ソリトン系の基本パターン Part 4

黒木 玄

2001 年 6 月 20 日*

目 次

1	**擬微分作用素環の定義**	**2**
2	**時間発展の generator と可換な擬微分作用素の特徴付け**	**3**
3	**波動作用素の群と L 作用素**	**7**
4	**擬微分作用素環の Manin triple 構造**	**8**
5	**KP 系の Hamiltonian 構造**	**10**
6	**n-component KP 系の定義**	**12**
7	**nonlinear Schrödinger 系の Hamiltonian 構造**	**13**

*これはプレインテキスト版 http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-4.txt の日付け. TEX 版は 2002 年 1 月 17 日に作成された. 筆者の疑問や意見は 2001 年 6 月 20 日時点のものであり, 現在では解決や変化している場合がある.

```
Date: Wed, 20 Jun 2001 00:37:43 +0900 (JST)
From: Kuroki Gen <kuroki@math.tohoku.ac.jp>
Message-Id: <200106191537.AAA00013@sakaki.math.tohoku.ac.jp>
Subject: ソリトン系の基本パターン Part 4

    http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-1.0.txt
    http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-1.1txt
    http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-2.txt
    http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Soliton-3.txt
```

の続き. Part 3 ではソリトン系の Lie algebra レベルでの Hamiltonian 構造の一般論について書いた. このノートでは KP 系および nonlinear Schrödinger 系の Lie algebra レベルでの Hamiltonian 構造の解説を行なう.

以下, 簡単のために基礎体は実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ であるとする.

Nonlinear Schrödinger (NLS) 系は非常に特殊な場合なので簡単に Hamiltonian が書けるのでした. 以下のノートの第 7 節を見て下さい.

数学的に完全に一般の場合を理解するためには NLS は必ずしもあまり良い例じゃないかもしれません.

Davey-Stewartson (DS) 系 (もしくは 2-component KP) の Hamiltonian 構造が書いてある文献があれば教えて下さい.

1 擬微分作用素環の定義

R は derivation $\partial = \partial/\partial x$ が作用している微分環 (differential algebra) であるとする. (R, ∂) が微分環であるとは, R が associative algebra であり, $\partial : R \to R$ が線形写像でかつ次を満たしていることである:

$$\partial(fg) = \partial(f)g + f\partial(g) \quad (f, g \in R)$$

以下, 微分に関するいつもの記号法 $f' = \partial(f)$, $f^{(n)} = \partial^n(f)$, etc. を自由に用いる.

R の定数環 (subalgebra C of constants) を次のように定める:

$$C = \{\, f \in R \mid f' := \partial(f) = 0 \,\}$$

R が可換であると仮定しなかったので, C も可換であるとは限らないことに注意せよ.

例 1.1 例えば,

(1) $R = R_1 := \mathbb{C}[[x]]$ のとき, $C = \mathbb{C}$.
(2) $R = R_2 := M(n, R_1)$ のとき, $C = M(n, \mathbb{C})$.
(3) $R = R_3 := \mathbb{C}((x))$ のとき, $C = \mathbb{C}$.
(4) $R = R_4 := M(n, R_3) = M(n, \mathbb{C}((x)))$ のとき, $C = M(n, \mathbb{C})$.
(5) $R = R_5 := C^\infty(S^1) = \{S^1$ 上の複素数値 C^∞ 函数 $\}$ のとき, $C = \mathbb{C}$.
(6) $R = R_6 := M(n, R_5) = M(n, C^\infty(S^1))$ のとき, $C = M(n, \mathbb{C})$. □

(R, ∂) に対応する線形微分作用素環 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_R$ と擬微分作用素環 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_R$ を左 R 加群として次のように定義する:

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_R := R[\partial] = \Bigl\{ \sum_{m=0}^{M} a_i \partial^i \Bigm| M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a_i \in R \Bigr\},$$
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_R := R((\partial^{-1})) = \Bigl\{ \sum_{m \leq m} a_i \partial^i \Bigm| M \in \mathbb{Z}, a_i \in R \Bigr\}.$$

$\mathcal{D}$ と $\mathcal{E}$ には積が次の式を用いて自然に定義される:

$$\partial f := f\partial + f',$$
$$\partial^{-1} f := f\partial^{-1} - f'\partial^{-2} + f''\partial^{-3} - f'''\partial^{-4} + \cdots .$$

ここで, $f \in R$ である. これによって, $\mathcal{D}$ と $\mathcal{E}$ は associative algebra with 1 をなす. $\mathcal{E}$ の ∂^{-1}-adic topology に関して, 次の公式が成立している:

$$\partial_x^n f = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} f^{(k)} \partial_x^{n-k}, \quad f\partial_x^n = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n}{k} f^{(k)} \partial_x^{n-k}.$$

ここで, $\binom{n}{k}$ は二項係数である.

