ソリトン系の基本パターン Part 2

黒木 玄

2001 年 6 月 3 日*

目 次

以下のメールの修正版

```
Date: 23 May 2001 11:39:08 JST
From: Kuroki Gen <kuroki@math.tohoku.ac.jp>
Message-Id: <200105230239.LAA26781@sakaki.math.tohoku.ac.jp>
Subject: ソリトン系の基本パターン Part 2
```

ソリトン系について常識になって欲しいことをメールに書いて送っています. これは「ソリトン系の基本パターン」の Part 2.

専門家であれば「ソリトン系の基本パターン」に書いてある枠組についてはよく知っていることのはずです. でも, はっきり書いてある文献を見たことがないので, メールに書いて送ることにしました.

1 τ 函数とは何か

「ソリトン系の基本パターン」に書いてある枠組で見たとき τ 函数は何であるかについて説明します. τ函数の概念が有効になるためには出発点になる Lie algebra と Lie group が特別なものでなければいけないので, ここでは簡単のために mKP (modified KP) 系の場合について説明します.

* これはプレインテキスト版 http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-2.txt の日付け. TEX 版は 2002 年 1 月 20 日に作成された. 筆者の疑問や意見は 2001 年 6 月 3 日時点のものであり, 現在では解決や変化している場合がある.

mKP 系は「ソリトン系の基本パターン」の意味での「基本設定」として以下を採用することによって得られるのでした:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(\infty), \\
&\mathfrak{g}_+ = \mathfrak{b}_+ = (\text{対角成分を含む上三角}), \\
&\mathfrak{g}_- = \mathfrak{n}_- = (\text{対角成分を含まない下三角}), \\
&P_i = \Lambda^i \in \mathfrak{g}_+, \quad i \in I = \mathbb{Z}_{>0} = \{1, 2, 3, \dots\}.
\end{aligned}
$$

ここで, $\mathfrak{gl}(\infty)$ は $\mathbb{Z} + 1/2 = \{\pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \dots\}$ で添字付けられた無限×無限の行列のなす Lie algebra である. また, Λ は $(m, m+1)$ 成分が全て 1 で他は 0 の上三角行列である. $\mathfrak{g}_\pm$ に対応する $G = GL(\infty)$ の部分群 $G_\pm$ と書くことにする.

そして, G 上のフローは

$$
g(t) = \exp\left(\sum t_i \Lambda^i\right) g(0)
$$

によって与えられるのでした. (注意: 一般に $g(t)$ は $G = GL(\infty)$ の formal な元とみなさなければいけない.)　もしも, $g(t)$ が

$$
g(t) = g_-(t)^{-1} g_+(t), \quad g_-(t) \in G_-, g_+(t) \in G_+
$$

と分解できるならば, $g_-(t)$ は Sato-Wilson 方程式を満たし, そこからソリトン系の基本的なパターンの全てを導くことができるのでした.

以下ではさらに以下の記号を導入します:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{b}_+ = (\text{対角成分を含む上三角行列全体のなす Borel subalgebra}), \\
&\mathfrak{b}_- = (\text{対角成分を含む下三角行列全体のなす Borel subalgebra}), \\
&\mathfrak{n}_+ = (\text{対角成分を含まない上三角全体のなす subalgebra}), \\
&\mathfrak{n}_- = (\text{対角成分を含まない下三角全体のなす subalgebra}), \\
&\mathfrak{h} = (\text{対角行列のなす Cartan subalgebra}).
\end{aligned}
$$

これらに対応する $G = GL(\infty)$ の部分群をそれぞれ B_+, B_-, N_+, N_-, H と書くことにしましょう.

このとき, $N_- H N_+$ は G の中で open dense であり, 多様体として $N_- \times H \times N_+$ に同型になります. すなわち, G の一般の元 g は次のように一意的な分解を持ちます:

$$
g = n_- h n_+, \quad n_- \in N_-,\ h \in H,\ n_+ \in N_+.
$$

これを g の Gauss 分解と呼びます. $G_+ = B_+ = HN_+$, $G_- = N_-$ なので,

$$
g = g_-^{-1} g_+, \quad g_- \in G_-,\ g_+ \in G_+
$$

という分解と Gauss 分解は $g_-^{-1} = n_-$, $g_+ = hn_+$ によって対応することになる.

