W-algebraについて

東北大学理学部数学教室　黒木　玄　(Gen Kuroki)

$\mathfrak{g}$ は $\mathbb{C}$ 上の finite-dimensional simple Lie algebra とし、$\widehat{\mathfrak{g}}$ はそれに対する affine Lie algebra とする:

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K.$$

このとき、$\widehat{\mathfrak{g}}$ の universal enveloping algebra のある graded completion を $\widehat{U}$ と表わし、$k \in \mathbb{C}$ に対して、$\widehat{U}$ を両側イデアル $(K-k)$ で割ってできる商環を $\widehat{U}_k$ と表わす。このとき、$\widehat{\mathfrak{g}}$ が $\mathrm{A}_n^{(1)}$, $\mathrm{B}_n^{(1)}$, $\mathrm{C}_n^{(1)}$ 型の場合に ([H])、level が critical すなわち $k = -h^\vee$($h^\vee$は dual Coxeter number) のとき、$\widehat{U}_k$ が十分多くの central elements を持つことが証明されている。更に、その結果を用い、上の型の $\widehat{\mathfrak{g}}$ に対する Kac-Kazhdan conjecture が証明されている。我々は、$\widehat{U}_{-h^\vee}$ の center もしくはその適切な subalbegra でもって、classical W-algebra を定義する。このとき、classical W-algebra には自然に Poisson algebra structure が入る。したがって、本来の quantum W-algebra は、そのパラメーター k に関する変形 (Sugawara operator の algebara) として得られる筈のものである。

一方、より一般の affine Lie algebra に対する Kac-Kazhdan conjecture は、現在では、Wakimoto modules (affine Lie algebra の boson 表示、[W], [FF], [K1,2]) を用いることによって証明できることが知られている。

有限次元の場合には、$\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ の center は、Harish-Chandra 同型によって、Cartan subalgebra から生成される多項式の Weyl 群不変式環と同型になることが知られている。Harish-Chandra 同型の証明には、Verma modules の理論が有効に使われる。そこで、$\widehat{U}_{-h^\vee}$ に対する Harish-Chandra 同型の類似が、Wakimoto modules を利用して得られないかどうか考えてみよう。

まず、affine Lie algebra の boson 表示について簡単に説明する。(詳しいことは、[K1,2] を見られたい。) $\mathfrak{g}$ の positive roots 全体を Δ_+ と表わし、$\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra を $\mathfrak{h}$ と表わす。$\kappa \in \mathbb{C}$ に対して、$\mathcal{A}_\kappa$ は

$$\{\, \delta_\alpha[m], x_\alpha[m], p_i[m] \mid \alpha \in \Delta_+,\ i = 1, \cdots, \dim \mathfrak{h},\ m \in \mathbb{Z} \,\}$$

から生成され、以下の交換関係によって定義される algebra であるとする:

$$\begin{aligned}
&\big[\, \delta_\alpha[m], x_\beta[n] \,\big] = \delta_{\alpha,\beta}\delta_{m+n,0}, \\
&\big[\, p_i[m], p_j[n] \,\big] = \kappa(H_i|H_j) m \delta_{m+n,0}, \\
&(\text{他の組み合わせの commutator}) = 0.
\end{aligned}$$

すなわち、$\mathcal{A}_\kappa$ は無限次元空間上の微分作用素環である。ここで、$(\,.\,|\,.\,)$ は $\mathfrak{g}$ の normalized Killing form であり、$\{\, H_i \,\}$ は $\mathfrak{h}$ の basis である。$\mathcal{A}_\kappa$ のある graded completion を $\widehat{\mathcal{A}}_\kappa$ と書く。$\widehat{U}$ から $\widehat{\mathcal{A}}_\kappa$ への algebra homomorphism π で、$\pi(K) = \kappa - h^\vee$ を満たし、種々の良い性質を持つものが構成できる。$\widehat{\mathcal{A}}_\kappa$ の自然な表現と

して Fock spaces が定義され、π を通して、affine Lie algebra $\widehat{\mathfrak{g}}$ が Fock spaces の上に定まるのである。これが、所謂 Wakimoto modules である。なお、この Fock spaces は、直感的には、dimension も codimension も無限次元のある subspace 上に台を持つ超函数の空間として定義される。

注意すべきことは、$\kappa = 0$ の場合と $\kappa \neq 0$ の場合とでは、$\widehat{\mathcal{A}}_\kappa$ の center の大きさが全く違うということである。$\widehat{\mathcal{A}}_\kappa$ の center は、$\kappa = 0$ のときは $\{\, p_i[m] \mid i = 1, \cdots, \dim \mathfrak{h},\, m \in \mathbb{Z} \,\}$ から生成され、$\kappa \neq 0$ のときは $\{\, p_i[0] \mid i = 1, \cdots, \dim \mathfrak{h}, \,\}$ から生成される。これに呼応して、π を通して、条件 $k = -h^\vee$ と 条件 $\kappa = 0$ が対応していることにも注意して欲しい。これらのことから容易に予想される通り、以下を示せる。

上の π は $\widehat{U}_{\kappa - h^\vee}$ から $\widehat{\mathcal{A}}_\kappa$ への homomorphism を与えるが、それを π_κ と書くことにする。このとき、次が成り立つ:

$$\pi_0(\text{center of } \widehat{U}_{-h^\vee}) \subset (\text{center of } \widehat{\mathcal{A}}_0).$$

すなわち、$\widehat{U}_{-h^\vee}$ の center の元は $\widehat{\mathcal{A}}_0$ の中では $\{\, p_i[m] \,\}$ の式で表わされる。

この事実を元にして、classical W-algebra = center of $\widehat{U}_{-h^\vee}$ の構造、さらには、quantum W-algebra の構造を調べるということが 1 つの目標である。Affine Lie algebra の boson 表示が、Knizhnik-Zamolodchikov 方程式の解の多変数超幾何型積分表示を与えるように、W-algebra の理論にもなにがしかの面白い応用がある筈である。しかし、これ以上の話はまだ未完成であるので、これからの研究に期待されたい。

References

[FF] Feigin, B., Frenkel, E.: Representation of affine Kac-Moody algebras, bosonization and resolutions. In: Brink, L., Friedan, D., Polyakov, A.M. (eds.) Physics and Mathematics of Strings. Memorial volume for Vadim Knizhnik, pp. 271-316. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific 1990

[H] Hayashi, T.: Sugawara operators and Kac-Kazhdan conjecture. Invent. math. **94**, 13-52 (1988)

[K1] Kuroki, G.: Fock space representations of affine Lie algebras and integral representations in the Wess-Zumino-Witten models. Commun. Math. Phys. **141**, 511-542 (1991)

[K2] Kuroki, G: Fock space representations of twisted affine Lie algebras. 数理解析研究所講究録 **778**, 42-49 (1992)

[W] Wakimoto, N.: Fock representations of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$. Commun. Math. Phys. **104**, 605-609 (1986)