ソリトン系の基本パターン Part 11

ソリトン系への Weyl 群の作用 (3)

黒木 玄

2003年10月18日最終更新[*]　(2003年10月9日作成)

目 次

1　Weyl 群縦作用の概略

どこまで参考になるかわからないが, 古典の場合に Weyl 群の縦作用がどういうものかについて説明する.

ソリトン系の基本は群全体へのある群の作用を Gauss 分解を用いて下三角と上三角への作用に誘導することである.

そこでまず G の Gauss 分解の仕方を固定する:

$$G_- \times G_+ \hookrightarrow G, \qquad (W, Z) \mapsto X = W^{-1}Z.$$

たとえば $G = GL_m$ ならば G_- は対角成分がすべて 1 であるような下三角行列のなす群に取り, G_+ は対角成分が可逆であるような上三角行列のなす群に取ることが多い. G が affine GL_m の場合にもその類似物を考えることが多い. (ここで述べていることは単に principal gradation による Gauss 分解を考えることが多いということ.)

次に Weyl 群を G に持ち上げたものを $\mathcal{W} \subset G$ と書くことにしよう. ($\mathcal{W}$ は Weyl 群を少し拡大した群になるが diagram automorphism は含まない. $\mathcal{W}$ への simple reflection r_i の持ち上げは $r_i^2 = 1$ を満たしていないが $r_i^4 = 1$ は満たしている.)

$\mathcal{W}$ は $X \in G$ に左および右からの積で自然に作用するが, その作用を Gauss 分解を経由して, W と Z の作用に書き直したものが古典の場合の Weyl 群の作用になっている. (私のノートの多くでは $X = W^{-1}Z$ は $g = g_-^{-1}g_+$ と書かれているが, ここでは野海の教科書に合わせて $X = W^{-1}Z$ と書くことにした.)

[*]微修正しただけ.

G として affine GL_m を取り, $\mathcal{W}$ の G への右からの積による作用を考えれば Noumi-Yamada の affine Weyl 群の作用が得られる. ($\mathcal{W}$ の G への左からの積を考えると別の Weyl 群作用が得られる.)

野海の教科書では Z への作用と $M = ZD(\epsilon)Z^{-1}$ への作用を強調した書き方になっている ($D(\epsilon)$ は対角行列). 野海の教科書の Z とこのノートの Z は同じものである.

実は形式的には X の Gauss 分解の結果 (W, Z) には $\mathcal{W}$ だけではなく G 全体が作用している. G 全体の作用を $\mathcal{W}$ に制限したものが Weyl 群の作用になっている. (結局のところソリトン系の理論は Gauss 分解を通して群作用を見るということで尽きている!)

$(W, Z) \in G_- \times G_+$ への $g \in G$ の 2 つの作用は以下の通り.

- $g \in G$ の $X = W^{-1}ZG$ への右からの積が誘導する作用 ρ_g:

$$\rho_g(W, Z) = (G_g(Z)W, \rho_g(Z)) = (G_g(Z)W, G_g(Z)Zg^{-1}) \qquad (g \in G).$$

ただし $G_g(Z)$, $\rho_g(Z)$ は次のように定義される:

$$Zg^{-1} = G_g(Z)^{-1}\rho_g(Z), \qquad G_g(Z) \in G_-, \quad \rho_g(Z) \in G_+.$$

これは Zg^{-1} の Gauss 分解であり, $Xg = W^{-1}Zg$ の Gauss 分解を与える:

$$Xg = W^{-1}Zg = WG_g(Z)^{-1}\rho_g(Z) = \bigl(G_g(Z)W\bigr)^{-1}\rho_g(Z).$$

- $g \in G$ の $X = W^{-1}ZG$ への右からの積が誘導する作用 σ_g:

$$\sigma_g(W, Z) = (\sigma_g(W), H_g(W)Z) = (H_g(W)Wg^{-1}, H_g(W)Z) \qquad (g \in G).$$

ただし $H_g(Z)$, $\sigma_g(Z)$ は次のように定義される:

$$gW^{-1} = \sigma_g(W)^{-1}H_g(W), \qquad \sigma_g(W) \in G_-, \quad H_g(W) \in G_+.$$

これは gW^{-1} の Gauss 分解であり, $gX = gW^{-1}Z$ の Gauss 分解を与える:

$$gX = gW^{-1}Z = \sigma_g(W)^{-1}H_g(W)Z = \sigma_g(W)^{-1}\bigl(H_g(W)Z\bigr).$$

欲しいのはこれらの作用の q 差分量子化である. 量子化された作用は適切な非可換函数環の内部自己同型で表現されていなければいけない. G 全体の作用を量子化するのが難しいならば $\mathcal{W}$ の作用だけでも量子化したい.

まず問題になるのは, G の上の函数環の q 差分量子化 $A_q(G)$ への Weyl 群の作用がどうなっているかである. しかも G が有限次元ではなく, 無限次元の場合が必要になる.

