東北大学オープンキャンパス2009 数学クイズ

黒木玄　(メール：kuroki@math.tohoku.ac.jp)

解答付きのプリントがインターネットの次の場所で公開される予定：
http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/LaTeX/OpenCampus2009.pdf

1　数学クイズの問題

1/7 を小数で表わすと $1/7 = 0.142857\cdots$ なのでその小数点以下第 4 桁目の数は 8 です. これは簡単でしょう. それでは次の問題はどうでしょうか?

問題：1/12377 を小数で表わしたとき小数点以下第 6193 桁目の数は何か?

今回の数学クイズの問題はこれだけです. 証明がなくても「答」があっていれば正解とします. もちろん 1/12377 を強引に小数展開すれば答が出ますが, もっと楽にかつ簡単に答を出す方法はあるでしょうか?

2　ヒント (数学の世界における様々な美しい法則)

実は 12377 は素数です. そこでより一般的に以下では 2 と 5 以外の任意の素数 p について考えましょう. そのとき $1/p$ を小数で表わすとどうなるか. たとえば

$$1/3 = 0.333333\cdots,\ 1/7 = 0.142857142857142857\cdots,\ 1/11 = 0.090909090909\cdots,$$
$$1/13 = 0.076923076923076923\cdots,\ 1/17 = 0.05882352941176470588235294117647\cdots$$

このように 2 と 5 以外の素数 p に対して $1/p$ を小数で表わすと同じ数字の並びが無限に繰り返されます. このような小数を循環小数 (じゅんかんしょうすう) と呼び, 無限に繰り返される数字の並び (無駄がないものを取る) を循環節 (じゅんかんせつ) と呼びます. たとえば 1/3 の循環節は 3 で, 1/7 の循環節は 142857 で, 1/11, 1/13, 1/17 の循環節はそれぞれ 09, 076923, 0588235294117647 です. したがって $1/3, 1/7, 1/11, 1/13, 1/17$ の循環節の長さはそれぞれ $1, 6, 2, 6, 16$ です. 上の計算結果を見て確認して下さい.

この数学クイズの真の目標は 2 と 5 以外の多くの素数 p について $1/p$ の循環節およびその長さを調べて**様々な法則を発見してもらうこと**です. 法則さえ発見できればクイズの問題は容易に解けます.

数学の世界には様々な美しい法則が隠れています. 数学の研究の目的はそのような美しい法則を発見し, その裏に隠された数学的仕組みを明らかにすることです.

数学クイズを通して, 数学の世界における美しい法則の一端を感じて頂ければ幸いです!

以下はパソコンで計算した 120 未満で 2 と 5 以外の素数 p に対する $1/p$ の計算結果です. 小数点以下第 $(p-1)/2+1$ 桁目の数字を太字にしてあり, 小数点以下第 $p-1$ 桁目の後に空白を挿入してあります. たとえば $p=43$ のとき, 小数点以下第 $(43-1)/2+1=21+1=22$ 桁目の数字 0 が太字になっており, 小数点以下第 $43-1=42$ 桁目の数字 3 の次に空白が挿入されています.

$1/3 = 0.3\mathbf{3}\ \ 333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333\cdots$

$1/7 = 0.142\mathbf{8}57\ \ 14285714285714285714285714285714285714285714285714285714285714285714285\cdots$

$1/11 = 0.09090\mathbf{9}0909\ \ 0909090909090909090909090909090909090909090909090909090909090909090\cdots$

$1/13 = 0.076923\mathbf{0}76923\ \ 07692307692307692307692307692307692307692307692307692307692307692\cdots$

$1/17 = 0.05882352\mathbf{9}4117647\ \ 0588235294117647058823529411764705882352941176470588235294117\cdots$

$1/19 = 0.052631578\mathbf{9}47368421\ \ 05263157894736842105263157894736842105263157894736842105263\cdots$

$1/23 = 0.04347826086\mathbf{9}5652173913\ \ 0434782608695652173913043478260869565217391304347826086\cdots$

$1/29 = 0.03448275862068\mathbf{9}6551724137931\ \ 0344827586206896551724137931034482758620689655172\cdots$

$1/31 = 0.032258064516129\mathbf{0}32258064516129\ \ 03225806451612903225806451612903225806451612903\cdots$

$1/37 = 0.027027027027027027\mathbf{0}27027027027027027\ \ 02702702702702702702702702702702702702702\cdots$

$1/41 = 0.02439024390243902439\mathbf{0}2439024390243902439\ \ 0243902439024390243902439024390243902\cdots$

$1/43 = 0.023255813953488372093\mathbf{0}23255813953488372093\ \ 02325581395348837209302325581395348\cdots$

$1/47 = 0.02127659574468085106382\mathbf{9}787234042553191489361 7\ \ 0212765957446808510638297872340\cdots$

$1/53 = 0.01886792452830188679245283\mathbf{0}1886792452830188679245283\ \ 0188679245283018867924528\cdots$

$1/59 = 0.01694915254237288135593220338\mathbf{9}830508474576271186440677966 1\ \ 0169491525423728813\cdots$

