

ホロノミック量子場と量子共形場の関係

黒木 玄

2003年9月5日

目次

1	はじめに	1
2	スカラー値函数のモノドロミー保存変形	2
2.1	解の形	2
2.2	Heisenberg 代数	3
2.3	Fock 空間	4
2.4	Boson 場	5
2.5	相関函数による解の表示	6
2.6	Boson-Fermion 対応	7
3	一般の場合	7
A	モノドロミー保存変形と Baker-Akhiezer 函数	8

Notation

添字の i と虚数単位の違いが分かるように、虚数単位を i と書くことにする.

1 はじめに

1970年代の終わり頃から1980年代始めにかけて、佐藤・三輪・神保によるホロノミック量子場の理論が構築された。以下は簡単のため、複素射影直線上の確定特異点型接続のモノドロミー保存変形の場合すなわち Schlesinger 方程式との関連のみを扱うことにする。

ホロノミック量子場の理論 ([4]) を使えば、モノドロミー保存変形の解 (より正確に言えば Schlesinger 方程式の線形問題表示の解もしくは対応する Riemann-Hilbert 問題の解) $Y(t; z) = [Y_{ij}(t; z)]_{i,j=1}^n$ は

$$Y_{ij}(t; z) = (z - w) \frac{\langle \psi_j(z) \psi_i^*(w) V_1(t_1) \cdots V_N(t_N) \rangle}{\langle V_1(t_1) \cdots V_N(t_N) \rangle} \quad (1.1)$$

と場の量子理論の相関函数で表わせる。ここで t_a は変形される接続の確定特異点の位置である。Schlesinger 方程式の時間変数は変形される接続の確定特異点の位置になる。右辺

の $z - w$ という因子は $Y(t; z)$ が z の函数として $z = w$ で正則でありかつ $Y(t; w) = 1_n$ を満たすようにするためにかけられている.

$\psi_j(z)$ の z が $V_a(t_a)$ の t_a の周囲をまわると, $t = (t_1, \dots, t_N)$ によらない一定のモノドロミー $M_a = [M_{a;ij}] \in GL_n(\mathbb{C})$ が発生することになる. すなわち, z が t_a の周囲を反時計回りに一回転する解析接続によって場の積が

$$\psi_j(z)V_a(t_a) \mapsto \sum_{k=1}^n M_{a;kj} \psi_k(z)V_a(t_a) \quad (1.2)$$

と変換される. 実際にそうなるようにうまく場の理論を作っておけば上のような相関函数の形でモノドロミー保存変形の解が構成可能である.

一方, Korotkin の仕事 [1], [2] をよく見れば, モノドロミー行列 M_a がすべて準置換行列¹になっている場合には, 通常 of 共形場理論における charged Fermions (より正確には Boson-Fermion 対応を通して bosonic fields) の相関函数でモノドロミー保存変形の解 $Y(t; z)$ が書けていることがわかる.

その結果は複素射影直線の被覆 Riemann 面上の一組の charged Fermions で書け, したがってコンパクト Riemann 面に付随する Jacobian 上の Riemann テータ函数で相関函数が表わされる. それは本質的にソリトン系の準周期解の Krichever 構成に登場する Baker-Akhiezer 函数である. この点に関しては Appendix A を参照せよ.

ホロノミック量子場の理論における charged Fermions ψ_i, ψ_i^* の定義は見かけ上 (量子) 共形場理論における charged Fermions の定義とまったく異なる. ホロノミック量子場の理論における場は w と t_a たちを結ぶ実閉曲線上の場である. 共形場理論における charged Fermion は複素射影直線 (より一般にはコンパクト Riemann 面) 上の場である.

それにもかかわらず, モノドロミー行列がすべて準置換行列になっている場合には共形場理論における charged Fermions および bosons の相関函数でモノドロミー保存変形の解 $Y(t; z)$ が書けてしまうという事実は興味深い.

