 節と同様にして (5) を導ける. 実際, G 上の函数 f に対して, D 上の函数 ϕ を

$$\phi(x,y) = f(xy^{-1}),$$

と定めると,

$$\langle D\phi(x,y),\ (X,Y)\rangle = [\partial_s f(e^{sX}xy^{-1}e^{-sY})]_{s=0}$$

$$
\begin{aligned}
&= \langle Df(xy^{-1}),\ X\rangle - \langle D'f(xy^{-1}),\ Y\rangle \\
&= \langle (Df(xy^{-1}), D'f(xy^{-1})),\ (X,Y)\rangle
\end{aligned}
$$

であるから,

$$
D\phi(x,y) = \begin{bmatrix} Df(xy^{-1}) \\ D'f(xy^{-1}) \end{bmatrix}
$$

よって, G 上の函数 g に対して D 上の函数 ψ を同様に定めると,

$$
\begin{aligned}
&\langle D\phi, s(D\psi)\rangle \\
&= \langle (Df, D'f),\ \ (a(Dg) + b(D'g), c(Dg) + d(D'g))\rangle \\
&= \langle Df, a(Dg)\rangle + \langle Df, b(D'g)\rangle - \langle D'f, c(Dg)\rangle - \langle D'f, d(D'g)\rangle. \quad \square
\end{aligned}
$$

28.4 double Poisson Lie group の商空間上での Hamilton 方程式の形

定理 28.8 (G 上の Lax 方程式) 定理 28.6 の (5) の状況を考え,

$$
\frac{1}{2}r = a + b = c + d, \quad r = r_+ + r_-, \quad 1 = r_+ - r_-
$$

と仮定する. そのとき, r は $\mathfrak{g}$ における mCYBE の解になる (UC を満たしているとは限らない). そして, G 上の adjoint invariant function H に関する G_s 上の Hamilton 方程式は次の形になる:

$$
\begin{aligned}
\partial_t(L) &= \frac{1}{2}[r(DH(L)), L] \\
&= [r_+(DH(L)), L] \\
&= [r_-(DH(L)), L] \qquad\qquad (L \in G).
\end{aligned}
$$

証明. H が adjoint invariant であるとき $D'H = DH$ であるから,

$$
\begin{aligned}
\{f, H\} &= \langle Df, a(DH)\rangle + \langle Df, b(DH)\rangle - \langle D'f, c(DH)\rangle - \langle D'f, d(DH)\rangle \\
&= \frac{1}{2}\bigl(\langle Df, r(DH)\rangle - \langle D'f, r(DH)\rangle\bigr)
\end{aligned}
$$

が成立する. よって, H に関する Hamiltonian vector field $\xi = \{\,\bullet\,, H\}$ は次の形になる:

$$
\xi_x = \frac{1}{2}\bigl(r(DH(x))\,x - x\,r(DH(x))\bigr) = \frac{1}{2}\bigl[r(DH(x)), x\bigr].
$$

よって, $G = G_s$ 上の Hamilton 方程式は

$$
\partial_t(L) = \frac{1}{2}\bigl[r(DH(L)), L\bigr] \qquad (L \in G) \tag{$*$}
$$

という形になる. そして, H が adjoint invariant であるとき

$$
DH(L)\,L = L\,DH(L) \qquad (L \in G)
$$

であるから, $r = 2r_+ - 1 = 2r_- + 1$ を $(*)$ に代入すれば,

$$
\partial_t(L) = \bigl[r_+(DH(L)), L\bigr] = \bigl[r_-(DH(L)), L\bigr] \qquad (L \in G)
$$

が得られる. $\square$

定理 28.9 (G/P 上の Hamilton 方程式) P は G の Lie subgroups であり, その Lie algebra を $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ と書くことにする. 定理 28.6 の (7) の状況を考え, $K = \{e\} \times P$ であると仮定する. そのとき,

$$M = K \backslash D_{s,s'} / \Delta(G) \cong G/P.$$

$\mathfrak{p}$ の直交補空間上で b (または c) および d_+ (または d_-) が消えていると仮定する. このとき, G/P 上の函数 H に関する Hamilton 方程式は次の形になる:

$$\partial_t(W) = a(DH(W))\, W \qquad (W \in G/P).$$

証明. f, H は G 上の P-invariant functions であると仮定する. このとき, $Y \in \mathfrak{p}$ に対して,

$$\begin{aligned}
\langle Df(x), Y \rangle &= [\partial_s f(xe^{sY})]_{s=0} = [\partial_s f(x)]_{s=0} = 0, \\
\langle DH(x), Y \rangle &= [\partial_s H(xe^{sY})]_{s=0} = [\partial_s H(x)]_{s=0} = 0
\end{aligned}$$