$1/61 = 0.016393442622950819672131147540\mathbf{9}83606557377049180327868852459\ \ 01639344262295081\cdots$

$1/67 = 0.014925373134328358208955223880597\mathbf{0}14925373134328358208955223880597\ \ 01492537313\cdots$

$1/71 = 0.01408450704225352112676056338028169\mathbf{0}1408450704225352112676056338028169\ \ 0140845\cdots$

$1/73 = 0.013698630136986301369863013698630136\mathbf{9}86301369863013698630136986301369863\ \ 01369\cdots$

$1/79 = 0.012658227848101265822784810126582278481\mathbf{0}12658227848101265822784810126582278481\ \ \cdots$

$1/83 = 0.012048192771084337349397590361445783132 53\mathbf{0}12048192771084337349397590361445783132 53\cdots$

$1/89 = 0.01123595505617977528089887640449438202247191\mathbf{0}1123595505617977528089887640449438202\cdots$

$1/97 = 0.010309278350515463917525773195876288659793814432\mathbf{9}896907216494845360824742268041237$
$11340206185567\ \ 0103092783505154639175257731958762886597938144329896907216494\cdots$

$1/101 = 0.00990099009900990099009900990099009900990099009900\mathbf{9}9009900990099009900990099009900$
$990099009900990099\ \ 009900990099009900990099009900990099009900990099009900990\cdots$

$1/103 = 0.009708737864077669902912621359223300970873786407766\mathbf{9}902912621359223300970873786407$
$76699029126213592233\ \ 0097087378640776699029126213592233009708737864077669902\cdots$

$1/107 = 0.00934579439252336448598130841121495327102803738317757\mathbf{0}0934579439252336448598130841$
$121495327102803738317757\ \ 0093457943925233644859813084112149532710280373831 77\cdots$

$1/109 = 0.009174311926605504587155963302752293577981651376146788\mathbf{9}9082568807339449541284403 66$
$97247706422018348623853211\ \ 0091743119266055045871559633027522935779816513761\cdots$

$1/113 = 0.00884955752212389380530973451327433628318584070796460176\mathbf{9}9115044247787610619469026$
$548672566371681415929203539823\ \ 0088495575221238938053097345132743362831858 40\cdots$

以上の計算結果から様々なことがわかります.

(1) $1/p$ の循環節の長さと $p-1$ の関係はどうなっているか?

(2) 循環節の長さが偶数のとき, 循環節の前半と後半の関係はどうなっているか?

答は次のページにあります.

p は 2 と 5 以外の素数であるとします.

(1) $1/p$ を循環小数で表示したとき, 循環節の長さは必ず $p-1$ の約数になります. 440 未満の p について循環節の長さを調べた表を次ページの表 1 に示しておきます. **A** の欄は p を 40 で割った余りであり, p 自身ではなく $p-1$ と循環節の長さ ℓ の組を表にしてあります. 表 1 においてすべての ℓ が $p-1$ の約数になっていることがわかります. (p を 40 で割った余りで素数を分類してある理由は後で説明する.)

(2) $1/p$ の循環節の長さが偶数のとき, 循環節を前半と後半に分けてそれぞれを a と b と書くと $a+b=99\cdots9$ が成立しています. たとえば前ページの $1/103$ を見てみましょう. その循環節は 0097087378640776699029126213592233 で長さは 34 です. これを前半の $a=00970873786407766$ と後半の $b=99029126213592233$ にわけると $a+b=99999999999999999$ になることを容易に確認できます. 他の場合にもそうなっていることを確認してみて下さい.

前ページの $1/p$ の計算結果を眺めると次が成立していることもわかります.

(2') $1/p$ を小数で表わし, 小数点以下第 $p-1$ 桁目までを前半 a と後半 b に分けたとする. 後半の最初の桁が 9 ならば上の (2) と同様に $a+b=99\cdots9$ が成立している. (より正確に言えば, $1/p$ の小数点以下第 $(p-1)/2+1$ 桁目が 9 であるとき, $n=1,2,\dots,(p-1)/2$ に対して, $1/p$ の小数点以下第 n 桁目と第 $(p-1)/2+n$ 桁目の和は 9 になる.) たとえば前ページの $1/29$ を見てみましょう. その小数点以下第 $p-1=28$ 桁目までの前半は $a=03448275862068$ で後半は $b=96551724137931$ であり, $a+b=99999999999999$ であることを容易に確認できます. 他の場合 (特に $1/103$ の場合) にもそうなっていることを確認してみて下さい.

この (2') の法則は最初のクイズ問題を楽に解くために役に立ちそうです. 問題は $1/p$ の小数点以下第 $(p-1)/2+1$ 桁目がいつ 9 になるかです. その答は次のページの表 2 を見ればわかります.

(3) $p=3,7$ を除けば次の法則が成立している. $1/p$ の小数点以下第 $(p-1)/2+1$ 桁目の数は, p を 40 で割った余りが $1,3,9,13,27,31,37,39$ のとき 0 になり, p を 40 で割った余りが $7,11,17,19,21,23,29,33$ のとき 9 になる.

$p=3,7$ を例外とすることが気持ち悪いならば次の法則を表 1 で確認すれば良いでしょう.