それではモノドロミー行列が一般の場合はどうなっているのだろうか?

実は共形場の合成の収束性の問題を無視すれば, 共形場理論の charged Fermions と bosons の相関函数でモノドロミー保存変形の解 $Y(t; z)$ を書けることが容易に確かめられる. 以下ではこのことについて簡単に説明しよう.

2 スカラー値函数のモノドロミー保存変形

まず最初にモノドロミー保存変形としては自明な複素数値函数のモノドロミー保存変形について詳しく説明する. モノドロミー行列がすべて対角行列になる場合はこの場合に帰着する.

2.1 解の形

以下の条件を満たす複素平面上の複素数値多価正則函数 $Y(z)$ について考える:

- $Y(z)$ は $z = t_1, \dots, t_N$ のみを分岐点に持ち, $z = \infty$ も含めて他の点で正則である.

¹各行各列に 0 でない成分がちょうど一つしかない行列を準置換行列と呼ぶ. 0 でない成分がすべて 1 であるような準置換行列は置換行列と呼ばれる.

- $Y(z)$ は t_a を反時計回りに一回転する解析接続によって $M_a \in \mathbb{C}^\times$ 倍になる.
- $Y(w) = 1$ (正規化の条件).

これらの条件を満たす函数 $Y(z)$ が存在するための必要十分条件は $M_1 \cdots M_N = 1$ が成立することである. 以下この条件を仮定する. そのとき, $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ をうまくとって,

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_N = 0, \quad M_a = e^{2\pi i \lambda_a} \quad (a = 1, \dots, N) \quad (2.1)$$

を満たすようにでき, 上の条件を満たす $Y(z)$ は次のように表示される:

$$Y(z) = \frac{(z - t_1)^{\lambda_1} \cdots (z - t_N)^{\lambda_N}}{(w - t_1)^{\lambda_1} \cdots (w - t_N)^{\lambda_N}}. \quad (2.2)$$

この函数を共形場理論の相関函数で表わすのがこの節の目標である.

2.2 Heisenberg 代数

Boson-Fermion 対応があるので Boson から出発しても charged Fermion から出発してもほぼ同じことになるが, 実際には Boson の方がより一般の場を扱うことができるので Boson から出発することにする.

生成元 $p[m]$ ($m \in \mathbb{Z}$), q と次の基本関係式で定義される \mathbb{C} 上の結合代数 (Heisenberg 代数) を考える:

$$[p[m], p[n]] = m\delta_{m+n,0}, \quad [p[m], q] = \delta_{m,0}.$$

さらに, $e^{\lambda q}$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) を含むようなこの代数の適当な完備化を考えることにし, $p[m]$ たちと $e^{\lambda q}$ たちで生成される部分代数を \mathcal{A} と書くことにする. ただし, $e^{\lambda q}$ は

$$e^{\lambda_1 q} e^{\lambda_2 q} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)q}, \quad [p[m], e^{\lambda q}] = \lambda e^{\lambda q}$$

などを満たしているものと仮定する.

\mathcal{A} の部分環 \mathcal{A}_\pm を次のように定める:

$$\mathcal{A}_+ := (p[0], p[1], p[2], \dots \text{ で生成される部分環}) \cong \mathbb{C}[p[0], p[1], p[2], \dots],$$

$$\mathcal{A}_- := (e^{\lambda q}, p[-1], p[-2], \dots \text{ で生成される部分環}) \cong \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} e^{\lambda q} \mathbb{C}[p[-1], p[-2], \dots].$$

\mathcal{A} は次の自然な同型を持つ:

$$\mathcal{A}_- \otimes \mathcal{A}_+ \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}, \quad x_- \otimes x_+ \mapsto x_- x_+.$$

この同型写像を normal (ordered) product と呼び, $::$ と表わす. 同型写像の左辺 $\mathcal{A}_- \otimes \mathcal{A}_+$ を可換環とみなすことにする.