であるから, Df, DH は $\mathfrak{p}$ の直交補空間に値を取る. そして, $b^* = c$, $d = d_+ + d_-$, $d_+^* = -d_-$ であるから,

$$\begin{aligned}
\langle Df, b(D'H) \rangle &= \langle c(Df), DH \rangle, \\
\langle Df, c(D'H) \rangle &= \langle b(Df), DH \rangle, \\
\langle D'f, d(D'g) \rangle &= \langle D'f,\ d_+(D'g) \rangle - \langle d_+(D'f),\ D'g \rangle \\
&= \langle D'f,\ d_-(D'g) \rangle - \langle d_-(D'f),\ D'g \rangle.
\end{aligned}$$

よって, $\mathfrak{p}$ の直交補空間上で b (または c) および d_+ (または d_-) が消えているならば,

$$\{f, g\} = \langle Df, a(Dg) \rangle.$$

である. よって, G 上の P-invariant function H に関する G 上の Hamiltonian vector filed $\xi = \{\,\bullet\,, H\}$ は次の形になる:

$$\xi_x \equiv a(DH(x))\, x \mod x\mathfrak{p} = T_x G \qquad (x \in G).$$

これを G/P 上に落としたものが G/P 上の Hamiltonian vector field である. これで証明すべきことが示された. □

ダイナミカル古典 r 行列について　(2001年6月8日)

A　ダイナミカル古典 r 行列の一般論に向けて

A.1　factored Lie algebra に関する復習

Lie algebra $\mathfrak{g}$ が subalgebras $\mathfrak{g}_\pm$ の線形直和に分解しているとき, $\mathfrak{g}$ を factored Lia algebra と呼ぶことにしたのであった. そのとき, r-operators が次のように定まるのであった:

$$X = X_+ - X_- \in \mathfrak{g}, \quad X_\pm \in \mathfrak{g}_\pm,$$
$$r + (X) = X_+, \quad r_-(X) = X_-, \quad r(X) = X_+ - X_-.$$

このとき, $\mathfrak{g}$ に r-bracket $[\ ,\ ]_r$ を

$$[X, Y]_r := [X_+, Y_+] - [X_-, Y_-]$$

と定めると $\mathfrak{g}_r = (\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_r)$ は $\mathfrak{g}_+ \times (-\mathfrak{g}_-)$ と同型な Lie algebra をなし ($-\mathfrak{g}_-$ は $\mathfrak{g}_-$ の opposite Lie algebra), $r_\pm : \mathfrak{g}_r \to \mathfrak{g}$ は Lie algebra homomorphism になる.

そして, 注意 2.6 によれば $r_\pm : \mathfrak{g}_r \to \mathfrak{g}$ が bracket を保つという条件はこの定式化における classical Yang-Baxter equation (CYBE) の類似物なのであった.

より正確には, $\mathfrak{g}$ が invariant non-degenetate symmetric bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ が定められていて, それに関する unitarity condition

$$r_- = -r_+^* \qquad (\text{i.e. } \langle r_+(X), Y\rangle + \langle X, r_-(Y)\rangle = 0)$$

が成立しているとき, $r_\pm : \mathfrak{g}_r \to \mathfrak{g}$ が bracket を保つという条件は $r_\pm$ が CYBE を満たしていることと同値になる.

そして, rational r-matrix と elliptic r-matrix は factored Lie algebra の r-operator r_+ を積分で書いたときの核函数になっているのであった.

次の節では以上の定式化が $\mathfrak{g}$ の任意の subalgebras の組 $(\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ に対してどのように一般化されるかを説明する.

A.2　設定の一般化

G は connected Lie group であり, $G_\pm$ はその connected subgroups であるとする. これらの Lia algebras を $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_+$, $\mathfrak{g}_-$ と書くことにする.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ (線形直和) になっているときが前節で簡単に説明した factored Lie algebra の場合である. しかし, ここでは任意の 2 つの subalgebras を考えている. ここまで設定を一般化しても意味のある理論が存在するのである.

簡単のため, G の開集合 U で $M = G_+ \backslash U / G_-$ が滑らかな多様体になっているものが存在すると仮定する. M を **dynamical variables** の空間と呼ぶ.

