共形場理論と保型形式論

黒木 玄 (Gen KUROKI) *

1 序

昔[1]、何も知らない私は次のような質問をしたことがある:

「Riemann 面の上の共形場理論の $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 上の類似物[2]は何か?」[3]

そのときには解答を得ることができなかった。しかし、この問の答は非常に簡単である:

「それは古くから研究されている保型形式論である」

この解説文の目的はこのことを説明することである[4]。

2 Riemann 面と代数体の類似について

まず、Riemann 面について復習する。Riemann 面とは 1 次元複素多様体のことである。すなわち、$\mathbb{C}$ の開部分集合を “綺麗に”[5] 貼り合わせてできたものを Riemann 面と呼ぶ。Riemann 面 R が compact ならば、R 上の有理型函数全体のなす体 K は $\mathbb{C}$ 上の一変数代数函数体 (すなわち一変数有理函数体 $\mathbb{C}(x)$ の有限次拡大体) に同型になることが知られている。この K を $\mathbb{C}(R)$ と書き、Riemann 面 R の代数函数体と呼ぶ[6]。さ

*東北大学理学部数学教室 (E-mail address: kuroki@math.tohoku.ac.jp)

[1]私が大学院博士課程前期の 1 年生のとき (今から約 5 年前)

[2]より一般には代数体 (すなわち有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体) もしくは有限体上の曲線に対する類似物を考えるのが自然である。$\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Q}$ の場合に対応しているが、無限素点も考慮しなければいけないので、$\overline{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}}$ と書くべきかもしれない。

[3]この質問は「共形場理論が $\mathbb{Z}$ 上の構造を持つか?」とは一応異なる。その方向も「共形場理論は数論的幾何学の構造を持つか?」に関係していて興味深い。残念ながらこの解説ではこれ以上その方向に触れることはできない。

[4]以下、イイカゲンなことも書く予定である。不愉快に感じられる方のために、前もってお詫びしておきたい。特に初学者の方は、以下に書いてあることを丸飲みしてしまわないよう注意されたい。

[5]ここで “綺麗に” という言葉は、双正則写像で貼り合わせた結果が Hausdorff 空間になることを意味している。一般に、何をどのカテゴリーでどのように貼り合わせるか決めるごとに、一つの “多様体概念” が定まる。例: variety, scheme, algebraic space, algebraic stack, $\cdots$.

[6]例えば、R が 2 次元球面に同相ならば $K \simeq \mathbb{C}(x)$ が成立し、R が 2 次元トーラスと同相ならばある定数 g_2, g_3 が存在して $K \simeq \mathbb{C}(x, \sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3})$ が成立する。前者は genus 0 であり、後者は genus 1 である。なお、genus は Riemann 面の位相不変量であり、一般型の Riemann 面の genus は 2 以上である。

らに、これより、R は射影代数曲線になることが導かれる。すなわち、R は代数方程式によって定義された複素射影空間 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ の[7]中のある曲線 C に同型になる。実は、以上の対応によって、Riemann 面 R と 複素一変数代数函数体 K と (非特異) 複素射影代数曲線 C の三つの対象は互いに一対一に対応している。この対応によって、R および C の有限分岐被覆と K の有限次拡大体は互いに一対一に対応している[8]。すなわち、($\mathbb{R}$ 上の) 通常の解析学の道具が自由に使える世界 R と代数幾何の道具が使える世界 C と体 K が三位一体[9]

$$\text{Riemann 面} \leftrightarrow \text{一変数代数函数体}/\mathbb{C} \leftrightarrow \text{非特異射影代数曲線}/\mathbb{C}$$

を形作っているのである。

さて、上で述べたように、Riemann 面[10]は $\mathbb{C}$ 上の代数曲線とみなせる。よって、任意の体 k に対して[11]、k 上の代数曲線 C/k は[12]Riemann 面の基礎体 k における類似物である。Riemann 面の代数函数体の類似物は、C/k の代数函数体 $\mathrm{k}(C)/\mathrm{k}$ である。ところが、任意の基礎体上では、$\mathbb{R}$ 上の通常の解析学を用いることができない。しかし、基礎体 k が有限体 $\mathbb{F}_q$ である[13]場合には、通常の解析学の代わりに、数論的方法を用いることができる。すなわち、有限体上の代数幾何は有限的・離散的という性質を持つので、“個数を数え上げるという方法” が使えるのである[14]。したがって、特に基礎体を有限体に取って考えることは、Riemann 面の理論[15]と代数体の数論[16]の類似をはっきりさせるために役立つ。

ところで、数論における最も基本的な研究対象は代数体であると言って良いであろう[17]。代数体 $K/\mathbb{Q}$ は、数論における Riemann 面の代数函数体に類似している[18]。Riemann 面上の点の概念の代数体 $K/\mathbb{Q}$ における類似物は、体 K から局所体 (すなわち

[7]ここでは、N 次元複素射影空間に対して $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ という記号を使ったが、正しい記号法は $\mathbb{C}\mathrm{P}^N$ であると主張する人もいる (^_^;)。

[8]色々な世界の間の対応は対象の間の射も込めて、カテゴリーの間の同値としてとらえなければならない。

[9]この方向の “三位一体” については名著 [岩澤] が詳しい。

[10]以下、基本的に compact な Riemann 面のみを考える。

[11]体を表わすのに F (field の F) を使うか K (Körper の K) を使うか意見が分かれるところである (^_^;)。しかし、基礎体を小文字の f で表わした文献を見たことはない。やはり、Körper の K に従うべきか?