たとえば次が成立している:

$$:p[1]p[0]e^{\lambda q}p[-1]: = :p[-1]p[1]p[0]e^{\lambda q}: = p[-1]e^{\lambda q}p[0]p[1] = e^{\lambda q}p[0]p[-1]p[1].$$

最初の等号は normal product $::$ の内側は可換環の元だとみなすという約束から導かれ, 二つ目の等号は normal product の定義より導かれ, 最後の等号は $e^{\lambda q}p[0]$ と $p[-1]$ が可換

であることより導かれる. normal product は $p[m]$ たちを m が小さな順に左から右に並び, q の函数は $p[0]$ の左側に来るようにする積である.

\mathcal{A} の \mathbb{C} -derivation d を次の条件によって定める:

$$dp[m] = mp[m], \quad dq = 0.$$

この derivation によって, \mathcal{A} には自然に \mathbb{Z} -gradation が定まる:

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}[m], \quad \mathcal{A}[m] := \{x \in \mathcal{A} \mid dx = mx\}.$$

2.3 Fock 空間

次のような性質を持つベクトル $|0\rangle$ から生成される左 \mathcal{A} 加群 \mathcal{F} が同型を除いて一意に存在する:

$$p[m]|0\rangle = 0 \quad (m \geq 0).$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $|\lambda\rangle := e^{\lambda q}|0\rangle$ と定めると

$$p[m]|\lambda\rangle = \delta_{m,0}\lambda|\lambda\rangle \quad (m \geq 0)$$

が成立している. \mathcal{F} は次の自然なベクトル空間の同型を持つ:

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathbb{C}[p[-1], p[-2], \dots] e^{\lambda q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}, \quad x \mapsto x|0\rangle.$$

左辺の $\mathbb{C}[p[-1], p[-2], \dots] e^{\lambda q}$ の \mathcal{F} における像を \mathcal{F}_λ と表わす:

$$\mathcal{F}_\lambda = \mathbb{C}[p[-1], p[-2], \dots]|\lambda\rangle.$$

\mathcal{F} への d の作用を次のように定める:

$$d(x|0\rangle) = (dx)|0\rangle \quad (x \in \mathcal{A})$$

同様に, 次のような性質を持つベクトル $\langle 0|$ から生成される右 \mathcal{A} 加群 \mathcal{F}^\dagger が同型を除いて一意に存在する:

$$\langle 0|p[m] = 0 \quad (m \leq 0).$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $\langle \lambda| := \langle 0|e^{\lambda q}$ と定めると

$$\langle \lambda|p[m] = \delta_{m,0}\lambda\langle \lambda| \quad (m \leq 0)$$

が成立している. \mathcal{F}^\dagger は次の自然なベクトル空間の同型を持つ:

$$\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} e^{\lambda q} \mathbb{C}[p[1], p[2], \dots] \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^\dagger, \quad x \mapsto \langle 0|x.$$

左辺の $e^{\lambda q} \mathbb{C}[p[1], p[2], \dots]$ の \mathcal{F}^\dagger における像を $\mathcal{F}_\lambda^\dagger$ と表わす:

$$\mathcal{F}_\lambda^\dagger = \langle \lambda|\mathbb{C}[p[1], p[2], \dots].$$

$\mathcal{F}, \mathcal{F}^\dagger, \mathcal{F}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda^\dagger$ を Fock 空間と呼ぶことにする.

さらに, 非退化な pairing $(\cdot, \cdot) : \mathcal{F}^\dagger \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$ で次の条件を満たすものが一意に存在する:

$$(\langle 0|, x|0\rangle) = (\langle 0|x, |0\rangle) \quad (x \in \mathcal{A}), \quad (\langle 0|, |0\rangle) = 1.$$

記号の簡単のため $(\langle 0|, x|0\rangle)$ を $\langle 0|x|0\rangle$ と書くことにする. さらに

$$\langle x \rangle = \langle 0|x|0\rangle$$

と略記することもある.