$\mathcal{E}$ の Lie subalgebras $\mathcal{E}_+$, $\mathcal{E}_-$ を次のように定める:

$$\mathcal{E}_+ := \mathcal{D}, \quad \mathcal{E}_- := R[[\partial^{-1}]]\partial^{-1}.$$

このとき, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$ (線形直和) である.

2 時間発展の generator と可換な擬微分作用素の特徴付け

補題 2.1 正の整数 n を任意の固定する. このとき, ∂^n と可換な擬微分作用素は定数係数である:

$$\{\, A \in \mathcal{E} \mid \partial^n A = A\partial^n \,\} = C((\partial^{-1})).$$

証明. $A \in \mathcal{E}$ を次のように表わしておく:

$$A = \sum_{i \leq M} A_i \partial^i, \quad A_i \in R \quad (A_i = 0 \text{ if } i > M).$$

証明すべきことは

$$\partial^n A = A\partial^n \implies A_i \in C \quad (i \leq M)$$

である. 二項係数を $\binom{n}{j}$ と書くことにすると, Leibnitz の公式より,

$$[\partial^n, A] = \sum_{i \leq M} [\partial^n, A_i]\partial^i = \sum_{i \leq M} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} A_i^{(n-j)} \partial^{i+j} = \sum_{k \leq M+n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} A_{k-j}^{(n-j)} \partial^k.$$

よって, $i > M$ のとき $A_i = 0$ であるから, $[\partial^n, A] = 0$ ならば,

$$
\begin{aligned}
&0 = \binom{n}{n-1} A'_M. \\
&\therefore\ A_M \in C. \\
\\
&0 = \binom{n}{n-2} A''_M + \binom{n}{n-1} A'_{M-1} = \binom{n}{n-1} A'_{M-1}. \\
&\therefore\ A_{M-1} \in C. \\
\\
&0 = \binom{n}{n-3} A'''_M + \cdots + \binom{n}{n-1} A'_{M-2} = \binom{n}{n-1} A'_{M-2}. \\
&\therefore\ A_{M-2} \in C. \\
\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

よって, 帰納的に全ての $i \leq M$ に関して $A_i \in C$ であることがわかる. □

補題 2.2 数 a, b と正の整数 m, n が $a\partial^m \neq b\partial^n$ を満たしているならば, 任意の擬微分作用素 $A \in \mathcal{E}$ に対して,

$$
(a\partial^m)A = A(b\partial^n) \implies A = 0.
$$

証明. 対偶を証明する. $A \in \mathcal{E}$ を次のように表わしておく:

$$
A = \sum_{i \leq M} A_i \partial^i, \quad A_i \in R \quad (A_i = 0 \text{ if } i > M).
$$

$A \neq 0$ ならば $A_M \neq 0$ と仮定できる. このとき,

$$
\begin{aligned}
(a\partial^m)A &= a \sum_{i \leq M} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} A_i^{(m-j)} \partial^{i+j} = a \sum_{k \leq M+m} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} A_{k-j}^{(m-j)} \partial^k, \\
A(b\partial^n) &= b \sum_{k \leq M+n} A_{k-n} \partial^k.
\end{aligned}
$$

$a\partial^m \neq b\partial^n$ は以下のどれかが成立することと同値である:

(1) $a \neq 0$ かつ $b = 0$.
(2) $a = 0$ かつ $b \neq 0$.
(3) $ab \neq 0$ かつ $m > n$.
(4) $ab \neq 0$ かつ $m < n$.
(5) $ab \neq 0$ かつ $m = n$ かつ $a \neq b$.

これらの場合を順番に調べて行こう.

まず, (1) または (2) のとき, $(a\partial^m)A$ と $A(b\partial^n)$ の片方のみが 0 になるので, $(a\partial^m)A \neq A(b\partial^n)$ である.

次に, (3) のとき, $(a\partial^m)A - A(b\partial^n)$ は $M+m$ 階の擬微分作用素であり, 最高階の係数は $aA_M \neq 0$ であるから, $(a\partial^m)A \neq A(b\partial^n)$ である.

そして, (4) のとき, $(a\partial^m)A - A(b\partial^n)$ は $M+n$ 階の擬微分作用素であり, 最高階の係数は $-bA_M \neq 0$ であるから, $(a\partial^m)A \neq A(b\partial^n)$ である.

最後に, (5) のとき, $(a\partial^m)A - A(b\partial^n)$ は $M+m$ 階の擬微分作用素であり, 最高階の係数は $(a-b)A_M \neq 0$ であるから, $(a\partial^m)A \neq A(b\partial^n)$ である. □

$e_1, \dots, e_S \in C = \{\, A \in R \mid A' = 0 \,\}$ は次を満たしていると仮定する:

(1) $e_1 + \cdots + e_S = 1$,

(2) $e_a e_b = e_a \delta_{a,b}$.