以下では,

$$
g(t) = \exp\left(\sum t_i \Lambda^i\right) g(0) = n_-(t) h(t) n_+(t)
$$

が成立していると仮定する. 実は対角行列 $h(t)$ の成分が τ 函数になっている. そのことを見るために $h(t)$ の対角行列成分を表現論的に表示するにはどのようにすれば良いかを考えよう. 欲しい結果は,

$$\langle i|g(t)|i\rangle = (h(t) \text{ の “i 番目” の対角行列成分}) =: \tau_i(t) \tag{$*$}$$

です. こうなるためには,

$$\begin{aligned} \langle i|N_- &= \langle i| \quad (\langle i| \text{ の } N_- \text{ 不変性}), \\ N_+|i\rangle &= |i\rangle \quad (|i\rangle \text{ の } N_+ \text{ 不変性}) \end{aligned}$$

という不変性を仮定するのが自然です. さらに,

$$\langle i|i\rangle = 1, \quad h|i\rangle = \Lambda_i(h)|i\rangle \quad (h \in H)$$

を仮定すれば欲しい結果 $(*)$ が得られます. ただし, ここで $\Lambda_i(h)$ は $h \in H$ の “i 番目” の対角行列成分である. より正確には Λ_i は i 番目の fundamental weight であると解釈するのが自然である. すなわち,

$$\Lambda_i(h) = \prod_{m<i} h_m \quad (h \in H).$$

ここで h_m は対角行列 h の (m, m) 成分である. ここで m は半整数を動く. (定義より $\mathfrak{gl}(\infty)$ に含まれる行列の成分は半整数の対で添字付けられていた.)

したがって, $\tau_i(t)$ は i 番目の基本表現への $g(t)$ の作用の行列要素として表示できることがわかった.

そして, 有限次元の場合と同様に, $\mathfrak{gl}(\infty)$ の基本表現をベクター表現の外積空間として構成しようとすると, その外積は半無限外積でなければならないことがわかる. ところが, その半無限外積の空間には $\mathfrak{gl}(\infty)$ は発散の問題が生じてしまうせいでそのままでは作用できないことがわかり, $\mathfrak{gl}(\infty)$ の中心拡大を考えなければいけないことになる.

その中心拡大を $\widehat{\mathfrak{gl}}(\infty)$ と書くことにする. 対応する群を $\widehat{GL}(\infty)$ と書くことにする. それらの i 番目の左基本表現と右基本表現を F_i, F_i^* と書き, それらの highest weight vector を $|i\rangle$, $\langle i|$ と書くことにする. F_i, F_i^* のあいだには contravariant で $\langle i|i\rangle = 1$ を満たす pairing が一意的に存在する.

$\mathfrak{gl}(\infty)$, $GL(\infty)$ のベクトル表現に含まれる作用素は charged fermion の言葉を用いて, F_i 上の作用素に持ち上がる. ただし, normal product の分だけおつりが出て来てしまう. そのおつりが central extension が必要になる原因になるのだ.

以上をまとめると以下が正当化されたことになる. フロー

$$g(t) = \exp\left(\sum t_i \Lambda^i\right) g(0) = n_-(t)h(t)n_+(t)$$

の i 番目の τ 函数を

$$\tau_i(t) := \Lambda_i(h(t)) \quad (\Lambda_i \text{ は } i \text{ 番目の fundamental weight})$$

と定義すると, $\tau_i(t)$ は

$$\tau_i(t) = \langle i \big| \exp\big(\sum t_i \Lambda^i\big) g(0) \big| i \rangle$$

と書ける.

ここで何が驚きだったかというと, Boson-Fermion 対応

$$v \in F_i \mapsto \langle i \big| \exp\big(\sum t_i \Lambda^i\big) \big| v \rangle \in \mathbb{C}[t_1, t_2, \dots]$$

によって F_i と $\mathbb{C}[t_1, t_2, \dots]$ が同型になってしまうことです. このおかげで, $g(0)|i\rangle$ (したがって $g(t)|i\rangle$) の情報は $\tau_i(t)$ の中に全て入ってしまうことになる.

各々の $\tau_i(t)$ は $g(0) \in G$ に対応する i 番目の無限次元 Grassmann 多様体上の点の位置の情報を完全に持っています. これが KP 系の τ 函数の理論です.

そして, i を全て動かし $\tau_i(t)$ の情報を全て集めると, $g(0) \in G$ に対応する無限次元 flag 多様体上の点の位置の情報が得られることになる. こちらが, mKP 系の τ 函数の理論です.

このように, G 上のフローの Gauss 分解の対角成分を見るという τ 函数の考え方が有効だったのは Boson-Fermion 対応のおかげだと言えます.

そして, τ 函数のみたす双線型方程式は Grassmann 多様体や flag 多様体の Pluecker embedding の image の満たす方程式から得られることになるというのはいつもの通り.

2 戸田系と量子群

この節では戸田系と量子群の関係についてのスケッチを行ないます. 説明はいいかげんで不完全です. 戸田系 (戸田階層) に関する詳しい解説は高崎さんの本にあるのでそちらも参照して下さい.