上の pairing は $\lambda \neq \mu$ のとき $\mathcal{F}_\lambda^\dagger \times \mathcal{F}_\mu$ 上で 0 であり, 任意の λ に対して $\mathcal{F}_\lambda^\dagger$ と \mathcal{F}_λ 上の非退化な pairing を誘導する.

2.4 Boson 場

Scalar boson $\varphi(z)$ を次のように定義する:

$$\varphi(z) = q + p[0] \log z + \sum_{m \neq 0} \frac{z^{-m}}{-m} p[m].$$

さらに分解 $\varphi(z) = \varphi_+(z) + \varphi_-(z)$ を次のように定義する:

$$\varphi_+(z) := p[0] \log z + \sum_{m > 0} \frac{z^{-m}}{-m} p[m], \quad \varphi_-(z) := \sum_{m < 0} \frac{z^{-m}}{-m} p[m] + q.$$

このとき,

$$\begin{aligned} [p[0] \log z, q] &= \log z, \\ \left[\sum_{m > 0} \frac{z^{-m}}{-m} p[m], \sum_{n < 0} \frac{w^{-n}}{-n} p[n] \right] &= \sum_{m > 0, n < 0} \frac{z^{-m}}{-m} \frac{w^{-n}}{-n} m \delta_{m+n, 0} \\ &= - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{-m} w^m}{m} = \log \left(1 - \frac{w}{z} \right) \quad (|z| > |w|). \end{aligned}$$

なので,

$$[\varphi_+(z), \varphi_-(w)] = \log z + \log \left(1 - \frac{w}{z} \right) = \log(z - w) \quad (|z| > |w|). \quad (2.3)$$

$\varphi(z)$ の $\lambda \in \mathbb{C}$ 倍の normal ordered exponential

$$:e^{\lambda\varphi(z)}: = e^{\lambda\varphi_-(z)} e^{\lambda\varphi_+(z)} = \exp \left(\lambda \sum_{m < 0} \frac{z^{-m}}{-m} p[m] \right) e^{\lambda q} z^{\lambda p[0]} \exp \left(\lambda \sum_{m > 0} \frac{z^{-m}}{-m} p[m] \right)$$

を bosonic vertex operator と呼ぶ.

Bosonic vertex operator は形式的に次のように展開可能である:

$$:e^{\lambda\varphi(z)}: = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f[m] z^{-m + \lambda p[0]}.$$

ここで $f[m]$ は \mathcal{F} からそれ自身への線形写像であり, $f[m]\mathcal{F}_\mu \subset \mathcal{F}_{\lambda+\mu}$ と $[d, f[m]] = mf[m]$ を満たしている. ($f[m]$ は仮の記号で後では使用されない.)

一般に $[A, B] = C$, $[A, C] = [B, C] = 0$ が成立するとき,

$$\begin{aligned} e^A B e^{-A} &= e^{\text{ad} A} B = B + C, \\ e^A e^B e^{-A} &= e^{e^A B e^{-A}} = e^{B+C} = e^C e^B \end{aligned}$$

であるから,

$$e^A e^B = e^C e^B e^A \quad (2.4)$$

が成立する. この公式はよく使われる.

式 (2.3) に公式 (2.4) を適用すると,

$$e^{\lambda\varphi+(z)} e^{\mu\varphi-(w)} = e^{\lambda\mu \log(z-w)} e^{\mu\varphi-(w)} e^{\lambda\varphi+(z)} = (z-w)^{\lambda\mu} e^{\mu\varphi-(w)} e^{\lambda\varphi+(z)} \quad (|z| > |w|)$$

であるから, 次が成立していることがわかる:

$$:e^{\lambda\varphi(z)}::e^{\mu\varphi(w)}: = (z-w)^{\lambda\mu} :e^{\lambda\varphi(z)+\mu\varphi(w)}: \quad (|z| > |w|).$$