C の部分環 C_e を次のように定める:

$$C_e := \{\, A \in C \mid e_a A = A e_a \,\}.$$

補題 2.3

$$C_e = \Big\{\, \sum_{a=1}^{S} e_a A e_a \,\Big|\, A \in C \,\Big\}.$$

証明. $A = \sum_{b,c} e_b A e_c$ であるから, $A \in C_e$, $b \neq c$ のとき $e_b A e_c = 0$ であることを示せば良い. $e_a A = A e_a$ のとき,

$$0 = e_b(e_a A - A e_a)e_c = (\delta_{a,b} - \delta_{a,c})e_b A e_c$$

であるから, $b \neq c$ のとき $a = b$ と置くことによって $e_b A e_c = 0$ であることがわかる. □

零でない数 $c_1, \dots, c_S$ と正の整数 $n_1, \dots, n_S$ は

$$a \neq b \implies c_a \partial^{n_1} \neq c_b \partial^{n_S}$$

を満たしていると仮定し, $P \in \mathcal{D}$ を次のように定める:

$$P := c_1 e_1 \partial^{n_1} + \cdots + c_S e_S \partial^{n_S}.$$

擬微分作用素環の設定におけるソリトン系の時間発展の generator は P の形に取ることになる. P と可換な擬微分作用素の形は次の定理によって特徴付けられる.

定理 2.4 以上の仮定のもとで,

$$\{\, A \in \mathcal{E} \mid PA = AP \,\} = C_e((\partial^{-1})).$$

すなわち, 擬微分作用素 A が P と可換であるための必要十分条件は A が C_e 係数の定数係数擬微分作用素であることである.

証明. $\{ A \in \mathcal{E} \mid PA = AP \} \supset C_e((\partial^{-1}))$ は C_e の定義からすぐに出るので, 逆向きの包含関係を示せば良い. $A \in \mathcal{E}$ に対して,

$$A_{a,b} := e_a A e_b$$

と置く. このとき,

$$e_a P A e_b = (c_a \partial^{n_a}) A_{a,b}, \quad e_a A P e_b = A_{a,b} (c_b \partial^{n_b}).$$

よって, $PA = AP$ ならば,

$$(c_a \partial^{n_a}) A_{a,b} = A_{a,b} (c_b \partial^{n_b}).$$

この等式に補題 2.1 を適用すれば $A_{a,a} \in C((\partial^{-1}))$ であることがわかり, 補題 2.2 を適用すれば, $a \neq b$ のとき $A_{a,b} = 0$ であることがわかる. よって, 補題 2.3 から, $A \in C_e((\partial^{-1}))$ であることがわかる. □

例 2.5 F は ∂ が作用する微分環であるとし, F の定数環を C_F と書くことにする. $R = M(n, F)$ と置く. $\{1, \dots, n\}$ の分割 $\{K_1, \dots, K_S\}$ を任意に取り,

$$e_a = \sum_{i \in K_a} E_{ii} \quad (E_{ij} \text{ は行列単位})$$

と置くと, 上の仮定が満たされている. このとき, $C = M(n, C_F)$ の部分環 C_e は次の形になる:

$$C_e = \bigoplus_{a=1}^{S} \bigoplus_{i,j \in K_a} C_F E_{ij}.$$

すなわち, C_e は K_a によって定められた定数行列のブロックが対角線に並んだ形の行列の全体になる. □

例 2.6 (nonlinear Schrödinger (NLS) 系の場合) 上の例 2.5 で $n = 2$ の場合を考える. そのとき,

$$S = 2, \quad e_1 = E_{11}, \quad e_2 = E_{22} \quad (E_{ij} \text{ は行列単位})$$

と置くと,

$$C_e = C_F e_1 \oplus C_F e_2 = \operatorname{diag}(C_F, C_F)$$

である. このとき,

$$P := e_1 \partial^m - e_2 \partial^m = \operatorname{diag}(\partial^m, -\partial^m)$$

は上の定理の条件を満たしている. よって, 擬微分作用素 A が P と可換であるための必要十分条件は, A が $\operatorname{diag}(C_F, C_F)$ 係数の擬微分作用素であることである. 上とは別に,

$$S = 1, \quad e_1 = E_{11} + E_{22} = (\text{単位行列})$$

と置くと,

$$C_e = M(2, C_F)$$

である. このとき,

$$P := e_1\partial^m = \mathrm{diag}(\partial^m, \partial^m)$$

は上の定理の条件を満たしている. よって, 擬微分作用素 A が P と可換であるための必要十分条件は, A が $M(2, C_F)$ 係数の擬微分作用素であることである. □

3 波動作用素の群と L 作用素

波動作用素の群 G_- を

$$G_- := 1 + \mathcal{E}_-$$

と定義する. G_- が群をなすことを示そう. 任意の $A \in \mathcal{E}_-$ に対して, A^n の階数は $-n$ 以下になるので, $A + A^2 + A^3 + \cdots$ は収束する. よって, $A \in \mathcal{E}_-$ のとき,

$$(1 - A)^{-1} = 1 + A + A^2 + A^3 + \cdots \in 1 + \mathcal{E}_-.$$

これで, G_- が群をなすことがわかった. G_- は Lie algebra $\mathcal{E}_-$ を持つ群とみなすことができる.