[12]C/k は C over k と読む。記号 C/k は構造射 $C \to \operatorname{Spec}\mathrm{k}$ が指定されていることを意味する。

[13]ここで、$\mathbb{F}_q$ は q 個の元を持つ有限体を表わす。q は標数 p の巾になる。

[14]例えば、そのことを利用して有限体上の代数多様体の合同ゼータ函数が定義される。

[15]より一般には、Kähler 多様体の理論

[16]より一般には、数論的多様体の理論

[17]さらに、素体上有限生成の体まで含めるのが自然である。そこまで一般化しておくと、数論的幾何学と $\mathbb{F}_q$ 上の代数幾何学の両方が、そこに含まれてしまう。

[18]例えば、代数体の有限次拡大 L/K は、Riemann 面の有限分岐被覆の類似物であると思うことができる。Hilbert の絶対類体論は Riemann 面の有限不分岐 Abel 被覆の理論の類似であり、高木の類体論は Riemann 面の有限分岐 Abel 被覆の理論の類似である。しかし、Artin の reciprocity map は Frobenius map を用いて定義されているので、Riemann 面における類似物が何であるかは難しい問題である。この方向で、類体論に興味のある方は、[Serre] に書いてある曲線の類体論の代数幾何学的な解説を参照されたい。

非離散局所コンパクト位相体) への稠密な埋め込み $K \hookrightarrow K_{\mathfrak{p}}$ であり、K の素点と呼ばれている。

例えば、$\mathbb{Q}$ の素点は、素数 $p = 2, 3, 5, 7, 11, \cdots$ に対する有限素点 $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ もしくは無限素点 $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ のどれかに一致する[19]。ここで、p 進体 $\mathbb{Q}_p$ は形式的 Laurent 級数体

$$\mathbb{C}((\xi_p)) = \Big\{ \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i {\xi_p}^i \;\Big|\; a_i \in \mathbb{C} \text{ for any } i \in \mathbb{Z} \text{ and } a_i = 0 \text{ for } i \ll 0. \Big\}$$

の類似物であり[20]、集合としては次のように表わされる:

$$\mathbb{Q}_p = \Big\{ \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i p^i \;\Big|\; a_i = 0, 1, \cdots, p-1 \text{ for any } i \in \mathbb{Z} \text{ and } a_i = 0 \text{ for } i \ll 0. \Big\}.$$

$\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Q}_p$ の中での閉包を $\mathbb{Z}_p$ と書く。$\mathbb{Z}_p$ は形式巾級数体 $\mathbb{C}[[\xi_p]]$ の類似物である。$\mathbb{Q}$ は genus 0 の Riemann 面すなわち複素射影直線 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の代数函数体 $\mathbb{C}(x)$ に似ている。点 $p \in \mathbb{C}$ における有理函数体 $\mathbb{C}(x)$ の $\mathbb{C}((\xi_p))$ への埋め込みは $\xi_p = x - p$ に関する Laurent 展開によって与えられる。Laurent 展開の $\mathbb{Q}$ における対応物は、p 進展開 $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ である。なお、$\mathbb{C}(x)$ の無限遠点 ∞ における $\mathbb{C}((\xi_\infty))$ への埋め込みは $\xi_\infty = x^{-1}$ に関する Laurent 展開によって与えられる。

一般に、代数体 $K/\mathbb{Q}$ の素点の全体も、可算個の有限素点と有限個の無限素点に分類されることが知られている。ここで、K の無限素点とは K の $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ への像が稠密な埋め込みのことで、K の有限素点とはその極大整数環 $\mathfrak{o}_K$ の素イデアル $\mathfrak{p}$ における K の $\mathfrak{p}$ 進完備化のことである。Riemann 面上の点 p における局所環 $\mathcal{O}_{R,p}$ の (唯一の) 極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して、代数函数体 $K = \mathbb{C}(R)$ の $\mathfrak{m}$ 進完備化を $\widehat{K}_p$ と書き、$O_{R,p}$ の $\mathfrak{m}$ 進完備化を $\widehat{\mathcal{O}}_p$ と書くことにする[21]。