ただし, 左辺の $(z-w)^{\lambda\mu}$ の分岐は次のように選んでおく:

$$(z-w)^{\lambda\mu} = z^{\lambda\mu} \left(1 - \frac{w}{z}\right)^{\lambda\mu} = z^{\lambda\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{\lambda\mu}{m} \left(-\frac{w}{z}\right)^m \quad (|z| > |w|).$$

よって, z を w のまわりを反時計回りに一回転する解析接続によって $:e^{\lambda\varphi(z)}::e^{\mu\varphi(w)}:$ は $e^{2\pi i \lambda\mu}$ 倍に変換される. これはスカラー函数の場合における (1.2) に対応する結果である.

上と同様にして, より一般的な次の公式も得られる:

$$\begin{aligned} &:e^{\lambda_1\varphi(z_1)}:\dots:e^{\lambda_N\varphi(z_N)}: \\ &= \prod_{1 \leq a < b \leq N} (z_a - z_b)^{\lambda_a \lambda_b} :e^{\lambda_1\varphi(z_1)+\dots+\lambda_N\varphi(z_N)}: \quad (|z_1| > \dots > |z_N|). \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.5 相関函数による解の表示

Bosonic vertex operators の積 $:e^{\lambda_1\varphi(z_1)}:\dots:e^{\lambda_N\varphi(z_N)}:$ を $\langle 0|$ と $|0\rangle$ で挟んで得られる複素数値函数

$$\langle :e^{\lambda_1\varphi(z_1)}:\dots:e^{\lambda_N\varphi(z_N)}: \rangle = \langle 0|:e^{\lambda_1\varphi(z_1)}:\dots:e^{\lambda_N\varphi(z_N)}:|0\rangle$$

を bosonic vertex operators の相関函数と呼ぶ. これが消えないための必要十分条件は $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 0$ が成立することである. (式 (2.1) の説明と比較してみよ.) そこで以下ではその条件を仮定する.

式 (2.5) より次の公式がただちに導かれる:

$$\langle :e^{\lambda_1\varphi(z_1)}:\dots:e^{\lambda_N\varphi(z_N)}: \rangle = \prod_{1 \leq a < b \leq N} (z_a - z_b)^{\lambda_a \lambda_b} \quad (|z_1| > \dots > |z_N|). \quad (2.6)$$

この公式 (2.6) を知っていれば式 (2.2) で定義された函数 $Y(z)$ を相関函数で表わすのは容易である. その公式をできるだけ (1.1) に似た形で書くために, $\psi(z)$, $\psi^*(w)$, $V_a(t_a)$ を次のように定義する:

$$\psi(z) := :e^{\varphi(z)}:, \quad \psi^*(w) := :e^{-\varphi(w)}:, \quad V_a(t_a) := :e^{\lambda_a\varphi(t_a)}:.$$

このとき, bosonic vertex operators の相関函数の公式 (2.6) より,

$$\begin{aligned}\langle V_1(t_1) \cdots V_N(t_N) \rangle &= \prod_{1 \leq a < b \leq N} (t_a - t_b)^{\lambda_a \lambda_b}, \\ \langle \psi(z) \psi^*(w) V_1(t_1) \cdots V_N(t_N) \rangle &= \frac{1}{z - w} \frac{\prod_{a=1}^N (z - t_a)^{\lambda_a}}{\prod_{a=1}^N (w - t_a)^{\lambda_a}} \prod_{1 \leq a < b \leq N} (t_a - t_b)^{\lambda_a \lambda_b}.\end{aligned}$$

よって, 式 (2.2) で定義された $Y(z)$ は次の表示を持つ:

$$Y(z) = (z - w) \frac{\langle \psi(z) \psi^*(w) V_1(t_1) \cdots V_N(t_N) \rangle}{\langle V_1(t_1) \cdots V_N(t_N) \rangle}. \quad (2.7)$$

これが $n = 1$ の場合の目標の公式であった.