$P \in \mathcal{D}$ は前節と同様とする:

(1) $e_1 + \cdots + e_S = 1$.
(2) $e_a e_b = e_a \delta_{a,b}$.
(3) $c_1, \ldots, c_S$ は零でない数である.
(4) $n_1, \ldots, n_S$ は正の整数である.
(5) $a \neq b \implies c_a\partial^{n_a} \neq c_b\partial^{n_b}$.
(6) $P = c_1 e_1 \partial^{n_1} + \cdots + c_S e_S \partial^{n_S}$.

G_- の部分群 $G_-(C_e)$ を次のように定める:

$$G_-(C_e) := G_- \cap C_e((\partial^{-1})) = 1 + C_e[[\partial^{-1}]]\partial^{-1}.$$

波動作用素 $W \in G_-$ に対して, $L = WPW^{-1}$ を L 作用素と呼ぶ. これによって, 波動作用素 W に対して L 作用素を対応させる写像が得られた. 逆向きの対応について以下の定理が成立している.

定理 3.1 $W, V \in G_-$ に対して,

$$WPW^{-1} = VPV^{-1} \implies W^{-1}V \in 1 + C_e[[\partial^{-1}]]\partial^{-1}.$$

証明. $WQW^{-1} = VQV^{-1}$ は $QW^{-1}V = W^{-1}VQ$ と同値なので, 定理 2.4 より, $W^{-1}V \in G_-(C_e)$. □

系 3.2 次の同型が成立している:

$$\{P \text{ から生成される } L \text{ 作用素の全体}\} = \{\, WPW^{-1} \mid W \in G_- \,\} \cong G_-/G_-(C_e). \quad \square$$

例 3.3 (NLS の場合) 前節の例 2.5 で $n = 2$ の場合を考える. そのとき,

$$S = 2, \quad e_1 = E_{11}, \quad e_2 = E_{22} \quad (E_{ij} \text{ は行列単位})$$

と置くと,

$$C_e = C_F e_1 \oplus C_F e_2 = \operatorname{diag}(C_F, C_F)$$

である. このとき,

$$P := e_1 \partial^m - e_2 \partial^m = \operatorname{diag}(\partial^m, -\partial^m)$$

は上の定理の条件を満たしている. よって, $W \in G_-$ が P と可換であるための必要十分条件は,

$$W \in 1 + \operatorname{diag}(C_F[[\partial^{-1}]]\partial^{-1}, C_F[[\partial^{-1}]]\partial^{-1})$$

である. この条件は m によらない. 上とは別に,

$$S = 1, \quad e_1 = E_{11} + E_{22} = (\text{単位行列})$$

と置くと,

$$C_e = M(2, C_F)$$

である. このとき,

$$P := e_1 \partial^m = \operatorname{diag}(\partial^m, \partial^m)$$

は上の定理の条件を満たしている. よって, $W \in G_-$ が P と可換であるための必要十分条件は,

$$W \in 1 + M(2, C_F[[\partial^{-1}]]\partial^{-1})$$

である. この条件も m によらない. $\square$

4 擬微分作用素環の Manin triple 構造

この節では可換とは限らない微分環 R 上に次の性質を満たす線形汎函数 restr が存在すると仮定する:

(1) $\operatorname{restr}(AB) = \operatorname{restr}(BA)$ $(A, B \in R)$.
(2) 任意の $A \in R$ に対して, $\operatorname{restr}(AB) = 0$ ならば $B = 0$.

(3) $\mathrm{restr}(A') = 0$ $(A \in R)$.

例 4.1 以下が成立している:

(1) $R = \mathbb{C}((x))$ のとき, $\mathrm{restr}(f) = \mathrm{Res}_{x=0}(f\,dx)$ $(f \in R)$.
(2) $R = M(n, \mathbb{C}((x)))$ のとき,

$$\mathrm{restr}(F) = \operatorname*{Res}_{x=0}(\mathrm{tr}(F)\,dx) \quad (F \in R).$$

ここで右辺の $\mathrm{tr}(F)$ は行列としての trace である.
(3) $R = C^\infty(S^1)$ のとき,

$$\mathrm{restr}(f) = \int_{S^1} f\,dx \quad (f \in R).$$

(4) $R = M(n, C^\infty(S^1))$ のとき,

$$\mathrm{restr}(F) = \int_{S^1} \mathrm{tr}(F)\,dx \quad (F \in R).$$

ここで右辺の $\mathrm{tr}(F)$ は行列としての trace である.
(5) $R = \mathbb{C}[[x]]$ の場合は $\partial(R) = R$ なので, 上の条件を満たしている restr は存在しない. □

R 上の restr を用いて $\mathcal{E}$ 上の trace を次のように定義する:

$$\mathrm{trace}(P) := \mathrm{restr}(a_{-1}) \quad (P = \sum a_i \partial^i \in \mathcal{E}).$$

