

# 東北大学オープンキャンパス 2005 数学クイズ解答

黒木玄 (東北大学大学院理学研究科数学専攻)

2005年7月28日(木)~29日(金)

## 1 無限に広い平面に描かれた放物線はどのように見えるか?

問題 1 無限に広い  $xy$  平面の世界に自分が移り住んだと想像して欲しい. その  $xy$  平面上には放物線  $y = x^2$  が描かれており, 負の  $y$  軸上に設置された高台からその放物線全体を写生したとする. 放物線の全体はどのように描かれることになるか? 特に地平線の近くで放物線はどのような様子になっているか? 実際に放物線の絵を描いてみよ.

解答. 放物線は地平線に接する楕円に描かれる.

直観的な説明. 放物線や楕円が円錐曲線であることに注意すれば放物線が地平線に接する楕円になる理由を直観的に理解できる. 放物線が円錐のカットによって得られているとき, 視点を円錐の頂点に持って来れば放物線を写生することは円錐を楕円にカットすることに他ならないことがわかる.

具体的な計算による証明. 視点の座標を決め,  $xy$  平面に垂直に立てられた  $x$  軸に平行な平面 (スクリーン) を考え, 視点と放物線上の点を結ぶ直線とスクリーンが交わる点の軌跡がどうなるかを調べればよい. 高さ方向の座標を  $z$  と書き,  $xyz$  空間で考える. 視点  $P$  は  $(0, -a, b)$  ( $a, b > 0$ ) にあるとする. スクリーンは方程式  $y = -\alpha$  ( $0 < \alpha < a$ ) で定義される平面であるとする. 視点  $P = (0, -a, b)$  と  $xy$  平面上の点  $A = (x, y, 0)$  を結ぶ直線とスクリーンが交わる点を  $B = (X, -\alpha, Z)$  と書くことにする. (図を描いてみよ.) ある実数  $s$  が存在して  $\overrightarrow{PA} = s\overrightarrow{PB}$ ,  $\overrightarrow{PA} = (x, y + a, -b)$ ,  $\overrightarrow{PB} = (X, a - \alpha, Z)$  となるので

$$x = sX, \quad y + a = s(a - \alpha), \quad -b = s(Z - b).$$

この最後の式から得られる  $s = -b/(Z - b)$  を残りの2つに代入することによって次が得られる:

$$x = \frac{-bX}{Z - b}, \quad y = \frac{-b(a - \alpha)}{Z - b} - a.$$

これを  $y = x^2$  に代入すれば放物線をスクリーン上に描いたときの軌跡の方程式が得られる. その方程式は次のように整理される (実際に計算してみよ):

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{(Z - b + B)^2}{B^2} = 1, \quad A^2 = \frac{(a - \alpha)^2}{4a}, \quad B = \frac{b(a - \alpha)}{2a}.$$

これは楕円の方程式である. 地平線はスクリーン上に直線  $Z = b$  として描かれるので, この楕円は地平線に接していることもわかる. 実際  $X = 0$  を代入すると  $Z = b, b - 2B$  となる.

代数幾何学 (algebraic geometry) の入口. 実は上の計算の背後には射影平面の幾何学が隠れている.  $(x, y)$  と  $(X, Z)$  のあいだの変換は射影変換になっている. 平面二次曲線は楕円, 放物線, 双曲線の3種類に分類されるが, 平面に地平線を付け加えて射影平面を考えるとそれらは1種類に統一されてしまう. 射影平面上の住人は楕円, 放物線, 双曲線を区別できない! 平面二次曲線の次に扱うべきなのは平面三次曲線である. 平面三次曲線は楕円曲線と呼ばれている. 楕円曲線は数学的に極めて重要な対象である.