(3') $p=3,7$ も含めて次の法則が成立している. $1/p$ の循環節の長さは, p を 40 で割った余りが $1,3,9,13,27,31,37,39$ のとき $(p-1)/2$ の約数になり, p を 40 で割った余りが $7,11,17,19,21,23,29,33$ のとき $(p-1)/2$ の約数にならない.

以上の法則 (2') と (3) を使えば最初のクイズ問題の答をちょっとした計算だけで出すことができます. $(12377-1)/2=6188$ であり, $6193=6188+5$ です. 12377 を 40 で割った余りは幾つでしょうか? $1/12377$ の小数点以下第 5 桁目の数は?

3　参考文献など

法則の証明はすべて省略してしまいました. 上記の法則はすべて初等整数論を学べば証明できるようになります. 初等整数論を学べる文献として, 高木貞治著『初等整数論講義』第 2 版 (共立出版, 1971 年) のみを紹介しておきます. この本の 57–61 ページに循環小数に関する説明があります. そのあたりまでこの本を読めれば法則 (1)〜(2') の証明は易しいでしょう. (3), (3') は (1)〜(2') よりも数学的に圧倒的に深い法則です. その証明には『初等整数論講義』の第 1 章の終わりの方で説明されている平方剰余の相互法則を使うことになり, 数学科卒業以上の実力が必要になります. 数学に自信がある人は理解に挑戦してみるのが良いでしょう.

p は 2, 5 以外の素数. **A** は p を 40 で割った余り. ℓ は $1/p$ を循環小数で表わしたときの循環節の長さ. **B** は $p \neq 3, 7$ のときの $1/p$ の小数点以下第 $(p-1)/2+1$ 桁目の数.

表 1. $p-1$ と $1/p$ の循環節の長さ ℓ の表

A	$p-1$	ℓ	$p-1$	ℓ	$p-1$	ℓ	$p-1$	ℓ	$p-1$	ℓ	$p-1$	ℓ	$p-1$	ℓ	$p-1$	ℓ	$p-1$	ℓ	$p-1$	ℓ	$p-1$	ℓ
1			40	5									240	40	280	28					400	200
3	2	1	42	21	82	41			162	81					282	141						
7	6	6	46	46			126	42	166	166									366	366		
9					88	44															408	204
11	10	2					130	130			210	30	250	50			330	110				
13	12	6	52	13					172	43					292	146			372	186		
17	16	16			96	96	136	8					256	256			336	336				
19	18	18	58	58			138	46	178	178									378	378	418	418
21			60	60	100	4			180	180											420	140
23	22	22			102	34					222	222	262	262					382	382		
27			66	33	106	53					226	113			306	153	346	173				
29	28	28			108	108	148	148			228	228	268	268			348	116	388	388		
31	30	15	70	35			150	75	190	95			270	5	310	155					430	215
33			72	8	112	112			192	192	232	232			312	312	352	32			432	432
37	36	3					156	78	196	98			276	138	316	79			396	99		
39			78	13					198	99	238	7					358	179			438	219

たとえば $p = 227$ のとき, p を 40 で割った余り **A** は 27 なので, **27** の行を横に見て行くと $p-1 = 226$ と $\ell = 113$ が見付かります. これは 1/227 の循環節の長さが 113 であることを意味しています.

表 2. p と $1/p$ の小数点以下第 $(p-1)/2+1$ 桁目の数 **B** の表

A	p	**B**	p	**B**	p	**B**	p	**B**	p	**B**	p	**B**	p	**B**	p	**B**	p	**B**	p	**B**	p	**B**
1			41	**0**									241	**0**	281	**0**					401	**0**
3	3		43	**0**	83	**0**			163	**0**					283	**0**						
7	7		47	**9**			127	**9**	167	**9**									367	**9**		
9					89	**0**															409	**0**
11	11	**9**					131	**9**			211	**9**	251	**9**			331	**9**				
13	13	**0**	53	**0**					173	**0**					293	**0**			373	**0**		
17	17	**9**			97	**9**	137	**9**					257	**9**			337	**9**				
19	19	**9**	59	**9**			139	**9**	179	**9**									379	**9**	419	**9**
21			61	**9**	101	**9**			181	**9**											421	**9**
23	23	**9**			103	**9**					223	**9**	263	**9**					383	**9**		
27			67	**0**	107	**0**					227	**0**			307	**0**	347	**0**				
29	29	**9**			109	**9**	149	**9**			229	**9**	269	**9**			349	**9**	389	**9**		
31	31	**0**	71	**0**			151	**0**	191	**0**			271	**0**	311	**0**					431	**0**
33			73	**9**	113	**9**			193	**9**	233	**9**			313	**9**	353	**9**			433	**9**
37	37	**0**					157	**0**	197	**0**			277	**0**	317	**0**			397	**0**		
39			79	**0**					199	**0**	239	**0**					359	**0**			439	**0**

この表から, たとえば 1/17 の小数点以下第 $(17-1)/2+1 = 8+1 = 9$ 桁目の数は 9 であり, 1/307 の小数点以下第 $(307-1)/2+1$ 桁目の数は 0 であることがわかります.