例 A.1 G が reductive 群で $G_- = B$ はその Borel subgroup で $G_+ = N$ は反対側の maximal unipotent subgroup であるとする．このとき, $G_+\backslash G/G_-$ は Weyl 群で parametrize される有限集合になる． $U = NB$ と置くと, U は G の open dense subset であり, $M = N\backslash U/B$ は一点になる．

表現論において flag variety G/B 上の N-orbit の個数が有限になるという事実は基本的である． □

例 A.2 G は reductive 群で $G_+ = N_+$, $G_- = N_-$ は互いに反対側の maximal nilpotent subgroup であるとする． H は G の Cartan subgroup であり, その Lie algebra $\mathfrak{h}$ が $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- + \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_+$ を満たしているものとする． $r = \dim \mathfrak{h}$ と置く．このとき, $\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}-)$ は r 次元である. $U = N_+ H N_-$ と置くと, U は G の中で open dense であり, $M = G_+\backslash U/G_-$ は自然に H と同一視される． □

例 A.3 $\mathfrak{a}$ を任意の有限次元単純 Lie 環とし, $\mathfrak{h}$ はその Cartan subalgebra であるとし, $\mathfrak{a}$ の root 分解を

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{a}_\alpha$$

と書く. $\mathfrak{g}$ を次のように定める:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}((z)).$$

$\mathfrak{h}$ の open set S を次のように定める:

$$S := \{\, h \in \mathfrak{h} \mid \exp(\alpha(h)) \neq 1 \ (\alpha \in \Delta) \,\}.$$

上半平面に含まれる複素数 τ を任意に取る. $h \in S$ に対して,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_+ :=& \mathfrak{a}[[z]],\\
\mathfrak{g}_- :=& \{\, A : \mathbb{C} \text{ 上の } \mathfrak{a}\text{-valued meromorphic function} \mid \\
& \quad A \text{ は } \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau \text{ のみに pole を持つ}, \qquad A(z+1) = A,\ A(z+\tau) = \mathrm{Ad}(e^h)A(z) \,\}.
\end{aligned}$$

$\mathfrak{g}_-$ は $z = 0$ での Laurent 展開によって $\mathfrak{g}$ の subalgebra とみなせる．このとき, 楕円函数論より,

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g}_+ \cap \mathfrak{g}_- = \mathfrak{h},\\
&\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}_+ + \mathfrak{g}_-) \cong z^{-1}\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}.
\end{aligned}$$

後者の同型は $z^{-1}\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ から誘導される.

以上の場合において, 幾つかの理由から, dynamical variables の空間 M は elliptic curve E 上の semistable principal bundle 同値類の moduli space になるべきであることがわかっている．そのとき, M は $\mathfrak{h}$ を Weyl 群と lattice で割ってできる空間と同一視される.

elliptic dynamical r-matrix は以上の場合から得られる． □

A.3　dynamical variables の空間上の可換微分作用素環の構成の仕方

まず, $M = G_+ \backslash U / G_-$ 上の微分作用素は $G_\pm$, U の言葉でどのように表現できるかを説明しよう.

M 上の函数は U 上の函数で $G_+ \times G_-$ の作用で不変なものとして特徴付けられる.

しかし, U 上の微分作用素で $G_+ \times G_-$ の作用で不変なものを同様に考えても, M 上の微分作用素がぴったり得られるわけではない. そうやって得られるのは U 上の $G_+ \times G_-$ 不変な函数の空間を保つような U 上の微分作用素である.

例 A.4 $G = \mathbb{C}^2 = \{(x, y)\}$ で $G_- = \{(0, y)\} \subset G$, $G_+ = 0$ の場合を考える. G/G_- 上の微分作用素は

$$P = \sum a_i(x) \partial_x^i$$

の形になる. これに対して, G_- の作用で不変な G 上の微分作用素は

$$Q = \sum b_{i,j}(x) \partial_x^i \partial_y^j$$

の形になる. □

この例から見て取れるように実は次が成立している.