次に問題になるのは G への作用の Gauss 分解 $G_- \times G_+ \to G$ による $G_- \times G_+$ への引き戻しの量子化である. $G_- \times G_+$ は大雑把には G_+ の double である. Gauss 分解の結果で作用を見るということは G_+ の double $D(G_+)$ の上の函数環 (その q 差分量子化は非可換環になる) の上で作用を見るということと同じである.

群を上三角と下三角に分ける役目を果たしているのが classical r-matrix であった. 量子群を上三角と下三角に分ける役目を果たしているのが universal quantum R-matrix である. 上の Gauss 分解を用いた定式化は R-matrix を用いて量子化されることになるだろう (factorizable Hopf algebra の理論).

2　ソリトン階層との関係

前節の枠組みをソリトン階層もしくは戸田階層と見る場合には $(W,Z) \in G_- \times G_+$ への Heisenberg 部分群 $H_\pm \subset G$ の作用を考える．より正確に言えば $H_\pm$ は Heisenberg 部分群の上半分と下半分である．

$H\pm \subset G$ であり，G そのものの作用 ρ_g と σ_g が前節で定義された．$h_+ \in H_+$ の $(W,Z) \in G_- \times G_+$ への作用は $X = W^{-1}Z \in G$ への左からの積が誘導する σ_{h_+} の方で定義し，$h_- \in H_-$ の $(W,Z) \in G_- \times G_+$ への作用は $X = W^{-1}Z \in G$ への右からの積が誘導する ρ_{h_+} の方で定義する．

このように定義された $H_\pm$ の作用は**戸田階層**と呼ばれている．左からの Heisenberg 部分群 H_+ の作用が誘導する戸田階層の半分 $\{\sigma_{h_+}\}_{h_+\in H_+}$ は mKdV 階層などの**ソリトン階層**になっている．

σ_g と $\rho_{g'}$ は互いに可換なので，ソリトン階層 $\{\sigma_{h_+}\}_{h_+\in H_+}$ と ρ_g は可換になり，ρ_g の作用はソリトン階層の対称性を記述していることになる．g を Weyl 群 $\mathcal{W}$ に制限すれば Noumi-Yamada のケースが再現される．

一般に σ_g とソリトン階層 $\{\sigma_{h_+}\}_{h_+\in H_+}$ は可換ではないので，σ_g はソリトン階層の対称性を記述しているとは限らない．しかしもしも $gH_+g^{-1} \in H_+$ ならば σ_g はソリトン階層の拡張された意味での対称性を記述していると考えられる．この場合を考えると筧・菊地による「時間を反転させる Weyl 群作用」が再現される．(H_+ として homogeneous な Heisenberg 部分群を考えると Weyl 群の元 $g \in \mathcal{W}$ は $gH_+g^{-1} \subset H_+$ を満たしている.)

3　戸田階層の特殊解における W, Z の意味

G は affine Lie group であり，スペクトル・パラメーター z を含むとする．大雑把に G_- は z^{-1} の巾級数が含まれており，G_+ には z の巾級数が含まれているとする．

それに対応する戸田階層において $(W,Z) \in G_- \times G_+$ の W, Z はそれぞれ無限遠点 $z=\infty$ と原点 $z=0$ における「形式解」を記述している:

$$\hat{Y}_\infty(z) = W(z)z^A e^{\sum_{i>0} t_i\Lambda_i}, \qquad \hat{Y}_0(z) = Z(z)z^B e^{\sum_{i<0} t_i\Lambda_i}.$$

ここで A, B は Λ_i たちと可換な定数行列である．

戸田階層の代数幾何的な解の場合には $\hat{Y}_\infty(z)$, $\hat{Y}_0(z)$ はコンパクト Riemann 面とその上の line bundle に付随する Baker-Akhiezer 函数の無限遠点と原点での展開になる．

戸田階層の相似簡約は「$\hat{Y}_\infty(z)$, $\hat{Y}_0(z)$ が z に関して同じ線形常微分方程式を満足する」という条件によって定義される．戸田階層の相似簡約の解はモノドロミー保存方程式の解になっている．そのような解の場合には $\hat{Y}_\infty(z)$, $\hat{Y}_0(z)$ は射影直線上の原点と無限遠点のみに特異点を持つ有理接続の形式解になる．

もしも原点は確定特異点であり，無限遠点のみを不確定特異点だとみなしたければ，Heisenberg 部分群の作用として H_+ 部分しか考えないことにしなければいけない．そのとき $h_+ \in H_+$ の作用 σ_{h_+} は原点に確定特異点を持ち無限遠点のみに不確定特異点を持つ有理接続のモノドロミー保存変形を与えることになる．前節で説明したように σ_{h_+} と ρ_g $(g \in \mathcal{W})$ の作用は可換なので affine Weyl 群 $\mathcal{W}$ のモノドロミー保存系への作用が構成されることになる．

もしも以上の仕組みの q 差分量子化が得られたならば，何らかの量子線形 q 差分方程式のモノドロミー保存変形という見方も可能になるだろう．