さらに, $\mathcal{E}$ 上の bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ を次のように定義する:

$$\langle P, Q \rangle := \mathrm{trace}(PQ) \quad (P, Q \in \mathcal{E}).$$

補題 4.2 $\mathcal{E}$ 上の trace と $\langle\ ,\ \rangle$ は以下を満たしている:

(1) $\mathrm{trace}(PQ) = \mathrm{trace}(QP)$ $(P, Q \in \mathcal{E})$,
(2) 任意の $P \in \mathcal{E}$ に対して, $\mathrm{trace}(PQ) = 0$ ならば $Q = 0$.
(3) $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathcal{E}$ 上の nondegenerate symmetric bilinear form である.
(4) $\langle\ ,\ \rangle$ に関して $\mathcal{E}_+$, $\mathcal{E}_-$ は isotropic である. (すなわち, $\langle \mathcal{E}_+, \mathcal{E}_+ \rangle = 0$, $\langle \mathcal{E}_-, \mathcal{E}_- \rangle = 0$ かつ $\mathcal{E}_+ \times \mathcal{E}_-$ 上への $\langle\ ,\ \rangle$ の制限は非退化である.)
(5) $\langle AB, C \rangle = \langle A, BC \rangle$ $(A, B, C \in R)$.
(6) $\langle [A, B], C \rangle = \langle A, [B, C] \rangle$ $(A, B, C \in R)$. □

注意 4.3 上の補題 4.2 の (3), (4), (6) より, $(\mathcal{E}, \mathcal{E}_+, \mathcal{E}_-)$ は Manin triple である. Manin triple の定義は

```
http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/Classical-r-3.txt
古典 r 行列入門 Part 3
10. Manin triples and the double of Lie bialgebras
```

に書いてある. 特に, $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_+$, $\mathcal{E}_-$ は Lie bialgebras である. □

5 KP 系の Hamiltonian 構造

この節では擬微分作用素環の立場から, KP 系の linear (= first) Poisson bracket と Hamiltonian 構造について説明する. (quadratic Poisson bracket の話は別の機会に行なう.)

簡単のため, $\mathcal{E} = \mathbb{C}((x))((\partial^{-1}))$ の場合を考える. このとき, 前節で述べたように, $\mathcal{E}$ 上には trace と invariant nondegenerate bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ が定められている:

$$\begin{aligned} &\mathrm{trace}(A) := \operatorname*{Res}_{x=0}(a_{-1}\,dx) && (A = \sum a_i\partial^i \in \mathcal{E}), \\ &\langle A, B\rangle := \mathrm{trace}(AB) && (A, B \in \mathcal{E}). \end{aligned}$$

$A \in \mathcal{E}$ に対して, A の微分作用素パートを $A_+ \in \mathcal{E}_+ = \mathcal{D}$ と書き, A の積分作用素パートを $-A_- \in \mathcal{E}_-$ と書く:

$$A = A_+ - A_-, \quad A_+ \in \mathcal{E}_+ = \mathcal{D}, \quad A_- \in \mathcal{E}_-.$$

$\mathcal{E}$ 上に r-bracket を次のように定める:

$$[A, B]_r := [A_+, B_+] - [A_-, B_-] \quad (A, B \in \mathcal{E}).$$

この r-bracket は $\mathcal{E}$ 上に Lie algebra 構造を定める. その Lie algera を $\mathcal{E}_r$ と書くことにする.

$A \in \mathcal{E}$ に対して A_+, A_- を対応させる写像を $r_+, r_- : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ と書くことにする.

補題 5.1 $A, L, M \in \mathcal{E}$ に対して,

$$\langle L, [A, M]_r\rangle = \langle r_+^*[M, L] + [r_-(M), L], A\rangle.$$

特に, $[M, L] = 0$ ならば,

$$\langle L, [A, M]_r\rangle = \langle [M_-, L], A\rangle = \langle [M_+, L], A\rangle.$$

証明. $[A, M]_r = [r_+(A), M] + [A, r_-(M)]$ であるから,

$$\begin{aligned} \langle L, [A, M]_r\rangle &= \langle L, [r_+(A), M] + [A, r_-(M)]\rangle \\ &= \langle [M, L], r_+(A)\rangle + \langle [r_-(M), L], A\rangle \\ &= \langle r_+^*[M, L], A\rangle + \langle [r_-(M), L], A\rangle \\ &= \langle r_+^*[M, L] + [r_-(M), L], A\rangle. \end{aligned}$$

よって, $[M, L] = 0$ ならば,

$$\langle L, [A, M]_r\rangle = \langle [M_-, L], A\rangle.$$

さらに, $M = M_+ - M_-$ より

$$[M_-, L] = [M_+ - M, L] = [M_+, L]. \quad \square$$

定義 5.2 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を通して, $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}$ とみなすことによって, $\mathcal{E}_r$ の Lie algebra 構造 $[\ ,\ ]_r$ は $\mathcal{E}$ 上に Poisson 構造 $\{\ ,\ \}_1$ を定める:

$$\{F, G\}_1(L) = \langle L, [\nabla F(L), \nabla G(L)]_r\rangle \quad (F,\ G \text{ は } \mathcal{E} \text{ 上の函数}).$$