戸田系は「ソリトン系の基本パターン」の意味での「基本設定」として以下を採用することによって得られるのでした:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(\infty) \times \mathfrak{gl}(\infty), \\
&\mathfrak{g}_+ = \{\, (X, X) \mid X \in \mathfrak{gl}(\infty) \,\}, \\
&\mathfrak{g}_- = \{\, (H/2 + X_+, -H/2 - X_-) \mid H \in \mathfrak{h}, X_+ \in \mathfrak{n}_+, X_- \in \mathfrak{n}_- \,\}, \\
&i \in I = \mathbb{Z}_{\neq 0}, \quad P_i = \begin{cases} (\Lambda^i, 0) & \text{if } i > 0, \\ (0, (\Lambda^t)^{-i}) & \text{if } i < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

ここで, $\mathfrak{n}_+$, $\mathfrak{n}_-$, $\mathfrak{h}$ はそれぞれ対角線を含まない $\mathfrak{gl}(\infty)$ の上三角, 下三角, 対角行列全体のなる Cartan subalgebra である.

$\mathfrak{g}_-$ の形をじっと眺めると, それはちょうど量子展開環の coproduct の $q \to 1$ での極限で得られる Poisson bracket のなす Lie algebra に同型になっていることが観察できます.

これは以下のように説明できます.

まず, $\mathfrak{gl}(\infty)$ に次のように $\mathfrak{gl}(\infty)$ 不変な内積を入れます:

$$\langle X, Y \rangle := \mathrm{tr}(XY).$$

次に $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(\infty)\times\mathfrak{gl}(\infty)$ に $\mathfrak{g}$ 不変内積を次のように入れます:

$$\langle (X,Y),(X',Y')\rangle = \langle X,X'\rangle - \langle Y,Y'\rangle.$$

このとき簡単な計算で,

$$\langle \mathfrak{g}_+,\mathfrak{g}_+\rangle = 0,\quad \langle \mathfrak{g}_-,\mathfrak{g}_-\rangle = 0$$

であり, $\mathfrak{g}$ の内積の $\mathfrak{g}_+\times\mathfrak{g}_-$ への制限は非退化であることがわかります.

上の構成は適切な性質を持つ三角分解と不変内積を持つ任意の Lie algebra (例えば symmetrizable Kac-Moody algebra) に拡張できることがわかります.

そのようにして構成される 4 つ組 $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}_+,\mathfrak{g}_-,\langle\ ,\ \rangle)$ は量子展開環の古典極限であることが Drinfeld の有名な “Quantum Groups” [D] を見れば書いてあります. Poisson group との関係などについては, Dynamical System VII [ReyS] の 202 頁の周辺を見て下さい. そして, そのとき $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}_+$ の “double” になります.

$X=G/G_+$ と置く. X は $(x,y)\mapsto xy^{-1}$ という対応によって $GL(\infty)$ と同一視できる. G 上の自然な Poisson 構造から $X\cong GL(\infty)$ 上の Poisson 構造が誘導される. X は Poisson 多様体として G_- と自然に局所同型である. よって, $GL(\infty)$ 上の戸田フロー

$$x(0)\mapsto \exp\Bigl(\sum_{i>0} t_iP_i\Bigr)x(0)\exp\Bigl(-\sum_{i<0} t_iP_i\Bigr)$$

は G_- の元 $\bigl(\exp(\sum_{i>0} t_iP_i),\exp(\sum_{i<0} t_iP_i)\bigr)$ の $X=G/G_+$ への作用から誘導される. G_- の X への左作用は Poisson である.

ちなみに, $GL(\infty)$ の $GL(\infty)$ への conjugation 作用は $G_+\cong GL(\infty)$ の $X=G/G_+$ への Poisson 左作用から誘導される.

$Y=G/G_-$ は Poisson 多様体として $G_+\cong GL(\infty)$ と自然に局所同型である. そのことを使うと, 上と同様にして, $(g_+,g_-)\in G_-$ の $x\in GL(\infty)\cong G_+$ への Poisson 局所作用を次のように定めることができる:

$$x\mapsto g_+x(x^{-1}g_-^{-1}g_+x)_+^{-1} = g_-x(x^{-1}g_-^{-1}g_+x)_-^{-1}.$$

これは dressing action と呼ばれている.

以上のような仕組みで戸田系の Hamiltonian 構造は理解可能である[1].

3 まとめ

τ 函数は Gauss 分解の対角成分である. τ 函数の理論が成功したのは Boson-Fermion 対応が成立していたからだ.

戸田系の群論的な定式化を観察することによって, 量子群の古典極限である Poisson 群の典型例を見ることができる.

[1]以上の「だ・である」調の説明は 2002 年 1 月 20 日に追加された.

参考文献

[D] V. G. Drinfeld: Quantum groups, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986), 798–820, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[ReyS] A. G. Reyman and M. A. Semenov-Tian-Shancky: Group-theoretical methods in the theory of finite-dimensional integrale systems, Dynamical System VII, Enclyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 16, Springer-Verlag, 116-225.