## 2 球面を六角形だけに分割できるか?

問題 2 球面を六角形だけで分割することはできない。その理由をできるだけ数学的に説明せよ。(ただし一つの頂点に3つの六角形が集まるように分割しなければならないものとする。)たとえば白黒に色分けされた昔ながらのサッカーボールの表面は六角形と五角形で分割されている。分割の仕方をうまく変えて六角形だけにすることは不可能である。

解答. 曲面を多角形で分割し, 分割に現われた頂点の個数, 辺の個数, 面の個数をそれぞれ  $n_0, n_1, n_2$  と書くことにする。(下付きの添字は次元. 頂点の次元は 0 であり, 辺の次元は 1 であり, 面の次元は 2 である.)  $\chi = n_0 - n_1 + n_2$  をその曲面の Euler 数と呼ぶ。(偶数次元の部品の個数はプラスで数え, 奇数次元の部品の個数はマイナスで数える.)

球面の Euler 数. 球面の Euler 数は多角形への分割の仕方によらず常に 2 になる。そのことは次のような方針で理解可能である。多角形で分割された球面から多角形の面 1 枚を外すと, 面だけが 1 つ減り, 頂点と辺の個数は変わらないので  $\chi$  は 1 減ることになる。そのようにしてできた球面の穴に接する多角形を順番に外して行き,  $\chi$  がどのように変化するかを調べてみる。すると最後の多角形を取り去る直前まで  $\chi$  の値が変化しないことがわかる。(このことを図を描いて確かめてみよ。)最後の多角形を取り去ると  $\chi$  は 1 減ることになる。何も無い状態の  $\chi$  は 0 である。 $\chi$  を 0 にするまでに  $\chi$  がちょうど 2 減少したので, 最初の球面の Euler 数  $\chi$  は 2 でなければいけない。

球面を六角形だけに分割できないことの証明. 球面が六角形だけで分割されたと仮定して矛盾を導こう。頂点の個数を  $n_0$ , 辺の個数を  $n_1$ , 六角形の個数を  $n_2$  と書くと  $\chi = n_0 - n_1 + n_2 = 2$  が成立する。しかし, 各頂点は 3 つの六角形で共有されているので  $3n_0 = 6n_2$  が成立し, 各辺は 2 つの六角形で共有されているので  $2n_1 = 6n_2$  が成立する。よって  $n_0 = 2n_2, n_1 = 3n_2$  であり,  $\chi = n_0 - n_1 + n_2 = 2n_2 - 3n_2 + n_2 = 0$  となってしまう。これは矛盾。したがって球面を六角形だけに分割することは不可能である。

大学の数学では高校までにはほとんど触れられることがない位相幾何学 (topology) も習うことになる。Euler 数は位相幾何学における最も基本的な位相不変量である。数学科では位相幾何学の講義で Euler 数よりも精密な不変量であるホモロジー群について教わることになる。

## 3 $111\cdots 1$ と 1 だけが並んでいる数の素因数について

問題 3  $111\cdots 1$  と 1 だけが並んだ数たちの素因数分解にはどのような素数が現われるか?

$111\cdots 1$  の形の数は 2 と 5 で割り切れないので, そのような数を素因数分解しても 2 と 5 は現われない。桁数が少ない場合を具体的に計算してみると,  $11 = 11, 111 = 3 \cdot 37, 1111 = 11 \cdot 101, 11111 = 41 \cdot 271, 111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37$  である。これで 3, 7, 11, 13, 37, 41, 101, 271 が  $111\cdots 1$  の形の数の素因数として現われることがわかった。17 は 1 が 16 個並んだ数の素因数であり, 19 は 1 が 18 個並んだ数の素因数であり, 23 は 1 が 22 個並んだ数の素因数であることもわかる (法則性に注意せよ)。

このように具体的な数で実験してみると  $111\cdots 1$  の形の数の素因数として 2 と 5 以外のすべての素数が現われるように思われる。この予想は正しいか?