ここで, $\nabla F(L) \in \mathcal{E}$ は次のように定義される:

$$\langle \nabla F(L), A\rangle := dF(L)(A) = [dF(L + sA)/ds]_{s=0}.$$

$\{\ ,\ \}_1$ を KP 系の linear Poisson bracket もしくは first Poisson bracket と呼ぶ. □

参考 5.3 $(\mathcal{E}, \mathcal{E}_+, \mathcal{E}_-)$ が Manin triple であることを用いると, linear Poisson bracket とは別に, quadratic Poisson bracket もしくは所謂 Sklyanin bracket が定義される. □

例 5.4 $\mathcal{E}$ 上の linear function $a(L) = \langle A, L\rangle = \mathrm{trace}(AL)$ に対して,

$$da(L) = \mathrm{trace}(A\,dL), \quad da(L)(B) = \mathrm{trace}(AB) = \langle A, B\rangle$$

なので, $\nabla a(L) = A$ である. □

例 5.5 $\mathcal{E}$ 上の函数 H_m を

$$H_m(L) := \frac{1}{m+1}\,\mathrm{trace}(L^{m+1})$$

と定めると,

$$dH_m(L) = \mathrm{trace}(L^m dL), \quad dH_m(L)(A) = \mathrm{trace}(L^m A) = \langle L^m, A\rangle$$

であるから,

$$\nabla H_m(L) = L^m$$

である. □

補題 5.1 と例 5.4, 5.5 より, 任意の $A \in \mathcal{E}$ に対して,

$$\{a, H_m\}_1(L) = \langle [(L_m)_-, L], A\rangle = \langle [(L_m)_+, L], A\rangle.$$

よって, L の中の各係数への $\{\bullet, H_m\}_1$ の作用の結果得られる $\mathcal{E}$ の要素を $\{L, H_m\}_1(L)$ と書くと,

$$\{L, H_m\}_1(L) = [(L_m)_-, L] = [(L_m)_+, L].$$

これより, Hamiltonian H_m に対応する Poisson bracket $\{,\}_1$ に関する Hamilton 方程式は Lax 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial t_m} = [(L_m)_-, L] = [(L_m)_+, L]$$

になる. これは, KP hierarchy を含んでいる.

6 n-component KP 系の定義

簡単のため,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_n := M(n, \mathcal{E}_1), \quad \mathcal{E}_1 := \mathbb{C}((x))((\partial^{-1}))$$

の場合を考える. このとき, 前節で述べたように, $\mathcal{E}$ 上には trace と invariant nondegenerate bilinear form $\langle\ ,\ \rangle$ が定められている:

$$\begin{aligned} &\mathrm{trace}(A) := \operatorname*{Res}_{x=0}(\mathrm{tr}(A_{-1})\,dx) && (A = \textstyle\sum A_i \partial^i \in \mathcal{E}), \\ &\langle A, B\rangle := \mathrm{trace}(AB) && (A, B \in \mathcal{E}). \end{aligned}$$

$A \in \mathcal{E}$ に対して, A の微分作用素パートを $A_+ \in \mathcal{E}_+ = \mathcal{D}$ と書き, A の積分作用素パートを $-A_- \in E_-$ と書く:

$$A = A_+ - A_-, \quad A_+ \in \mathcal{E}_+ = \mathcal{D}, \quad A_- \in \mathcal{E}_-.$$

$\mathcal{E}$ 上に r-bracket を次のように定める:

$$[A, B]_r := [A_+, B_+] - [A_-, B_-] \quad (A, B \in \mathcal{E}).$$

この r-bracket は $\mathcal{E}$ 上に Lie algebra 構造を定める. その Lie algera を $\mathcal{E}_r$ と書くことにする.

$A \in \mathcal{E}$ に対して A_+, A_- を対応させる写像を $r_+, r_- : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ と書くことにする. 前節の補題 5.1 がそのまま成立する.

定義 6.1 内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を通して, $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}$ とみなすことによって, $\mathcal{E}_r$ の Lie algebra 構造 $[,]_r$ は $\mathcal{E}$ 上に Poisson 構造 $\{\ ,\ \}_1$ を定める:

$$\{F, G\}_1(L) = \langle L, [\nabla F(L), \nabla G(L)]_r\rangle \quad (F,\ G \text{ は } \mathcal{E} \text{ 上の函数}).$$

ここで, $\nabla F(L) \in \mathcal{E}$ は次のように定義される:

$$\langle \nabla F(L), A\rangle := dF(L)(A) = [dF(L + sA)/ds]_{s=0}.$$

$\{\ ,\ \}_1$ を n-component KP 系の linear Poisson bracket もしくは first Poisson bracket と呼ぶ. □