さて、以上によって、もう一つの三位一体

$$\text{Riemann 面} \longleftrightarrow \text{有限体上の代数曲線} \longleftrightarrow \text{代数体}$$

が明らかになった[22]。始めに挙げた素朴な問「Riemann 面の上の共形場理論の $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ 上の類似物は何か?」は、この三位一体のもとで、次のように言うことができる:

「代数体や有限体上の曲線における共形場理論の類似物は何か?」

[19] 素数 p に対して p 進体 $\mathbb{Q}_p$ は次のように定義される。有理数 a が $a = p^n b/c$ ($n, b, c \in \mathbb{Z}$ かつ b,c は p と素) と表わされるとき、$|a|_p := p^{-n}$ と置く。ただし、$a = 0$ のときは $|a|_p := 0$ と置く。この $|\cdot|_p$ は p 進付値と呼ばれている。このとき、$d_p(a, a') := |a - a'|_p$ ($a, a' \in \mathbb{Q}$) は $\mathbb{Q}$ 上の距離を与え、$\mathbb{Q}$ はその距離に関して位相体をなす。この d_p に関する $\mathbb{Q}$ の完備化を $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ と書く。$\mathbb{Q}_p$ を p 進体と呼び、$\mathbb{Q}_p$ の元を p 進数と呼び、$\mathbb{Q}$ の $\mathbb{Q}_p$ への埋め込み写像を p 進展開と呼ぶ。

[20] ここで、ξ_p は不定元である。

[21] 点 p における局所座標系 ξ_p を $\xi_p(p) = 0$ を満たす様に取ると、同型 $\widehat{K}_p \simeq \mathbb{C}((\xi_p))$, $\widehat{\mathcal{O}}_p \simeq \mathbb{C}[[\xi_p]]$ が成立する。$\widehat{K}_p$ の $\mathfrak{m}$ 進位相は $\mathbb{C}$ 上 locally linearly compact な線型位相をなす。このことは、代数体 K に対する $\mathfrak{p}$ 進体 $K_{\mathfrak{p}}$ (例えば $\mathbb{Q}$ に対する p 進体 $\mathbb{Q}_p$) や $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ が locally compact になることの類似である。線型位相については [Lefschetz] が詳しいのだが、岩波の数学辞典にも書いてある。

[22] ここでは、"一次元" の場合に限って類似を見ている。もちろん、高次元でも類似は存在する (数論的幾何学)。

この解説文の目的は、この素朴な問の解答が保型形式論であることを説明することである。逆に言えば、古くから研究されている保型形式の理論の Riemann 面における類似物は共形場理論なのである。以下においては、Riemann 面と $\mathbb{Q}$ の場合に限って類似を解説する[23]。

3 共形場理論のアデール的な定式化

まず、Riemann 面上の共形場理論の話から始める[24]。群 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ に対する[25] Riemann 面 R 上の Wess-Zumino-Witten model (WZW 模型) の場合に限って解説を試みることにする[26]。ここで、$G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ はもちろん行列式が 1 の複素 2 次正方行列全体のなす Lie 群である。その Lie 環[27] $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{Lie}\, G$ は trace が 0 の複素 2 次正方行列全体に $[A, B] := AB - BA$ によって Lie 環の構造を入れたものになる。$\mathfrak{g}$ 上の非退化な不変内積を $(X|Y) := \mathrm{Tr}(XY)$ for $X, Y \in \mathfrak{g}$ によって定める。$\mathfrak{g}$ の basis E, F, H を以下のように取る:

$$E := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

$\mathfrak{n}_+ := \mathbb{C}E$, $\mathfrak{n}_- := \mathbb{C}F$, $\mathfrak{h} := \mathbb{C}H$ と置く。$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra (maximal abelian subalgebra) であり、$\mathfrak{n}_\pm$ は $\mathfrak{g}$ の maximal nilpotent subalgebra である。$\mathfrak{h}$ の dual space $\mathfrak{h}^*$ の元を $\mathfrak{g}$ の weight と呼ぶ。非負の整数 k に対して、P_+, P_k を次のように定める:

$$P_+ := \{\, \lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(H) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \,\}, \quad P_k := \{\, \lambda \in P_+ \mid \lambda(H) \leq k \,\}. \tag{3.2}$$

P_k の元を level k の dominant integral weight と呼ぶ[28]。

[23] 有限体上の曲線における類似物については [Ohio] を参照せよ。

[24] 共形場理論には chiral theory と non-chiral theory の 2 種類がある。chiral theory では holomorphic part のみを扱う。物理学的な汎函数積分の方法で得られるのは non-chiral theory の方である。holomorphic part と anti-holomophic part を chiral theory で記述しておき、それらを組み合わせることによって、non-chiral theory を作ることができると広く信じられている。最近話題の mirror symmetry と super conformal field theory の関係を述べるためには non-chiral theory が必要である。しかし、この解説では chiral theory のみを扱う。