解答. 予想は正しい。

初等的な証明.  $111 = 3 \cdot 37$  なので 3 は 111 の素因数である。あとは  $p$  が 2, 3, 5 以外の素数であると仮定し,  $111\cdots 1$  の形のある数が  $p$  で割り切れることを示せば十分である。

$p+1$  個の数  $1, 10, 10^2, \dots, 10^p$  を  $p$  で割った余りを考える.  $p$  で割った余りの値の可能性は  $0, 1, \dots, p-1$  の  $p$  種類しかないので,  $1, 10, 10^2, \dots, 10^p$  のうちの 2 つの数の  $p$  で割った余りは等しくなる. それらを  $10^i, 10^j, i < j$  と書くことにする. そのとき  $10^j - 10^i$  は  $p$  で割り切れ,

$$10^j - 10^i = 10^i(10^{j-i} - 1) = 10^i \cdot 9 \cdot \underbrace{111 \cdots 1}_{j-i \text{桁}}.$$

$p$  は  $2, 3, 5$  以外の素数なので  $j-i$  桁の  $111 \cdots 1$  は  $p$  で割り切れる.

簡単な拡張. まったく同様の方法で  $2$  と  $5$  で割り切れない任意の自然数  $m$  が  $111 \cdots 1$  の形のある数の約数になっていることも証明できる. ( $9m+1$  個の数  $1, 10, 10^2, \dots, 10^{9m}$  を  $9m$  で割った余りに上と同様の議論を適用してみよ.)

フェルマーの小定理. 上の議論の本質は  $p$  で割り切れる  $10^{j-i} - 1$  の形の数が存在することを示すことであった. しかし上の方法ではそのような数の存在が証明できるだけで,  $j-i$  として具体的にどのような数が取れるかはわからない. 具体的にどのような数を取れるかに関してはフェルマーの小定理がよく知られている. フェルマーの小定理を使えば  $p$  が  $2, 5$  以外の素数であれば  $10^{p-1}$  を  $p$  で割った余りが  $1$  になることを証明できる. そのことを使えば  $p$  が  $2, 3, 5$  以外の素数であるとき  $1$  が  $p-1$  個並んだ数が  $p$  で割り切れることもわかる. フェルマーの小定理について知りたければ大学の数学科に入学すればよい. それまで待ち切れない人は大学レベルの代数学の教科書もしくは初等整数論の教科書を勝手に参照して欲しい. フェルマーの小定理の証明はそう難しくない.

フェルマーの最終定理. 「 $n$  が  $3$  以上の整数のとき  $X^n + Y^n = Z^n$  を満たす正の整数の組  $X, Y, Z$  は存在しない」という主張が「フェルマーの最終定理」である. フェルマー (1601-65) はこの定理を証明できたと思ったのだが実際には証明できていなかったで、この主張は「フェルマー予想」と呼ばれることになる. フェルマー予想はアンドリュウ・ワイルスによって証明された. そのとき谷山豊によって予想された楕円曲線のモジュラー性が決定的な役割を果たした.

## 4 勝ち負けをイーブンに戻してゲームを終了できるか?

問題 4 小学 2 年生の翔太君は 5 歳の妹の由香ちゃんから遊んで頼まれました. 翔太君は由香ちゃんとジャンケンをして勝ったら相手のオハジキを一個もらうという単純なゲームをして遊ぶことにしました. 由香ちゃんは負けず嫌いなので負けたままゲームを終わることを許してくれません. しかし翔太君も負けず嫌いなので妹に負けたままで終わりたくありません. そこで翔太君は適当なところで勝ちと負けがイーブンになったらゲームを止めようと考えました. 翔太君は予定通りに勝ち負けをイーブンに戻してゲームを止めることはできるでしょうか? 可能ならば止めるまでに必要なゲームの回数の期待値はどのくらいになるでしょうか?

解答. 数学的には有限回で勝ち負けをイーブンに戻せる確率は  $1$  である. しかし, イーブンに戻すまでに必要なゲームの回数の期待値は無限大になってしまう. 現実には翔太君が失敗する可能性は極めて高い. (翔太君かわいそう!)

以下では, 高橋陽一郎著『漸近挙動入門 太鼓の形を聴くために』(日本評論社 2002) の第 2 章 2.3 節の方針で必要な量を計算しよう. スペースの都合で説明不足になってしまうのでより詳しい説明に関してはそちらの文献を参照して欲しい.

翔太君から見た勝ちと負けの差を  $x$  と書くことにする. たとえば翔太君が 5 回勝って 8 回負けていれば  $x = 5 - 8 = -3$  である.