参考 6.2 $(\mathcal{E}, \mathcal{E}_+, \mathcal{E}_-)$ が Manin triple であることを用いると, linear Poisson bracket とは別に, quadratic Poisson bracket もしくは所謂 Sklyanin bracket が定義される. □

n-component KP 系の時間発展の generators のなす可換環 $\mathcal{P}$ を次のように定める:

$$\mathcal{P} = \mathrm{diag}(\mathbb{C}[\partial], \dots, \mathbb{C}[\partial]) \subset \mathcal{D}.$$

$\mathcal{P}$ は次の basis を持つ:

$$P_{i,m} = E_{ii}\partial^m \quad (E_{ij} \text{ は行列単位}, i = 1, \dots, n,\ m = 1, 2, 3, \dots).$$

$\mathcal{P}$ の basis に対応する時間変数 $t_{i,m}$ を用意し, 群

$$G_- = 1 + M(n, \mathbb{C}((x))[[\partial^{-1}]]\partial^{-1})$$

上の互いに可換な flow を次のように定める:

$$\frac{\partial W}{\partial t_{i,m}} = (L_{i,m})_- W, \quad L_{i,m} = W P_{i,m} W^{-1} \quad (W \in G_-).$$

これを n-compinent KP hierarchy (n-cKP) と呼ぶ. このとき, $A \in \mathcal{P}$ に対して,

$$L_A := W A W^{-1}$$

と定めると, L_A は次の Lax 方程式を満たしている:

$$\frac{\partial L_A}{\partial t_{i,m}} = [(L_{i,m})_-, L_A] = [(L_{i,m})_+, L_A].$$

$Q \in \mathcal{P}$ に対して, n-cKP の Q-reduction constraint とは L_Q が微分作用素になるという条件

$$(L_Q)_- = 0, \quad L_Q = (L_Q)_+ \qquad (Q\text{-reduction})$$

を課すことである. この条件は

$$Q = \sum c_{i,m} P_{i,m} \in \mathcal{P}$$

と書かれているとき,

$$\left[\sum c_{i,m} \frac{\partial}{\partial t_{i,m}}\right] W = 0 \qquad (Q\text{-reduction})'$$

という条件を課すことと同値である.

7 nonlinear Schrödinger 系の Hamiltonian 構造

この節では擬微分作用素環の立場から, nonlinear Schrödinger (NLS) 系の linear (= first) Poisson bracket と Hamiltonian 構造について説明する.

前節の言葉を使えば, nonlinear Schrödinger (NLS) hierarchy は 2-component KP hierarchy に

$$Q := \operatorname{diag}(\partial, \partial)$$

に関する Q-reduction constraint を課したものとして定義される.

Q-reduction constraint は

$$W \operatorname{diag}(\partial, \partial) W^{-1} = \operatorname{diag}(\partial, \partial)$$

と同値なので, 例 3.3 より, 時間変数を無視したとき,

$$W \in 1 + M(n, \mathbb{C}[[\partial^{-1}]]\partial^{-1})$$

という条件を課すことと同値である. すなわち,

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0$$

という条件を課すことと同値である.

Q-reduction を課さないとき, 独立な時間変数は

$$P_{1,m} = E_{11}\partial^m = \mathrm{diag}(\partial^m, 0), \quad P_{2,m} = E_{22}\partial^m = \mathrm{diag}(0, \partial^m)$$

に対応して, $t_{1,m}$, $t_{2,m}$ だけある. これに対応する derivation を$\partial_{1,m}$, $\partial_{2,m}$ と書くことにする:

$$\partial_{1,m} = \frac{\partial}{\partial t_{1,m}}, \quad \partial_{2,m} = \frac{\partial}{\partial t_{2,m}}.$$

Q-reduction を課すことは,

$$(\partial_{1,m} + \partial_{2,m})W = 0$$

と同値である. この条件のせいで独立な時間変数は半分に減ることになる. ここで, 時間変数を次のように変数変換する:

$$s_m = t_{1,m} + t_{2,m}, \quad t_m = t_{1,m} - t_{2,m}.$$

このとき,

$$\partial_{s_m} = \partial_{1,m} + \partial_{2,m}, \quad \partial_{t_m} = \partial_{1,m} - \partial_{2,m}$$

なので, Q-reduction の条件は,

$$\partial_{s_m} W = 0$$

と書き直され, t_m に関する時間発展は次のように書き直される:

$$\partial_{t_m} W = (L_m)_- W, \quad L_m = W \,\mathrm{diag}(\partial^m, -\partial^m) W^{-1}.$$

L_m は互いに可換であるだけではなく, $Q = \mathrm{diag}(\partial, \partial)$ とも可換であり,

$$L_m = Q^{m-1} L_1 \qquad (*)$$

が成立している.