2.6 Boson-Fermion 対応

前項で定義した $\psi(z)$, $\psi^*(w)$ は Fermion である. 実際, $|z| > |w|$ において,

$$\begin{aligned}\psi(z)\psi(w) &= (z - w) :e^{\varphi(z)+\varphi(w)}:, \\ \psi^*(z)\psi^*(w) &= (z - w) :e^{-\varphi(z)-\varphi(w)}:, \\ \psi(z)\psi^*(w) &= (z - w)^{-1} :e^{\varphi(z)-\varphi(w)}:, \\ \psi^*(z)\psi(w) &= (z - w)^{-1} :e^{-\varphi(z)+\varphi(w)}:\end{aligned}$$

であるから, 解析接続を通して以下が成立していることがわかる:

$$\psi(z)\psi(w) = -\psi(w)\psi(z), \quad \psi^*(z)\psi^*(w) = -\psi^*(w)\psi^*(z), \quad \psi(z)\psi^*(w) = -\psi^*(w)\psi(z).$$

式 (2.4) より, $\psi(z)$, $\psi^*(w)$ の \mathcal{F}_λ への制限は次のような展開を持つ:

$$\psi(z)|_{\mathcal{F}_\lambda} = \sum_{m \in -\lambda + 1/2 + \mathbb{Z}} z^{-m-1/2} \psi[m], \quad \psi^*(w)|_{\mathcal{F}_\lambda} = \sum_{n \in \lambda + 1/2 + \mathbb{Z}} w^{-n-1/2} \psi^*[n].$$

ここで, $\psi[m]$ は \mathcal{F}_λ を $\mathcal{F}_{\lambda+1}$ にうつす線形写像であり, $\psi^*[m]$ は \mathcal{F}_λ を $\mathcal{F}_{\lambda-1}$ にうつす線形写像である.

$\mathcal{F}_{\lambda+\mathbb{Z}}$, $\mathcal{F}_{\mu+\mathbb{Z}}^\dagger$ を次のように定義する:

$$\mathcal{F}_{\lambda+\mathbb{Z}} := \bigoplus_{\mu \in \lambda + \mathbb{Z}} \mathcal{F}_\mu, \quad \mathcal{F}_{\lambda+\mathbb{Z}}^\dagger := \bigoplus_{\mu \in \lambda + \mathbb{Z}} \mathcal{F}_\mu^\dagger.$$

以下では $\lambda \in \mathbb{C}$ を固定して, $\mathcal{F}_{\lambda+\mathbb{Z}}$ への $\psi(z)$, $\psi^*(w)$ の (展開の係数の) 作用を調べる. $\psi(z)$, $\psi^*(w)$ の $\mathcal{F}_{\lambda+\mathbb{Z}}$ への制限は次のような展開を持つ:

3 一般の場合

Appendix

A モノドロミー保存変形と Baker-Akhiezer 函数

Korotkin は論文 [1], [2] においてモノドロミー行列がすべて準置換行列になる場合にはモノドロミー保存変形の解 $Y(z) = [Y_{ij}(z)]_{i,j=1}^n$ が複素射影直線の分岐被覆に付随する Jacobian 上の Riemann のテータ函数で表わされることを示した. 実はその行列成分は本質的にソリトン系の準周期解の Krichever 構成に登場する Baker-Akhiezer 函数と一致する. ただし, 通常とは異なり, コンパクト Riemann 面上に分岐点を持つ多価な Baker-Akhiezer 函数を考えなければいけない.