勝ち負けの差が  $x$  の状態からちょうど  $r$  回でイーブンに戻せる確率を  $p_{r,x}$  と書くことにする. この  $p_{r,x}$  について詳しく調べよう.

$n$  回勝ち越している状態  $x = n$  と  $n$  回負け越している状態  $x = -n$  から出発してちょうど  $r$  回でイーブンに戻せる確率は互いに等しい:  $p_{r,-x} = p_{r,x}$ .

$x = 0$  から出発したとき最初のゲームによって  $x = \pm 1$  にそれぞれ  $1/2$  の確率で移動するので,  $x = 0$  から出発してちょうど  $r + 1$  回でイーブンに戻る確率は  $x = \pm 1$  から出発してちょうど  $r$  回でイーブンに戻る確率の  $1/2$  の和に等しい:

$$p_{r+1,0} = \frac{1}{2}p_{r,-1} + \frac{1}{2}p_{r,1} = \frac{1}{2}p_{r,1} + \frac{1}{2}p_{r,1} = p_{r,1} \quad (r \geq 1). \quad (1)$$

$p_{r+1,1}$  に関しては次が成立している:

$$p_{1,1} = \frac{1}{2}, \quad p_{r+1,1} = \frac{1}{2}p_{r,2} \quad (r \geq 1). \quad (2)$$

$x \geq 2$  のときには (1) の場合と同様に考えて次が成立していることがわかる:

$$p_{r+1,x} = \frac{1}{2}p_{r,x-1} + \frac{1}{2}p_{r,x+1} \quad (x \geq 2). \quad (3)$$

余談:  $p_{r,x}$  に関する方程式 (3) は離散化された熱方程式であり, 熱方程式は解析学における最も基本的な対象である. 翔太君は知らず知らずのうちに解析学における最も基本的な概念に触れてしまっていたのである. 実は日常生活でこのようなことはよくある. 数学を知っている人と知らない人では同じ世界がまったく違うように見えてしまう.

さて, ここで天下りの的になってしまうが

$$u(x) = \sum_{r=1}^{\infty} p_{r,x} z^r = \sum_{r=1}^{\infty} p_{r,x} e^{-\lambda r} \quad (x \geq 0, z = e^{-\lambda}, \lambda > 0)$$

と置く (母函数の方法). すると上の (1), (2), (3) は次と同値であることがわかる:

$$u(0) = zu(1), \quad u(1) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}zu(2), \quad u(x) = \frac{1}{2}zu(x-1) + \frac{1}{2}zu(x+1).$$

これより  $\rho^2 - 2e^\lambda \rho + 1 = 0$  の根を  $\rho = e^{\pm\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ) と書くと,  $u(x) = e^{-\alpha x}$  ( $x \geq 1$ ),  $u(0) = zu(1) = e^{-\lambda}e^{-\alpha}$  となるのがわかる. (そのためには  $u(x)$  に関する漸化式を解かなければいけない. 漸化式の解き方は高校数学の参考書にも書いてあるはずである.)  $e^{-\alpha} = e^\lambda - \sqrt{e^{2\lambda} - 1}$  なので最終的に次の結果を得る:

$$u(0) = \sum_{r=1}^{\infty} p_{r,0} e^{-\lambda r} = 1 - \sqrt{1 - e^{-2\lambda}}.$$

ゲームを始めてからちょうど  $r$  回で勝ち負けがイーブンの状態に戻って来る確率をすべての  $r$  について足し上げれば有限回でイーブンの状態に戻って来る確率が計算できる:

$$\sum_{r=1}^{\infty} p_{r,0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{r=1}^{\infty} p_{r,0} e^{-\lambda r} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (1 - \sqrt{1 - e^{-2\lambda}}) = 1.$$

同様にしてイーブンに戻って来るまでに必要な回数の期待値も計算できる:

$$\sum_{r=1}^{\infty} p_{r,0} r = - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d}{d\lambda} \sum_{r=1}^{\infty} p_{r,0} e^{-\lambda r} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d}{d\lambda} (\sqrt{1 - e^{-2\lambda}}) = \infty.$$