[25] $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ を正しくは $\mathrm{SL}(n; \mathbb{C})$ と書くべきであると主張する人もいる。$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ とは微妙に違うところに御注目願いたい (^_^;)。

[26] より一般に、G は $\mathbb{C}$ 上の任意の単連結な複素単純 Lie 群であるとして良い。その場合は Riemann 面上の trivial group bundle $R \times G \to R$ に対して共形場理論を定式化していることになる。さらにより究極的な定式化を得るためには、Riemann 面を安定曲線 C に、Lie 群 G を C 上の (適切な条件の付いた) 群概型 $\mathcal{G}/C$ に一般化し、さらにそれらの族を考えねばならない。安定曲線の局所普遍族上の WZW 模型については [TUY] を参照されたい。古典 r 行列は Riemann 面上の特別な non-trivial group bundle から得られることが知られている。

[27] Lie 代数と呼ぶ人もいる。しかし、the Virasoro algebra のことを Virasoro 代数と呼ぶ人はいるが Virasoro 環と呼ぶ人はいない。やはり、Lie 代数と呼ぶべきか?

[28] 任意の単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対しては、非退化な不変内積を条件 $(\theta|\theta) = 2$ によって正規化しておき (θ は $\mathfrak{g}$ の highest root)、$P_k := \{\, \lambda \in P_+ \mid (\lambda|\theta) \leq k \,\}$ と定義する。

さて、Lie 群 $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ に対する WZW 模型の解説をしよう。一般に、共形場理論の模型は conformal block の定義を与えることによって構成される[29]。共形場理論の一つの目的は conformal block を調べることである。WZW 模型の conformal block を定義するためには以下の data が必要である:

$$(3.3)\qquad \text{Riemann 面 } R \text{ 上の互いに異なる有限個の点 } p_1, \cdots, p_N \in R;$$

$$(3.4)\qquad \text{非負の整数 } k;$$

$$(3.5)\qquad \text{level } k \text{ の dominant integtral weights } \lambda_1, \cdots, \lambda_N \in P_k.$$

アデールによる定式化について説明するためには、Riemann 面の各点に対して、"局所的な表現" を対応させておかなければならない。ここでは、"局所的な表現" を無限次元 Lie 環の言葉を使って与えることにする[30]。始めに affine Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ を定義しよう。ベクトル空間としては、

$$\widehat{\mathfrak{g}} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}((\xi)) \oplus \mathbb{C}\,\mathbf{k} \tag{3.6}$$

と定義し、Lie 環の構造を

$$[X \otimes f + a\,\mathbf{k}, Y \otimes g + b\,\mathbf{k}] := [X, Y] \otimes fg + (X|Y) \operatorname*{Res}_{\xi=0}(df \cdot g)\,\mathbf{k} \tag{3.7}$$

によって入れる[31]。ここで、$X, Y \in \mathfrak{g}$, $f, g \in \mathbb{C}((\xi))$, $a, b \in \mathbb{C}$, $df(\xi) := f'(\xi)d\xi$ ($'$ はξ による微分) であり、留数 $\operatorname*{Res}_{\xi=0}$ を次のように定義する:

$$\operatorname*{Res}_{\xi=0}\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i \xi^i d\xi\Big) := a_{-1} \qquad (a_i \in \mathbb{C}). \tag{3.8}$$

$\mathbb{C}((\xi))$ を Laurent 多項式環 $\mathbb{C}[\xi, \xi^{-1}]$ で置き換えれば、$\widehat{\mathfrak{g}}$ は $\mathrm{A}_1^{(1)}$ 型の Kac-Moody Lie 環に同型になる[32]。これによって、共形場理論では、Kac-Moody Lie 環の表現論を利用できるのである[33]。$\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[\xi]]$ は自然に $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Lie subalgebra をなす。$X \in \mathfrak{g}$ と $X \otimes 1 \in \widehat{\mathfrak{g}}$ を同一視することによって、$\mathfrak{g}$ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Lie subalgebra とみなす。$\lambda \in P_k$ に対して、性質

$$(\mathfrak{g} \otimes \xi\mathbb{C}[[\xi]] + \mathfrak{n}_+)v_{k,\lambda} = 0, \quad Hv_{k,\lambda} = \lambda(H)v_{k,\lambda} \quad (\text{最高ウェイト条件}); \tag{3.9}$$

$$(F \otimes \xi^{-1})^{k-\lambda(H)+1} v_{k,\lambda} = 0 \qquad (\text{可積分条件}). \tag{3.10}$$

---

[29] これは、chiral theory の定義である。任意の non-chiral theory は holomorphic part と anti-holomorphic part の conformal blocks を組み合わせることによって構成されると信じられている。ところで、"conformal block" の良い訳語はないであろうか? 直訳して "共形片" などとしても今一感じが出ない。

