ソリトン系の基本パターン Part 10

ソリトン系への Weyl 群の作用 (2)

黒木 玄

2003 年 7 月 23 日

目 次

前回の続きです.

1 離散的な対称性も時間変数とみなすべきである理由

我々が扱っている系ではどれが空間変数でどれが時間変数であるかの区別は応用先によって決定されるということになっているので, すべてを丸ごと対等に扱うことにしないと見逃してしまうことが多いと思います.

あと, Schlesinger 変換 (離散的なモノドロミー保存変形) が特異点の合流によって連続的なモノドロミー変形に化けているように見えるという事実もあります.

「特異点の合流」について自明な場合である 1×1 行列の connection の場合を例に説明しましょう. まず, (1×1 行列値 = 複素数値) 函数 ψ を

$$\psi = z^\lambda (z-\varepsilon)^\mu$$

と定義する. このとき ψ は次の確定特異点型の微分方程式を満たしています:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \left(\frac{\lambda}{z} + \frac{\mu}{z-\varepsilon}\right)\psi.$$

m, n が整数のとき ψ と $z^m(z-\varepsilon)^n\psi$ は同じモノドロミー (多価性) を持ちます. 変換

$$\psi \mapsto z^m(z-\varepsilon)^n\psi = z^{\lambda+m}(z-\varepsilon)^{\mu+n} \qquad (m, n \in \mathbb{Z})$$

は離散的なモノドロミー保存変形であり, Schlesinger 変換と呼ばれています. 微分方程式の方で見れば λ と μ を整数だけずらす変換になっている.

次に $\varepsilon \to 0$ として不確定特異点型の微分方程式の解を作るために,

$$\lambda = \alpha - t/\varepsilon, \qquad \mu = \beta + t/\varepsilon$$

と置く. このとき,

$$\psi = z^{\alpha}(z-\varepsilon)^{\beta} z^{-t/\varepsilon}(z-\varepsilon)^{t/\varepsilon} = z^{\alpha}(z-\varepsilon)^{\beta}(1-\varepsilon/z)^{t/\varepsilon}$$

なので, $\gamma = \alpha + \beta$ と置き, $\varepsilon \to 0$ とすると,

$$\psi \to \phi = z^{\gamma}\exp(-t/z).$$

この ϕ は次の不確定特異点型の微分方程式を満たしています:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{t}{z}\right)\phi.$$

以上で説明したような 2 つの特異点 $z = 0, \varepsilon$ を一致させる limit は「特異点の合流 (confluence)」と呼ばれています.

$\phi = z^{\gamma}\exp(-t/z)$ もしくは ϕ のみたす不確定特異点型の微分方程式は γ を整数だけずらす Schlesinger 変換と t を連続的にずらす変換の 2 種類のモノドロミー保存変形を持ちます. t について ϕ は次の微分方程式を満たしている:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{1}{z}\phi.$$

さて, 以上で準備が終了です. 確定特異点型の ψ の場合と不確定特異点型の ϕ の場合ではモノドロミー保存変形の関係はどうなっているでしょうか? 前者のモノドロミー保存変形は λ と μ を整数だけずらす離散的な変換であり, 後者のそれは γ を整数だけずらす離散的変換と t を連続的にずらす変換でした.

実は以下のように見れば, 前者の離散的変換の一部が後者の連続的変換に化けていることがわかります. $\varepsilon \to 0$ とすると,

$$\frac{z^{-1}(z-\varepsilon)\psi - \psi}{\varepsilon} = -\frac{1}{z}\psi \to -\frac{1}{z}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

最左辺の中の $z^{-1}(z-\varepsilon)\psi$ は ψ の Schlesinger 変換です. その変換が ψ をどれだけずらしているかを見るために ψ を引いて ε で割ってから, $\varepsilon \to 0$ の極限を取っています. すると, その結果は ϕ の t による偏微分になる.

$\psi \mapsto z^{-1}(z-\varepsilon)\psi$ という Schlesinger 変換が t に関する連続的な変形に化けることは

$$z^{-1}(z-\varepsilon)\psi = z^{\alpha}(z-\varepsilon)^{\beta}(1-\varepsilon/z)^{(t+\varepsilon)/\varepsilon}$$

と $z^{-1}(z-\varepsilon)$ を ψ にかけるという操作が t を ε だけずらす操作に対応していることを見ても納得できます.

2　拡大 affine Weyl 群の作用

2.1　基本的考え方の復習

ソリトン系は等質空間 G/G_+ (これは無限次元 Grassmannian になったり, 無限次元 flag 多様体になったりする) の上の互いに可換なフローのことだと我々は考えているのでした.

