戸田格子 Part 1
$N \times N$ の L 行列と 2×2 の L 行列の関係

黒木 玄

2002 年 1 月 15 日

目 次

1　周期的戸田格子の二種類の L 行列

N サイトの周期的戸田格子の L 行列には以下の 2 種類がある:

(1)　$N \times N$ の L 行列:

$$
L(z) = \begin{bmatrix}
p_1 & 1 & & & & {z'}^{-1} a_N \\
a_1 & p_2 & 1 & & & \\
& a_2 & p_3 & 1 & & \\
& & a_3 & \ddots & \ddots & \\
& & & \ddots & \ddots & 1 \\
z' & & & & a_{N-1} & p_N
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix}
z' = (-1)^N z, \\
a_i = e^{-q_i + q_{i+1}}, \\
a_N = e^{-q_N + q_1}, \\
\{q_i, p_j\} = \delta_{i,j}
\end{pmatrix}.
$$

(2)　2×2 の L 行列:

$$
l_i(w) = \begin{bmatrix} b_i & -e^{q_i} \\ e^{-q_i} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_i - w & -e^{q_i} \\ e^{-q_i} & 0 \end{bmatrix} \qquad (b_i = p_i - w).
$$

(3)　2×2 のモノドロミー行列:

$$
T(w) = l_N(w) \cdots l_2(w) l_1(w).
$$

以下, r 次の単位行列を E_r と書く.

定理 1.1 $\det[L(z) - wE_N] = -z^{-1}\det[T(w) - zE_2]$. $\square$

この定理は $N \times N$ の L 行列 $L(z)$ と 2×2 行列のモノドロミー行列 $T(w)$ から得られる保存量が等しいことを意味している.

$\det l_i(w) = 1$ より $\det T(w) = 1$ であることに注意すれば次の系が得られる.

系 1.2 $\operatorname{trace} T(w) = \bigl(\det[L(z) - wE_N]$ の z に関する定数項$\bigr)$. $\square$

左辺の $\operatorname{trace} T(w)$ は量子戸田格子の転送行列の古典極限である.

定理の証明は $L(z) - wE_N$ の行列式を戸田盛和著『非線型格子力学 (増補版)』(岩波書店) の 86 頁に書いてある行列式の漸化式を用いて計算することによって得られる. その概略を説明しよう.

$L(z) - wE_N$ の z に関する定数項を

$$
X = \begin{bmatrix}
b_1 & 1 & & & & 0 \\
a_1 & b_2 & 1 & & & \\
 & a_2 & b_3 & 1 & & \\
 & & a_3 & \ddots & \ddots & \\
 & & & \ddots & \ddots & 1 \\
0 & & & & a_{N-1} & b_N
\end{bmatrix}
\qquad (a_i = e^{q_{i+1} - q_i},\ b_i = p_i - w)
$$

と書くことにする[1].

戸田の本にある漸化式を用いると, モノドロミー行列

$$
T(w) = \begin{bmatrix} A(w) & B(w) \\ C(w) & D(w) \end{bmatrix}
$$

の行列成分を X の主余因子行列式で表わす公式が得られる:

$$
\begin{aligned}
A(w) &= & &\det X_{1,\dots,N} &&= \det X, \\
B(w) &= & -e^{q_1} &\det X_{2,\dots,N}, && \\
C(w) &= & e^{-q_N} &\det X_{1,\dots,N-1}, && \\
D(w) &= & -e^{q_1 - q_N} &\det X_{2,\dots,N-1} &&= -a_N \det X_{2,\dots,N-1}.
\end{aligned}
$$

ここで, $X_{i_1,\dots,i_m}$ は行列 X の (i_μ, i_ν) 成分を取り出して得られる $m \times m$ 行列である.

実際, 上の公式は戸田の本に書いてある次の漸化式から得られる:

$$
\begin{aligned}
\det X &= b_N \det X_{1,\dots,N-1} - a_{N-1} \det X_{1,\dots,N-2} \\
&= b_N \det X_{1,\dots,N-1} - e^{q_N}[e^{-q_{N-1}} \det X_{1,\dots,N-2}].
\end{aligned}
$$

[1] $L(z)$ の z に関する定数項 $X|_{w=0}$ はオープン戸田格子の L 行列である. よって, $\det X$ の w^i の係数はオープン戸田格子の保存量である.