例 3.3 より, W はどれかひとつの L_m から

$$C \in 1 + \mathrm{diag}(C_F[[\partial^{-1}]]\partial^{-1}, C_F[[\partial^{-1}]]\partial^{-1})$$

の右からの積の不定性を除いて一意に定まることに注意せよ. L_m に対する W の不定性は m によらないので, 初期条件として,

$$L_1(0) = W(0)\,\mathrm{diag}(\partial, -\partial)W(0)^{-1}$$

を仮定するとき, 次の Lax 方程式は L_1 に関する方程式として well-defined である:

$$\partial_{t_m} L_1 = [(L_m)_-, L_1] = [(L_m)_+, L_1].$$

この Lax 方程式から逆に上の W の時間発展の方程式を導くこともできる. ただし, $W(t)$ の $L_1(t)$ に対する不定性は上のような形の時刻によらない C の右からの積の分だけある.

注意 7.1 $(*)$ のような (1-component) KP hierarchy と同様の性質[1]は一般の場合には成立してない. NLS hierarchy は特別に扱い易い系であることに注意しなければいけない. □

$\mathcal{E}$ 上の函数 H_m を次のように定義する:

$$H_m(L) := \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}(Q^{m-1}L^2) \quad (L \in \mathcal{E}).$$

上の方で, $Q = \mathrm{diag}(\partial, \partial)$ と置いていたことに注意せよ.

以下, H_m の linear (= first) Poisson bracket に関する Hamilton 方程式が NLS の Lax 方程式の形になることを示そう.

まず, NLS の L_1 と同様に L が $Q = \mathrm{diag}(\partial, \partial)$ と可換であるとすれば,

$$\begin{aligned} dH_m(L) &= \mathrm{trace}(Q^{m-1}L\,dL), \\ dH_m(L)(A) &= \mathrm{trace}(Q^{m-1}LA) = \langle Q^{m-1}L, A\rangle \end{aligned}$$

なので,

$$\nabla H_m(L) = Q^{m-1}L.$$

よって, KP の場合と同様にして, $Q = \mathrm{diag}(\partial, \partial)$ と可換な L において,

$$\{L, H_m\}_1(L) = [(Q^{m-1}L)_-, L] = [(Q^{m-1}L)_+, L]$$

が成立している. よって, 対応する Hamilton 方程式は, $Q = \mathrm{diag}(\partial, \partial)$ と可換な L において,

$$\partial_{t_m} L = [(Q^{m-1}L)_-, L] = [(Q^{m-1}L)_+, L]$$

の形になる. これは, $(*)$ $L_m = Q^{m-1}L_1$ より, NLS の L_1 のみたしている Lax 方程式を含んでいる.

注意 7.2 $Q = \mathrm{diag}(\partial, \partial)$ と可換な L は常に定数係数なので, そのような L において常に $H_m(L) = 0$ である. しかし, $dH_m(L)$ はそうではない. □

[1] L_m が $L = L_1$ と可換な係数を持つ L の多項式で書けているという性質のこと. KP の場合は $L_m = L^m$ であり, NLS の場合は $L_m = Q^{m-1}L$ である.

注意 7.3 Q は上の $\mathrm{diag}(\partial, \partial)$ のような定数作用素であり, L は Q と可換とする. このとき, Lax 方程式

$$\partial_t L = [(Q^m L^n)_-, L] = [(Q^m L^n)_+, L]$$

は Hamiltonian

$$H(L) = \frac{1}{n+1} \,\mathrm{trace}(Q^m L^{n+1})$$

に関する Hamilton 方程式で書ける. より一般に, Lax pair (L, M_+) の M が定数作用素 $Q_1, \dots, Q_K$ とそれらと可換な L の函数で

$$M = f(Q_1, \dots, Q_K; L)$$

と表わされているとき, Lax 方程式

$$\partial_t L = [M_-, L] = [M_+, L]$$

は Hamiltonian

$$H(L) = \mathrm{trace}(F(Q_1, \dots, Q_K; L)), \quad F(x_1, \dots, x_K; y) = \int f(x_1, \dots, x_K; y)\, dy$$

に関する Hamilton 方程式で書ける. しかし, このような場合は特殊であることには注意しなければいけない. □

注意 7.4 Hamiltonian の取り方は本質的に一意的ではない. ソリトン系の Lax 方程式がその系の基本的な L 全体のなす部分多様体上に定めるベクトル場を擬微分作用素全体の上の Hamiltonian vector field に拡張するやり方は一意的ではない. 以下, m は正の奇数であると仮定する. このとき, NLS の L_m は

$$L_m = L_1^m$$

という表示を持つ. よって, この L_m の表示に対応する Hamiltonian として,

$$H_m(L) = \frac{1}{m+1} \,\mathrm{trace}(L_1^{m+1})$$

が取れる. さらに, NLS の基本的な L の取り方も一意的ではない. 例えば, 基本的な L として L_1 ではなく,

$$L_0 = W \,\mathrm{diag}(1, -1) W^{-1}$$

を取ることもできる (最初からこちらを取った方が良かったかもしれない). これを基本的な L に取れば,

$$L_m = Q^m L_0$$

なので, 対応する Hamiltonian として,

$$H_m(L) = \frac{1}{2} \,\mathrm{trace}(Q^m L^2)$$

が取れる. □