[30] 共形場理論は、有限体上の場合と違って $\mathbb{C}$ 上 (より一般には標数 0 の代数閉体上) の理論なので、無限次元 Lie 環の理論が非常に有効に利用される。

[31] $\mathrm{Res}_{\xi=0}(df \cdot g)$ は $\mathbb{C}((\xi))$ に対する "inifinitesimal tame symbol" である。[Garland] の §12 を見よ。

[32] $\mathfrak{g}$ が X_n 型ならば $\widehat{\mathfrak{g}}$ は $\mathrm{X}_n^{(1)}$ 型になる。詳しい解説は [Kac] を参照せよ。

[33] 以下の解説では highest weight integral representations のみを利用する。その表現のクラスには supercuspidal 表現の類似物は含まれない。しかし、Weil 表現の $\widehat{\mathfrak{sp}}_n$ での類似物を boson の計算によって構成することはできる。

を持つベクトル $v_{k,\lambda} \neq 0$ から生成される $\hat{\mathfrak{g}}$ の既約表現が (同型を除いて) 唯一存在する[34]。この表現を $L_{k,\lambda}$ と書くことにする。$L_{k,\lambda}$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ の最高ウェイト可積分表現と呼ばれている[35]。

Riemann 面 R の点 p に対して、affine Lie 環のコピー $\hat{\mathfrak{g}}_p$ を次のように対応させる。まず、点 p における Riemann 面の局所座標系 ξ_p で $\xi_p(p) = 0$ を満たすものを任意に取る。このとき、Riemann 面 R 上の有理型函数 $f \in K = \mathbb{C}(R)$ に対して、その Laurent 展開 $f(\xi) \in \widehat{K}_p = \mathbb{C}((\xi_p))$ を対応させることによって、体の埋め込み $K \hookrightarrow \widehat{K}_p$ が定まる。$\hat{\mathfrak{g}}$ の定義における ξ を ξ_p に置き換えてできる無限次元 Lie 環を $\hat{\mathfrak{g}}_p = \mathfrak{g} \otimes \widehat{K}_p \oplus \mathbb{C}\,\mathbf{k}$ と書く。$\mathfrak{g} \otimes \widehat{\mathcal{O}}_p = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[\xi_p]]$ は自然に $\hat{\mathfrak{g}}_p$ の Lie subalgebra をなす。

これらの局所的な affine Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}_p$ をすべての $p \in R$ にわたって束ねることによって、大域的な affine Lie 環 $\hat{\mathfrak{g}}_R$ (adelic affine Lie algebra) を定義しよう。まず、そのために、代数函数体 $K = \mathbb{C}(R)$ のアデール環 $\mathbb{A}_R$ を定義する:

$$\mathbb{A}_R := \prod_{p\in R}{}' \widehat{K}_p := \left\{ (f_p)_{p\in R} \in \prod_{p\in R} \widehat{K}_p \;\middle|\; \text{有限個の } p \text{ を除いて } f_p \in \widehat{\mathcal{O}}_p \right\}. \tag{3.13}$$

$\mathbb{A}_R$ は自然に環をなす[36]。$f \in K$ の点 $p \in R$ における Laurent 展開を $f_p \in \widehat{K}_p$ と書くとき、$f \mapsto (f_p)_{p\in R}$ によって、埋め込み $K \hookrightarrow \mathbb{A}_R$ が定まる[37]。$\hat{\mathfrak{g}}_R$ を vector space として、

$$\hat{\mathfrak{g}}_R := \mathfrak{g} \otimes \mathbb{A}_R \oplus \mathbb{C}\,\mathbf{k} \tag{3.14}$$

と定義し、Lie 環の構造を

$$[X \otimes f + a\,\mathbf{k},\, Y \otimes g + b\,\mathbf{k}] := [X, Y] \otimes fg + (X|Y)\,\mathrm{Res}_R(df \cdot g)\,\mathbf{k} \tag{3.15}$$

によって入れる。ここで、$X, Y \in \mathfrak{g}$, $f = (f_p), g = (g_p) \in \mathbb{A}_R$, $a, b \in \mathbb{C}$, $df := (f'_p(\xi_p)\,d\xi_p)$

---

[34] $\mathfrak{g}$ が一般の有限次元単純 Lie 環の場合は、$\mathfrak{g}$ の lowest root $-\theta$ に対する root vector を F_θ と書き、以下の条件を課す:

$$(\mathfrak{g} \otimes \xi\mathbb{C}[[\xi]] + \mathfrak{n}_+)v_{k,\lambda} = 0, \quad Hv_{k,\lambda} = \lambda(H)v_{k,\lambda} \text{ for } H \in \mathfrak{h}; \tag{3.11}$$

$$(F_\theta \otimes \xi^{-1})^{k-(\lambda|\theta)+1}v_{k,\lambda} = 0. \tag{3.12}$$