この漸化式から $A(w), C(w)$ の公式の右辺の漸化式がただちに得られ, この漸化式を $X_{2,\dots,N}$ に適用すれば $B(w), D(w)$ の公式の右辺の漸化式が得られる. それらの漸化式を使えば帰納的に上の公式が証明される.

以上とは独立に行列式の簡単な操作で次を示せる:

$$\det[L(z) - wE_N] = \det X - a_N \det X_{2,\dots,N-1} - (z + z^{-1})$$

これと上の $T(z)$ の行列成分の公式を比べれば定理と系が出る.

X の行列式に関する漸化式は X の次数に関する 2 階の線形差分方程式である. その漸化式が 2 階であることと, 2×2 の L 行列表示が存在することは関係があることがわかった. 2 階の線形差分方程式は 2×2 行列を用いた 1 階の線形差分方程式に書き直せる. 実はその 2×2 行列として $l_i(w)$ が取れる.

注意 1.3 一般に行列式に関して n 階の漸化式が立つようなタイプの $N \times N$ の L 行列を取れば, 上と同様の手続きで $n \times n$ の L 行列が得られるはずである. □

2 二種類の L 行列の意味 (KdV 方程式の場合との類似)

前節では行列式の漸化式という視点から, 二種類 ($N \times N$ と 2×2) の L 行列の関係について説明した. この節では別のより本質的な見方について説明する.

KdV 方程式に関しても, 2 階のスカラー係数の L 作用素

$$L = \partial_x^2 - u(x) \qquad (\partial_x = \partial/\partial x)$$

と Drinfeld-Sokolov 流に 2×2 行列係数の L 作用素

$$l(w) = \partial_x - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ u(x) + w & 0 \end{bmatrix}$$

が取れるのであった. これらの関係は 2 階のスカラー係数の線形常微分方程式と 1 階の 2×2 行列係数の線形常微分方程式のあいだの関係に等しい. すなわち, f, $\partial f/\partial x$ を縦に並べたベクトル値函数を ψ と書くと, 次の 2 つの条件は互いに同値である:

1. $l(w)\psi = 0$,
2. $(L - w)f = 0$.

KdV 方程式における $l(w)$ と L のそれぞれの戸田格子における類似物は 2×2 の L 行列 $l_i(w)$ と $N \times N$ の L 行列 $L(z)$ になっている:

KdV 方程式	$\longleftrightarrow$	戸田格子
$l(w)$	$\longleftrightarrow$	$l_i(w)$
L	$\longleftrightarrow$	$L(z)$

この類似を確かめるために戸田格子における 2×2 の L 行列

$$l_i = l_i(w) = \begin{bmatrix} b_i & -e^{q_i} \\ e^{-q_i} & 0 \end{bmatrix} \qquad (b_i = p_i - w)$$

から得られる次の 1 階の行列係数線形差分方程式を考える:

$$\psi_{i+1} = l_i\psi_i, \qquad \psi_i = (-1)^i \begin{bmatrix} f_i \\ g_i \end{bmatrix}.$$

これを f_i に関する 2 階の線形差分方程式に書き直してみよう. f_i, g_i は次を満たしている:

$$-f_{i+1} = b_i f_i - e^{q_i} g_i, \qquad -g_{i+1} = e^{-q_i} f_i.$$

後者の式を用いて前者の式から g_i を削除すると,

$$-f_{i+1} = b_i f_i + e^{q_i - q_{i-1}} f_{i-1} = b_i f_i + a_{i-1} f_{i-1}$$

となる[2]. よって,

$$a_{i-1} f_{i-1} + b_i f_i + f_{i+1} = 0.$$

ここで, $l_{i+N} = l_i$ と仮定し, 次の準周期境界条件を考える:

$$\psi_{N+1} = z\psi_1.$$

(注意: これは $(T(w) - z)\psi_1 = 0$ と同値である.) このとき, $\psi_{i+N} = z\psi_i$ も成立するので,

$$f_{i+N} = z' f_i, \qquad z' = (-1)^N z.$$

よって,

$$\begin{aligned} &b_1 f_1 + f_2 + z'^{-1} a_N f_N = 0 && (i = 0 \text{ の場合より}), \\ &z' f_1 + a_{N-1} f_{N-1} + b_N f_N = 0 && (i = N \text{ の場合より}). \end{aligned}$$