Korotkin の解 $Y(z)$ の成分 $Y_{ij}(z)$ の本質的部分は次の形をしている:

$$\widehat{S}(P, Q) \equiv \frac{\Theta[\mathfrak{p}](U(P) - U(Q) + \Omega)}{\Theta[\mathfrak{q}](\Omega)E(P, Q)} \prod_{m=1}^M \prod_{l=1}^N \left[\frac{E(P, \lambda_m^{(l)})}{E(Q, \lambda_m^{(l)})} \right]^{r_m^{(l)}}. \quad (\text{A.1})$$

これは [1] の式 (4.43) (もしくは [2] の式 (4.6)) の引用である. ここで, Θ は Jacobian 上の Riemann のテータ函数であり, $[\mathfrak{p}]$ は Riemann 面上の line bundle を指定するパラメーターであり², U は Abel-Jacobi 写像であり, $E(P, Q)$ は prime form であり, Ω は Riemann 面上の多価函数 \widehat{S} の分岐点たち $\lambda_m^{(l)}$ とそれらの点における指数 $r_m^{(l)}$ で決まるあるベクトルである. より詳しい記号の説明については原論文を見て欲しい.

一方, コンパクト Riemann 面上に分岐点を持つ Baker-Akhiezer 函数は次の形をしている:

$$\Psi(l; P) = \frac{\Theta(\vec{A}(P) + \vec{X}(l) + \vec{Z}|B)\Theta(\vec{Z}|B)}{\Theta(\vec{A}(P) + \vec{Z}|B)\Theta(\vec{X}(l) + \vec{Z}|B)} \exp \left(\sum_{(\alpha\beta)} l_{\alpha\beta} \int_{Q_0}^P d\Omega^{(\alpha\beta)} \right). \quad (\text{A.2})$$

これは Krichever らの論文 [3] の式 (2.3) の引用である. Θ は Jacobian 上の Riemann のテータ函数であり, \vec{Z} は Riemann 面上の line bundle を指定するパラメーターであり³, \vec{A} は Abel-Jacobi 写像であり, $X(l)$ は Riemann 面上の多価函数 $\Psi(l; P)$ の分岐点たち P_α とそれらの点における多価性を決めるパラメーター $l_{\alpha\beta}$ で決まるあるベクトルである.

函数 (A.1) と函数 (A.2) が正規化の仕方を除けば本質的に一致している. 対応関係は表 A.1 のようになっている. 正規化の仕方の違いは以下の通り:

- 函数 (A.1) では prime form $E(P, Q)$ で割ることによって正規化している. Prime form で割ることは \widehat{S} の a -cycles と b -cycles に沿った多価性が定数倍になるようにするための正規化である. Riemann 面上の line bundle をそのような多価性を持つ函数によって表現する場合にはそのような正規化を採用する.
- 函数 (A.2) では函数 $\Theta(\vec{Z}|B)/\Theta(\vec{A}(P) + \vec{Z}|B)$ をかけることによって正規化している. $\vec{A}(P) = 0$ のとき $\Theta(\vec{Z}|B)/\Theta(\vec{A}(P) + \vec{Z}|B) = 1$ が成立していることに注意せよ. 函数 $\Theta(\vec{Z}|B)/\Theta(\vec{A}(P) + \vec{Z}|B)$ で割ることは P に関する多価性を消す代わりに極を増やすような正規化になっている. Riemann 面上の line bundle をそのような極を持つ一価有理型函数で表現する場合にはそのような正規化を採用する.

²Riemann 面の genus が g のとき, degree $g-1$ の任意の line bundle に対応する層は Riemann 面上の $\Omega^{1/2}$ 値多価函数の空間として実現可能である. その多価性を指定するパラメーターが $[\mathfrak{p}]$ である.

³ P の函数 $\Theta(\vec{A}(P) + \vec{Z}|B)$ の零点たちは degree g の divisor をなし, Riemann 面上の line bundle を決定する.