互いに可換なフローの無限小生成元を Λ_i を書くことにすると, ソリトン系の時間発展は

$$x(t) = \exp\left(\sum t_i\Lambda_i\right) x(0) \qquad (x(0) \in G/G_+)$$

と書ける. G/G_+ の中に G_- が open dense に入っているとみなせる場合には $x(t) = [g_-(t)^{-1}]$ と置くことによって $x(t)$ の時間発展は $g_-(t) \in G_-$ に関する次の形の時間発展に焼き直せる:

$$\begin{aligned} g_-(t) &= \left(\exp\left(\sum t_i\Lambda_i\right) g_-(0)^{-1}\right)_- \\ &= \left(\exp\left(\sum t_i\Lambda_i\right) g_-(0)^{-1}\right)_+ g_-(0)\exp\left(-\sum t_i\Lambda_i\right). \end{aligned}$$

後者の式は Sato-Wilson 方程式の群バージョンになっている. 実際,

$$W(t) = g_-(t), \qquad Z(t) = \left(\exp\left(\sum t_i\Lambda_i\right) g_-(0)^{-1}\right)_+$$

と置くと,

$$W(t) = Z(t)W(0)\exp\left(-\sum t_i\Lambda_i\right)$$

と書き直せるので, これを t_i で微分すれば Sato-Wilson 方程式が出て来る.

以上のようなフローの構成の “symmetry” がどのように定義されるべきかというのが最初の基本的な問題です.

一番単純な考え方は $\exp\left(\sum t_i\Lambda_i\right)$ と可換な G/G_+ の自己同型全体を “symmetry” だとみなすこと, すなわち Λ_i の無限小作用と可換な G/G_+ の自己同型を “symmetry” とみなすことです.

しかし, この条件は affine Weyl 群の作用を考えるときには強過ぎるので, Λ_i たちで張られる Abelian Lie subalgebra $\mathfrak{p}$ を “normalize” するような G/G_+ の自己同型を以下では “symmetry” とみなすことにする.

G/G_+ の自己同型で最も自然なものは G の G/G_+ への左作用です. G の元で $\mathfrak{p}$ を normalize するもの全体を $\mathcal{W}$ と書くことにします:

$$\mathcal{W} := \{\, g \in G \mid g\mathfrak{p}g^{-1} = \mathfrak{p} \,\}.$$

すなわち, $g \in G$ が $\mathcal{W}$ に含まれるための必要十分条件は $g\Lambda_i g^{-1}$ が Λ_i たちの一次結合になることです. $w \in \mathcal{W}$ のとき,

$$w\,x(t) = \exp\left(\sum t_i(w\Lambda_i w^{-1})\right) wx(0)$$

となるので, 作用の結果における t_i たちが元の $x(t)$ のそれとは異なる方向の時間パラメーターになってしまうことを除けば, $w \in \mathcal{W}$ の $x(t)$ への作用はソリトン系のフローを保っていると考えることができます.

NLS や ∂NLS の場合にように $\mathfrak{p} = \bigoplus \mathbb{C}\Lambda_i$ として homogeneous Heisenberg subalgebra の positive part を取れば, $\mathfrak{p}$ の G における normalizer $\mathcal{W}$ は affine Weyl group を少し膨らませた群になります.

2.2 diagram automorphism の作用

さて, diagram automorphism で拡大した extended affine Weyl group の作用についてはどのように考えれば良いのか?

G/G_+ の自己同型には G の左作用とは別の型のものが存在します.

たとえば, ω が G の自己同型で G_+ を保つものであるならば, ω は自然に G/G_+ にも作用します. 実際,

$$aa' = bb', \qquad a, b \in G, \quad a', b' \in G_+$$

であるとき, 両辺に ω を作用させると,

$$\omega(a)\omega(a') = \omega(b)\omega(b'), \qquad \omega(a'), \omega(b') \in G_+$$

であるから, $[a] = [b] \in G/G_+$ に対して $[\omega(a)] = [\omega(b)] \in G/G_+$ が成立している. よって, $x = [a] \in G/G_+$ に対して $\omega(x) = [\omega(a)]$ と ω の G/G_+ への作用を定めることができる.

たとえば, G, G_+ がそれぞれ

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n\bigl(\mathbb{C}((z^{-1}))\bigr),$$
$$\mathfrak{g}_+ = \{\, A(z) \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}[z]) \mid \text{A(0) is weakly upper-triangular} \,\}$$

に対応する Lie 群であるとき, ω を Chevalley generators の添字を 1 つずらす変換 (diagram automorphism) に対応する G の自己同型であるとすれば上の条件は満たされています.

よって, G_+ を principal gradation の non-negative part に対応する SL_n の loop 群の subgroup であるとすれば, Chevalley generators の添字を 1 つずらす diagram automorphism が G/G_+ にも自然に作用します.

上では SL_n の loop 群で説明しましたが, 一般の場合も G_+ を principal gradation の non-negative part に対応する subgroup に取っておけば, 任意の diagram automorphism が G_+ を保ち, G/G_+ への自然な作用を定めます.

以下, この状況を仮定します.

さて, これで diagram automorphism ω が G/G_+ に自然に作用するという状況が得られました. あとは, この ω の作用がフローの無限小生成元の作用と可換であるかまたは $\mathfrak{p}$ の作用を normalize していれば, 新たな “symmetry” が得られたことになります.

ω は $x(t)$ に次のように作用します:

$$\omega(x(t)) = \exp\left(\sum t_i \omega(\Lambda_i)\right) \omega(x(0)).$$

よって, ω の作用が $\mathfrak{p} = \bigoplus \mathbb{C}\Lambda_i$ を保てば ω は “symmetry” です.