$\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[[\xi]]$ と $\mathfrak{g} \otimes \xi\mathbb{C}[[\xi]] + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}_+$ はそれぞれ p 進体上の簡約可能群の maximal compact subgroup と Iwahori subgroup の affine Lie 環における類似物である。

[35] Affine Lie 環には以下の 2 通りの見方がある: (1) loop algebra の中心拡大, (2) Kac-Moody Lie 環の特別な場合。後者の (2) は、有限次元単純 Lie 環の一般化と見る見方である。この後者の見方において、$L_{k,\lambda}$ は有限次元単純 Lie 環の有限次元既約表現の類似物になっている。

[36] $\mathbb{A}_R$ は $\mathbb{C}$ 上 linearly locally comact な位相環になる。$\prod'$ は制限直積と呼ばれている。$\mathbb{A}_R$ は Riemann 面の上の形式的な “全ての” 函数全体の空間であると思って良い。$\mathbb{A}_R$ の微分幾何的類似物は R 上の C^∞ 函数全体である。

[37] 埋め込み $K \hookrightarrow \mathbb{A}_R$ を考えることによって、初めて Riemann 面 R の複素構造をアデール的に取り扱ったことになる。このことの微分幾何的類似は、R 上の C^∞ 函数の空間への $\bar{\partial}$ の作用によって R の複素構造を特徴付けることである。

($'$ はξ_pによる微分) であり、Res_R を次のように定義する:

$$\text{(3.16)} \qquad \mathrm{Res}_R\,\omega := \sum_{p\in R} \operatorname*{Res}_{\xi_p=0} \omega_p \qquad \text{for} \quad \omega = (\omega_p) \in \Omega^1_{\mathbb{A}} := \prod_{p\in R}{}' \widehat{K}_p\, d\xi_p.$$

右辺は見かけ上無限和であるが、制限直積の定義より有限和になるので、well-defined である。以上によって、アデール的な affine Lie 環 $\widehat{\mathfrak{g}}_R$ が定義された。$\widehat{\mathfrak{g}}_p$ は自然に $\widehat{\mathfrak{g}}_R$ の Lie subalgebra とみなせる。$\mathfrak{g}_K := \mathfrak{g}(K) := \mathfrak{g} \otimes K$ と置く[38]。このとき、$K \hookrightarrow \mathbb{A}_R$ によって $\mathfrak{g}_K \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}_R$ が定まるが、この埋め込みは留数定理より Lie 環の準同型になっていることがわかる。

ところで、まだ、conformal block を定義するために用意した data を全く使っていない。その data は $\widehat{\mathfrak{g}}_R$ の表現を指定するために使われる。(3.3), (3.4), (3.5) の元で、$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda(p))_{p\in R}$ を次のように定める:

$$\text{(3.17)} \qquad \lambda(p_i) := \lambda_i \ \text{ for } i = 1, \cdots, N, \quad \lambda(p) := 0 \ \text{ for } p \in R - \{p_1, \cdots, p_N\}.$$

$L_{k,\boldsymbol{\lambda}}$ を次のように定める:

$$\text{(3.18)} \qquad \begin{aligned} L_{k,\boldsymbol{\lambda}} &:= \bigotimes_{p\in R}{}' L_{k,\lambda(p)} \\ &:= \left\{ \phi = (\phi_p) \in \bigotimes_{p\in R} L_{k,\lambda(p)} \;\middle|\; \text{有限個の } p \text{ を除いて } \phi_p = v_{k,\lambda(p)} \right\}. \end{aligned}$$

この $L_{k,\boldsymbol{\lambda}}$ には自然に $\widehat{\mathfrak{g}}_R$ が作用してする[39]。この作用によって、$L_{k,\boldsymbol{\lambda}}$ は $\widehat{\mathfrak{g}}_R$ の既約表現をなす。

ここにまで来て、やっと、conformal block の定義を述べることができる。その定義を見れば明らなことだが、$\mathbb{A}_R$ や $\widehat{\mathfrak{g}}_R$ の代数構造自体には Riemann 面 R の複素構造の情報は全く入っていない。実は、$K \hookrightarrow \mathbb{A}_R$ や $\mathfrak{g}_K \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}_R$ が R の複素構造の情報をすべて持っているのである。$\mathfrak{g}_K \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}_R$ によって、$\mathfrak{g}_K = \mathfrak{g} \otimes K$ は $L_{k,\boldsymbol{\lambda}}$ に左から作用しているので、その dual space $L^*_{k,\boldsymbol{\lambda}}$ には自然に右から作用する[40]。