定理 A.5 $\mathcal{D}(U)$ と $\mathcal{D}(M)$ はそれぞれ U, $M = G_+ \backslash U / G_-$ 上の微分作用素環であるとし, $\mathcal{A}(U)$, $\mathcal{J}(U)$, $\mathcal{K}(U)$ を次のように定める:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}(U) = \{U \text{ 上の } G_+ \times G_- \text{ 不変微分作用素全体}\}, \\
&\mathcal{J}(U) = \{\mathcal{A}(U) \text{ に含まれるベクトル場で } M \text{ への射影が } 0 \text{ になるもの全体}\}, \\
&\mathcal{K}(U) = (\mathcal{J}(U) \text{ で生成される } \mathcal{A}(U) \text{ の両側イデアル}).
\end{aligned}$$

このとき, 次の自然な exact sequence が存在する:

$$0 \to \mathcal{K}(U) \to \mathcal{A}(U) \xrightarrow{\phi} \mathcal{D}(M) \to 0.$$

ここで, $\mathcal{A}(U)$ から $\mathcal{D}(M)$ への写像 ϕ は $\mathcal{A}(U)$ の U 上の函数への作用を $G_+ \times G_-$ 不変な函数への作用に制限する写像であり, algebra homomorphism になっている. よって, $\mathcal{A}(U)$ の任意の可換部分環 $\mathcal{R}_U$ から, M 上の微分作用素からなる可換環 $\mathcal{R}_M = \phi(\mathcal{R}_U) \subset \mathcal{D}(M)$ が得られる. □

この定理は dynamical variables の空間 M 上の可換微分作用素環を構成するための一つの処方箋を与えている.

例 A.6 $\mathcal{Z}(G)$ は G 上の両側 G 不変な微分作用素全体のなす環であるとする. $\mathcal{Z}(G)$ は $U(\mathfrak{g})$ の center $Z(\mathfrak{g})$ と自然に同一視される. $\mathcal{Z}(G) = Z(\mathfrak{g})$ を U 上に制限したものを $\mathcal{R}_U = \mathcal{Z}(U)$ と書くと, $\mathcal{R}_U = \mathcal{Z}(U)$ は $\mathcal{A}(U)$ の可換部分環をなす. 上の定理より, これで, $U(\mathfrak{g})$ の center $Z(\mathfrak{g})$ から, U 上の可換微分作用素環 $\mathcal{R}_U$ と M 上の可換微分作用素環 $\mathcal{R}_M = \phi(\mathcal{R}_U)$ を作るための処方箋が得られたことになる. □

注意 A.7 affine Lie algebra の場合にこの定理を non-trivial な形で適用するためには level を critical にして, 上の処方箋を少し修正する必要がある. □

それによって, comapct Riemann 面上の principal bundles の moduli space 上の可換な twisted differential operators からなる algebra を構成することができる.

そして, それは Beilinson と Drinfeld による geometric Langlands program over $\mathbb{C}$ における Hitchin Hamiltonians の量子化になっている.

Beilonson と Drinfeld の未完の仕事については

`http://www.math.uchicago.edu/~benzvi/`

で取得できる "Chiral Algebras" と "Quantization of Hitchin's Integrable System and Hecke Eigensheaves" を参照せよ. □

定理 A.5 の古典力学版は以下のようになる. 定理 A.5 の gr を取ることによって次の定理が得られる.

定理 A.8 T^*U と T^*M はそれぞれ U, $M = G_+\backslash U/G_-$ の cotangent bundle であるとする. $F(T^*M)$, $A(T^*U)$, $J(T^*U)$, $K(T^*U)$ を次のように定める:

$$
\begin{aligned}
&F(T^*M) = \{T^*M \text{ 上の函数全体}\},\\
&A(T^*U) = \{T^*U \text{ 上の } G_+ \times G_- \text{ 不変函数全体}\},\\
&J(T^*U) = \{\mathcal{A}(U) \text{ に含まれるベクトル場で } M \text{ への射影が } 0 \text{ になるもの全体}\},\\
&K(T^*U) = (J(T^*U) \text{ で生成される } A(T^*U) \text{ の両側イデアル}).
\end{aligned}
$$

ここで, $A(T^*U)$ の定義において, U 上のベクトル場が T^*U 上の函数とみなせることに注意せよ. このとき, 次の自然な exact sequence が存在する:

$$0 \to K(T^*U) \to A(T^*U) \xrightarrow{\phi} F(T^*M) \to 0.$$

ここで, $A(T^*U)$ から $F(T^*M)$ への写像 ϕ は自然な射影 $\pi : U \to M$ を用いて,

$$\phi(f)(y,\eta) = f(x, \pi^*(\eta)) \quad (f \in A(T^*U),\ x \in U,\ y = \pi(x),\ \eta \in T_y^*M)$$