$\mathfrak{p}$ が homogeneous Heisenberg subalgebra の positive part であるときには $\omega(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ は常に成立しているし, それ以外の場合には ω と $\mathfrak{p}$ の取り方の組み合わせが適切であればやはり $\omega(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ が成立しています. たとえば, $\mathfrak{sl}_n$ の場合に

$$\omega(E_i) = E_{i-1}, \quad \omega(F_i) = F_{i-1}, \quad \omega(H_i) = H_{i-1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

と ω が定められており,

$$\Lambda = E_0 + E_1 + \cdots + E_{n-1}$$

と Λ が定められているならば,

$$\omega(\Lambda) = \Lambda$$

が成立しています. このことから ω が Λ と可換な元からなる principal Heisenberg subalgebra の positive part を保つことがわかる.

2.3 戸田階層の場合

戸田階層の場合は前節の G, G_+ として, $\mathbb{C}$ 上の reductive 群 G に対する

$$D = G\big(\mathbb{C}((z^{-1}))\big) \times G\big(\mathbb{C}((z))\big),$$
$$D_+ = \{\, (b, b) \mid b \in G(\mathbb{C}[z, z^{-1}]) \,\}$$

を考えます. D に作用する diagram automorphism として D_+ を保つものを考えなければいけません. D_+ の元は (b, b) の形をしているので, D の左右の 2 つの成分に同時に同じような diagram automorphism を作用させないと, G_+ が保たれません.

たとえば, $G = SL_n$ の場合は, $G(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$ に作用する前節の最後の ω を考え, それらを D の左右の成分に自然に拡張したもの $\omega \times \omega$ を考えれば D の自己同型で D_+ を保つものが得られます:

$$(\omega \times \omega)(x, y) = (\omega(x), \omega(y)) \qquad ((x, y) \in D).$$

もしも ω の作用がある a によって

$$\omega(x) = axa^{-1}, \quad \omega(y) = aya^{-1} \qquad ((x, y) \in D)$$

と書けていれば, 形式的に $g = xy^{-1}$ と置くとき,

$$\omega(x)\omega(y)^{-1} = axy^{-1}a^{-1} = aga^{-1}$$

と書けます. この等式の右辺に登場する $g = xy^{-1}$ は戸田場を double の群ではなく, 1 つの群で定式化する場合に登場する g です. (注意: D の左右の成分は z の巾が無限に伸びる方向が異なるので, $(x, y) \in D$ に対する $x^{-1}y$ は実際には well-defined ではない.)

以下では面倒なので $G = SL_n$ の場合について考えましょう. ω は次のように定義されているとする:

$$\omega(E_i) = E_{i-1}, \quad \omega(F_i) = F_{i-1}, \quad \omega(H_i) = H_{i-1} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

$i = 1, \ldots, n-1$ に対する E_i, F_i, H_i は有限次元の $\mathfrak{sl}_n$ の Chevalley generators である. 具体的には,

$$E_i = E_{i,i+1}, \quad F_i = E_{i+1,i}, \quad H_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1} \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

と定義する. H_0 は

$$H_0 = E_{nn} - E_{11}$$

と定義される. E_0, F_0 の組の取り方には定数倍の不定性がある. (E_0 を γ 倍するとき F_0 は γ^{-1} 倍しなければいけない.) E_0, F_0 は次のように取れる:

$$E_0 = \gamma E_{n1} z, \qquad F_0 = \gamma^{-1} E_{1n} z^{-1}.$$

0 でない定数 γ の取り方によって ω は見かけ上異なる写像になる. たとえば,

$$\gamma = (-1)^{n-1}$$

と取るとき, $w = z^{1/n}$ と置き,

$$a = \begin{bmatrix} 0 & w^{-1} & & & \\ & 0 & w^{-1} & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & w^{-1} \\ (-w)^{n-1} & & & & 0 \end{bmatrix} = z^{-1/n} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ (-1)^{n-1} z & & & & 0 \end{bmatrix}$$

と置けば, $a \in SL_n(\mathbb{C}[w, w^{-1}])$ ($\det a = 1$ に注意せよ) であり,

$$\omega(X) = aXa^{-1} \qquad \bigl(X \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}[z, z^{-1}])\bigr)$$

が成立している. ω は $SL_n(\mathbb{C}[z, z^{-1}])$ の元の adjoint action では実現できないが, z の n 乗根 w を加えた $SL_n(\mathbb{C}[w, w^{-1}])$ の元 a の adjoint action では実現できる.

以上をまとめると, $G = SL_n$ の場合の戸田階層への diagram automorphism の作用は

$$(\omega(x), \omega(y)) = (axa^{-1}, aya^{-1})$$

と書け, 実際には well-defined ではないが, 形式的に $g = xy^{-1}$ と置くと, g には

$$\omega(g) = aga^{-1}$$

と作用することがわかる.

実際には D_- への作用の形に書き直さないと実用的ではないが, 以上によって本質的な部分に関する議論はかなり尽きていると思うがどうか?