Definition 3.1 $L^*_{k,\boldsymbol{\lambda}}$ の $\mathfrak{g}_K$不変な元を conformal block と呼び、conformal blocks の空間を次のように表わす:

$$\text{(3.19)} \qquad \begin{aligned} \mathcal{CB}(R, k, \boldsymbol{\lambda}) &:= \mathcal{CB}(R, p_1, \cdots, p_N; k, \lambda_1, \cdots, \lambda_N) := \left[L^*_{k,\boldsymbol{\lambda}} \right]^{\mathfrak{g}_K} \\ &:= \{ \Phi \in L^*_{k,\boldsymbol{\lambda}} \mid \Phi(A\phi) = 0 \text{ for } \phi \in L_{k,\boldsymbol{\lambda}} \text{ and } A \in \mathfrak{g}_K \}. \quad \square \end{aligned}$$

[38] これは、主アデール群の Lie 環的類似物である。

[39] しかも、$L_{k,\boldsymbol{\lambda}}$ に離散位相を入れたとき、$\widehat{\mathfrak{g}}_R$ の作用は連続的である。$\bigotimes'$ は制限テンソル積と呼ばれている。

[40] ここでは、$V = L_{k,\boldsymbol{\lambda}}$ の dual space を 代数的に $V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ と定義している。

以上によって、WZW 模型が定義された。$R = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ の場合は、[TK] で詳しく扱われている[41]。[TUY] では、単一の Riemann 面の代わりに安定曲線の局所普遍族上の conformal blocks の空間を扱っている[42]($\mathfrak{g}$ は任意の有限次元複素単純 Lie 環)。[TUY] では、空間 $\mathcal{CB}(R,k,\boldsymbol{\lambda})$ の次元は有限次元でかつ、N-pointed curve $(R,p_1,\cdots,p_N)$ を変形してもその次元が不変であることが示されている[43]。これによって、N-pointed stable curves の family の上に vector bundle が定まるが、その上に projectively flat regular connection が入ることも示されている。さらに、特異安定曲線に対する conformal blocks の空間は、その通常二重点を切り離してできる曲線に対する conformal blocks の空間から構成される[44]。

Example 3.2 ([Verlinde], [MS]) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ に対して、$\widehat{\mathfrak{g}}$ の level k の characters で張られる $k+1$ 次元の函数空間は modular 変換 $\tau \mapsto -1/\tau$ で不変である。その変換行列は次のように表わされる:

$$S_{\lambda,\mu} = \left(\frac{2}{k+2}\right)^{1/2} \sin\frac{(\lambda(H)+1)(\mu(H)+1)}{k+2} \quad \text{for } \lambda,\mu \in \mathbb{P}_k. \tag{3.20}$$

Riemann 面 R の genus を g と書く。このとき、conformal blocks の空間の次元は、R の複素構造にも R 上の N 個の点 $p_1,\cdots,p_N$ の位置にもよらず、次のように表わされる:

$$\dim \mathcal{CB}(R,k,\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{\mu\in P_k} \left(\frac{1}{S_{0,\mu}}\right)^{2g-2} \prod_{i=1}^{N} \frac{S_{\lambda_i,\mu}}{S_{0,\mu}}. \tag{3.21}$$

この種の公式は一般に Verlinde formula と呼ばれている[45]。 □

共形場理論と保型形式論の類似について説明しよう[46]。簡単のため $G = \mathrm{GL}_2$ の場合を扱う。G の中心を Z と書く ($Z \simeq \mathbb{G}_\mathrm{m}$)。

まず、G, G_1 に付随するアデール群を定義する。$\mathbb{Q}$ のアデール環は、制限直積によって $\mathbb{A} := \mathbb{A}_\mathbb{Q} := \mathbb{R} \times \prod'_{p:\text{素数}} \mathbb{Q}_p$ と定義され、局所コンパクト位相環をなす。$G_\mathbb{A} := G(\mathbb{A}) =$

[41] [TK] では、conformal block にあたるものは vertex operator と呼ばれている。

[42] [TUY] では、conformal block にあたるものは vacuum と呼ばれている。

[43] 通常二重点を持つ stable curve まで変形しても次元は変わらない。

[44] 以上に関する詳しい説明と証明は [TUY] を見よ。

[45] 昔は Verlinde conjecture と呼ばれていた。$N = 0$ の場合の公式が [Verlinde] (3.15) にあり、より一般の公式は [MS] (A.7) にある。[MS] は共形場理論のある種の公理系を与え、その公理系から Verlinde formula が出ることを証明している。この節で定義された WZW 模型が [MS] の公理系を満たすことは [TUY] で証明された。なお、R 上の parabolic bundles の moduli 空間の上のある定められた line bundle の global sections の空間の次元公式を Verlinde formula と呼ぶ人もいるので注意が必要である。実は、その global section の方を conformal block の定義とする流儀もある。これによって、conformal blocks には二つの定義があることになる。しかし、その二つ定義の同値性は数学的には non-trivial である。二つの定義が形式的に同値であることは、[Oxford] の G. Segal による Seminar 4 に書いてある。