によって定義される. ここで, π^* は π から誘導される自然な写像

$$\pi^* : T_y^*M \to T_x^*U, \qquad x \in U, \quad y = \pi(x)$$

である. ϕ は Poisson algebra homomorphism であり, $K(T^*U)$ は Poisson ideal になる. よって, 特に $A(T^*U)$ の任意の Poisson 可換部分環 R_{T^*U} から, T^*M 上の Poisson 可換な函数環 $R_{T^*M} = \phi(R_{T^*U})$ が得られる. □

例 A.9 $Z(T^*G)$ は T^*G 上の両側 G 不変な函数全体のなす環であるとする. $Z(T^*G)$ は $S(\mathfrak{g})$ の center と自然に同一視される. $Z(T^*G)$ を U 上に制限したものを $R_{T^*U} = Z(T^*U)$ と書くと, $R_{T^*U} = Z(T^*U)$ は $A(T^*U)$ の Poisson 可換部分環をなす. 上の定理より, これで, $S(\mathfrak{g})$ の Poisson center から, T^*U 上の Poisson 可換な函数環 $R_{T^*U} = Z(T^*U)$ と T^*M 上の Poisson 可換な函数環 $R_{T^*M} = \phi(R_{T^*U})$ を構成するための処方箋が得られた. □

A.4　問題とコメント

次のような問題が考えられる:

- $\mathcal{A}(U)$ の可換部分環の面白い例にはどのようなものがあるか?
- 定理 A.8 の Poisson Heisenberg double の場合の類似.
- 定理 A.5 の量子群の場合における類似.

このノートの内容は Lie group homomorphism $r_\pm : G' \to G$ が任意に与えられた場合にほとんど straightforward に一般化できる. 古典 r 行列の理論は $G' = G_r$ の場合に対応している.

参考文献

[BD] A. A. Belavin and V. G. Drinfeld: Solutions of the classical Yang-Baxter equation for simple Lie algebras, Funct. Anal. Appl. 16, 1982, 159–180.

[FM1] L. Freidel and J.-M. Maillet: Quadratic algebras and integrable systems, Phys. Lett. B 262 (1991), no. 2-3, 278–284

[FM2] L. Freidel and J.-M. Maillet: On Classical and quantum integrable field theories associated to Kac-Moody current algebras, Phys. Lett. B 263 (1991), no. 3-4, 403–410

[O1] W. Oevel: A note on the Poisson brackets associated with Lax operators, Phys. Lett. A 156 (1994), 79–86

[O2] W. Oevel: Poisson Brackets for Integrable Lattice Systems, in *Algebraic Aspects of Integrable Systems*, 261–283, Edited by A. S. Fokas and I. M. Gelfand, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 26, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997

[P] S. Parmentier: On coproducts of quasi-triangular Hopf algebras, St. Petersburg Math. J. 6 (1995), no. 4, 879–894

[ReyS] A. G. Reyman and M. A. Semenov-Tian-Shancky: Group-theoretical methods in the theory of finite-dimensional integrale systems, *Dynamical System VII*, Enclyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 16, Springer-Verlag, 116–225.

[ResS] N. Yu. Reshetikhin and M. A. Semenov-Tian-Shansky, Quantum R-matrices and factorization problems, J. Geom. Phys., Vol. 5, No. 4, 1988, 533–550.

[Se1] M. A. Semenov-Tyan-Shanskii: What is a classical r-matrix?, Funct. Anal. Appl. 17, 1983, 259–272

[Se2] M. A. Semenov-Tian-Shansky: Monodromy Map and Classical r-matrices, translation of the author's article published in Zapiski Lauchn. Semin. POMI, v.200, 1993, St.Petersburg, `hep-th/9402054`

[SS] M. A. Semenov-Tian-Shansky and A. V. Sevostyanov: Classical and Quantum Nonultralocal Systems on the Lattice, in *Algebraic Aspects of Integrable Systems*, 323–350, Edited by A. S. Fokas and I. M. Gelfand, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 26, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997, `hep-th/9509029`

[Su1] Yu. B. Suris: On the bi-Hamiltonian structure of Toda and relativistic Toda lattices, Phys. Lett. A 180 (1993), no. 6, 419–429

[Su2] Yu. B. Suris: Nonlocal quadratic Poisson algebras, monodromy map, and Bogoyavlensky lattices, J. Math. Phys. 38 (1997), no. 8, 4179–4201, `solv-int/9610001`