以上をまとめると,

$$\begin{aligned} &b_1 f_1 + f_2 + z'^{-1} a_N f_N = 0, \\ &a_{i-1} f_{i-1} + b_i f_i + f_{i+1} = 0 \qquad (i = 2, \dots, N-1), \\ &z' f_1 + a_{N-1} f_{N-1} + b_N f_N = 0. \end{aligned}$$

[2] $(-1)^i f_i$ に関する漸化式は前節で説明した行列式 $\det X$ の漸化式に等しいことに注意せよ.

これを行列で書くと,

$$
\begin{bmatrix}
b_1 & 1 & & & & z'^{-1}a_N \\
a_1 & b_2 & 1 & & & \\
& a_2 & b_3 & 1 & & \\
& & a_3 & \ddots & \ddots & \\
& & & \ddots & \ddots & 1 \\
z' & & & & a_{N-1} & b_N
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix} z' = (-1)^N z, \\ b_i = p_i - w \end{pmatrix}.
$$

f_i を縦に並べたベクトルを f と書くと, この式は次のように書き直せる:

$$
(L(z) - w)f = 0.
$$

以上の計算をまとめることによって次の定理を得る.

定理 2.1 上で説明したように次のように仮定する:

$$
\begin{aligned}
& a_i = e^{q_{i+1}-q_i}, \quad b_i = p_i - w, \quad z' = (-1)^N z, \\
& \psi_i = (-1)^i \begin{bmatrix} f_i \\ g_i \end{bmatrix}, \quad g_i = -e^{-q_i} f_{i-1}, \\
& l_i = l_i(w) = \begin{bmatrix} b_i & -e^{q_i} \\ e^{-q_i} & 0 \end{bmatrix}, \quad l_{i+N}(w) = l_i(w), \quad T(w) = l_N(w) \cdots l_1(w), \\
& L(z) = \begin{bmatrix}
p_1 & 1 & & & & z'^{-1}a_N \\
a_1 & p_2 & 1 & & & \\
& a_2 & p_3 & 1 & & \\
& & a_3 & \ddots & \ddots & \\
& & & \ddots & \ddots & 1 \\
z' & & & & a_{N-1} & p_N
\end{bmatrix}, \quad
f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

このとき, 次の 2 つの条件は互いに同値である:

1. $\psi_{i+1} = l_i(w)\psi_i$ and $\psi_{N+1} = z\psi_1$ (i.e. $(T(w) - z)\psi_1 = 0$),
2. $(L(z) - w)f = 0$. $\square$

注意 2.2 l_i として,

$$
l_i = \begin{bmatrix}
* & * & \cdots & \cdots & * \\
* & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & * & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & * & 0
\end{bmatrix}
$$

の形の $n \times n$ 行列を取れば, 上と同様の計算が可能である. この方法で戸田格子の一般化が得られるはずである. □

注意 2.3 量子化する場合には 2×2 の $l_i(w)$ の方を用いた方が易しい. 4×4 の量子 R 行列を用いたいつものやり方で量子化できる. $N \times N$ の $L(z)$ の方での量子化のためには $N^2 \times N^2$ の量子 R 行列が必要になる. □

注意 2.4 Ruijsenaars-Toda 格子 (relativistic Toda lattice) の $l_i(w)$ は次のように取れる (Kuznetsov and Tsiganov, `hep-th/9402111`):

$$l_i(w) = \begin{bmatrix} [b_i] & -e^{q_i} \\ e^{-q_i} & 0 \end{bmatrix} \qquad (b_i = p_i - w).$$

ここで,

$$[x] = 2\sinh x = e^x - e^{-x}.$$

戸田格子の Poisson bracket を $l_i(w)$ で書き下すと rational r-matrix に関する Sklyanin bracket の関係式になる. それと同様に, Ruijsenaars-Toda 格子の Poisson bracket は trigonometric r-matrix に関する Sklyanin bracket の関係式になる. このことから, Ruijsenaars-Toda 格子は戸田格子の三角函数版であることがわかる.