函数 (A.1)	函数 (A.2)
$\Theta[\mathfrak{p}_q] (?)$	$\Theta(\vec{\mathfrak{p}} + \vec{Z} B)$
$U(P) - U(Q)$	$\vec{A}(P)$
Ω	$\vec{X}(l)$
$\lambda_m^{(l)}$	P_α
$r_m^{(l)}$	$L_\alpha = \sum_\beta l_{\alpha\beta}$
$\frac{\Theta[\mathfrak{p}_q](U(P)-U(Q)+\Omega)}{\Theta[\mathfrak{p}_q](\Omega)}$	$\frac{\Theta(\vec{A}(P)+\vec{X}(l)+\vec{Z} B)}{\Theta(\vec{X}(l)+\vec{Z} B)}$
$\prod_{m=1}^M \prod_{l=1}^N \left[\frac{E(P, \lambda_m^{(l)})}{E(Q, \lambda_m^{(l)})} \right]^{r_m^{(l)}}$	$\exp\left(\sum_{(\alpha\beta)} l_{\alpha\beta} \int_{Q_0}^P d\Omega^{(\alpha\beta)}\right) = \prod_\alpha \left[\frac{E(P, P_\alpha)}{E(Q_0, P_\alpha)} \right]^{L_\alpha}$

表 A.1: 函数 (A.1) と函数 (A.2) の対応関係

この二つの正規化の仕方の違いは Riemann 面上の line bundle の表現の仕方の違いに過ぎず、本質的な違いではない。

共形場理論の言葉を使えば函数 (A.1) もしくは函数 (A.2) に対応する函数は次のように表わされる:

$$\begin{aligned} & \frac{\langle 0 | \psi(P) \psi^*(Q) \prod_{a=1}^N :e^{\lambda_a \varphi(T_a)} : | \mathcal{Z} \rangle}{\langle 0 | \prod_{a=1}^N :e^{\lambda_a \varphi(T_a)} : | \mathcal{Z} \rangle} \sqrt{dP} \sqrt{dQ} \\ &= \frac{\Theta(\vec{A}(P) - \vec{A}(Q) + \vec{X}(\lambda, T) + \vec{Z}|B)}{\Theta(\vec{X}(\lambda, T) + \vec{Z}|B) E(P, Q)} \prod_{a=1}^N \left[\frac{E(P, T_a)}{E(Q, T_a)} \right]^{\lambda_a}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

ここで $|\mathcal{Z}\rangle$ は Riemann 面とその上の line bundle などに関する幾何学的データに対応するベクトルであり、 $\lambda_1 + \dots + \lambda_N = 0$ である。

たとえば、 $|\mathcal{Z}\rangle = |0\rangle$ の場合は複素射影直線とその上の trivial line bundle の場合に対応している。その場合は第 2.5 節でやったように上の公式 (A.3) の左辺は次のように直接に計算される:

$$\frac{\langle 0 | \psi(z) \psi^*(w) \prod_{a=1}^N :e^{\lambda_a \varphi(t_a)} : | 0 \rangle}{\langle 0 | \prod_{a=1}^N :e^{\lambda_a \varphi(t_a)} : | 0 \rangle} = \frac{1}{z-w} \prod_{a=1}^N \left[\frac{z-t_a}{w-t_a} \right]^{\lambda_a}.$$

この結果は複素射影直線に対する prime form が

$$E(z, w) = \frac{z-w}{\sqrt{dz} \sqrt{dw}}$$

であることに注意すれば公式 (A.3) の特別な場合であることがわかる。

参考文献

- [1] Korotkin, D.: Matrix Riemann-Hilbert problems related to branched coverings of \mathbb{CP}^1 preprint 2001, math-ph/0106009
- [2] Korotkin, D.: Solution of matrix Riemann-Hilbert problems with quasi-permutation monodromy matrices, preprint 2003, math-ph/0306061

- [3] Krichever, I., Wiegmann, P., and Zabrodin, A.: Elliptic solutions to difference non-linear equations and related many-body problems, *Commun. Math. Phys.* 193 (1998), 373–396, [hep-th/9704090](#)
- [4] Sato, Mikio, Miwa, Tetsuji, and Jimbo, Michio: Holonomic quantum fields II, The Riemann-Hilbert problem, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 15 (1979), no. 1, 201–278