Kuznetsov and Tsiganov が見付けた上の $l_i(w)$ は標準的な trigonometric r-matrix に関する Sklyanin bracket の関係式を満たしているが, Suris が見付けた Ruijsenaars-Toda 格子の $l_i(w)$ はそうではない. 非標準的な trigonometric r-matrix が必要になる.

よって, Kuznetsov and Tsiganov の $l_i(w)$ の量子化は Suris のそれよりも易しくなる. 実際, Kuznetsov and Tsiganov は Ruijsenaars-Toda 格子の量子化を詳しく調べている. □

問題 2.5 やるべき演習問題は $[x] = \theta_1(x)$ の場合に上の $l_i(w)$ がどのような関係式を満たしているかを調べることである. 楕円 r-matrix に関する Sklyanin bracket の条件を満たしているかもしれない. そのように単純になってないとしても, 「戸田格子の楕円函数版はあるか?」という問題には意味があるだろう. もしかしたら, 楕円の場合は "vertex model version" だけではなく "face model version" も考える必要があるかもしれない. 文献は? □

注意 2.6 A 型以外の戸田格子を 2×2 行列で表示する方法は次の文献に書いてある:

- V. B. Kuznetsov and A. V. Tsyganov, Infinite series of Lie algebras and boundary conditions for integrable systems, J. Soviet Math. 59 (1992) No.5, 1085–1092.

A 型以外の場合は所謂 reflection euqation の話になる. A 型の戸田格子の基本文献は次の Sklyanin の論文である:

- E. K. Sklyanin, The quantum Toda chain, Non-linear Equations in Classical and Quantum Field Theory, Lecture Notes in Physics 226 (1985), 196–233.

- E. K. Sklyanin, Baecklund transformations and Baxter's Q-operator, nlin.SI/0009009.

後者の第 2.5 節に戸田格子の $N \times N$ 表示と 2×2 表示の関係に関する詳しい説明がある. □

注意 2.7 この節では KdV 方程式と戸田格子の類似について説明したが, KdV 方程式と戸田格子のあいだには本質的な違いがある.

戸田格子の $l_i(w)$ には q_i と p_i のみが含まれ, i 以外の添字に関する従属変数は含まれてない. よって, $i \neq j$ のとき $l_i(w)$ と $l_j(w)$ の行列成分は互いに (Poisson) 可換である. このような模型は ultralocal であると言う.

例えば, 戸田格子の他に Heisenberg XYZ 模型も ultralocal である.

この格子上の模型に関する定義の連続極限によって, 連続の場合の ultralocality を定義する. すなわち, Poisson bracket に $\delta(x-y)$ だけではなく, その導函数が登場する模型は local だが, ultralocal ではない.

実は KdV 方程式は non-ultralocal な模型の典型例であり, この点は戸田格子の場合とは本質的に異なる.

Non-ultralocal な模型の Poisson bracket を書き下すためには, Sklyanin bracket よりも一般的な quadratic Poisson bracket の理論が必要になる.

一般化された quadratic Poisson bracket の理論については 2001 年 12 月 17-21 日にやった講義もしくは

```
http://www.math.tohoku.ac.jp/~kuroki/Hyogen/
```

にある「古典 r 行列入門」を参照せよ.

Sklyanin bracket の量子化は量子 R 行列に関する RLL = LLR 関係式であるが, 一般的な quadratic Poisson bracket の量子化はより複雑になる. この点に関する基本文献は次の Parmentier の論文である:

- S. Parmentier, On coproducts of quasi-triangular Hopf algebras, St. Petersburg Math. J., Vol.6 (1996), No.4, 879–894.

Non-ultralocal な Poisson bracket の最も易しい例は

$$\{x_i, x_{i+1}\} = c_i x_i x_{i+1} \qquad (c_i \text{ は定数, 他の組み合わせは可換})$$

である. このような Poisson bracket は実際に Faddeev-Volkov の仕事に現われる.

Faddeev-Volkov の仕事の本質を理解する場合には, non-ultralocality から来る難しさと, それ以外の部分を注意深く分離することが有効だと思われる. □