[46] WZW 模型について詳しく説明したので、以下においては、詳しい定義を省略することがある。

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ を G のアデール群と呼び、$G_{\mathbb{Q}} := G(\mathbb{Q})$ を主アデール群と呼ぶ[47]。$G_{\mathbb{R}} := G(\mathbb{R})$, $G_{\mathbb{Q}_p} := G(\mathbb{Q}_p)$ と置くと、$G_{\mathbb{A}}$ は制限直積を用いて $G_{\mathbb{A}} = G_{\mathbb{R}} \times \prod'_{p:\text{素数}} G_{\mathbb{Q}_p}$ のように表わされる。自然な diagonal embedding $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{A}$ によって、$G_{\mathbb{Q}}$ は $G_{\mathbb{A}}$ の部分群とみなせる。$G_{\mathbb{A}}$ は局所コンパクト群になるので、その上には Haar 測度が入る[48]。$Z \simeq \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ に対しても同様の言葉を定義しておく。$\mathbb{Q}$ のアデール環 $\mathbb{A} = \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ の共形場理論における対応物は、式 (3.13) で定義された $\mathbb{A}_R$ である。また、アデール群 $G_{\mathbb{A}}$ の共形場理論における Lie 環的類似物は、式 (3.14), (3.15) で定義された $\widehat{\mathfrak{g}}_R$ である[49]。

次に、表現論の話に移ろう。π は $G_{\mathbb{A}}$ の表現であるとし、π_∞, π_p はそれぞれ $G_{\mathbb{R}}$, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現であるとする。このとき、π が $G_{\mathbb{A}}$ の許容既約表現[50]であることと、π が以下のように $G_{\mathbb{R}}$, $G_{\mathbb{Q}_p}$ のある許容既約表現 π_∞, π_p 達の制限直積に同型になることは同値である[51]:

$$\pi \simeq \pi_\infty \otimes \bigotimes_{p:\text{素数}}{}' \pi_p. \tag{3.22}$$

この式における π と π_∞, π_p の共形場理論における類似物は、それぞれ、式 (3.18) における $L_{k,\boldsymbol{\lambda}}$, $L_{k,\lambda(p)}$ である[52]。

4 共形場理論の主束のモジュライ空間上の定式化

引き続き、保型形式の話を続けよう。保型形式の最も典型的かつ古典的な例であるモジュラー形式について説明する。非負の整数 N に対して、$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ から $\mathrm{SL}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ への自然な写像を f_N と書き[53]、$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ の部分群を U_N, B_N (これらはここだけの記号) を

$$U_N := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \subset B_N := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \right\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \tag{4.1}$$

---

[47] ここで、$\mathbb{C}$ 上の概型 X と $\mathbb{C}$ 上位相環 A に対して、X の A-rational point set に A から来る自然な位相を入れたものを $X(A)$ と書いた。

[48] Haar 測度が存在することは数論的な状況の大きな特徴である。$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ 上の加法に関する不変測度の、共形場理論における類似物は Riemann 面上の函数空間上の不変測度 (“Feynman 測度”) である。前者は数学的に正しく存在するが、後者は存在しない。このことが、場の量子論・統計力学を難しくしている。

[49] しかし、二つの明らかな相異点が存在する。一つは、$G_{\mathbb{A}}$ は群であり、$\widehat{\mathfrak{g}}_R$ は Lie 環であり、もう一つは、$\widehat{\mathfrak{g}}_R$ は中心拡大されているが、$G_{\mathbb{A}}$ はされてないことである。共形場理論においても Lie 環ではなく群の方を考えれば、前者の相異点は無くなる。ただし、$\mathbb{C}$ 上無限次元の群を扱わなければならない。$G_{\mathbb{A}}$ の中心拡大については、[久保田], [Moore], [PR] を見よ。

[50] 許容表現 (admissible representation) の定義は省略する。

[51] 詳しい説明と証明は [Flath] を見よ。

[52] ただし、式 (3.18) においては、局所的な許容表現として、可積分表現という非常に限られた表現のみを考えてる。より一般の許容表現まで含めた結果については、これからの研究が待たれるところである。

[53] この f_N は全射であるが、このことは trivial ではない。f_N の全射性は “強近似定理” と呼ばれている。例えば、単連結かつ連結な Chevalley 群に対する強近似定理の証明が [Moore] の Chapter IV にある。

と定義する。$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の離散部分群 $\Gamma(N)$, $\Gamma_1(N)$, $\Gamma_0(N)$ が次のように定義される:

$$\Gamma(N) := \mathrm{Ker}\, f_N \ \subset\ \Gamma_1(N) := f_N^{-1}(U_N) \ \subset\ \Gamma_0(N) := f_N^{-1}(B_N). \tag{4.2}$$

ある $\Gamma(N)$ を含む $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の部分群を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群 (congruence subgroup) と呼ぶ。$\Gamma_i(N)$ はその典型的な例である。以下において、Γ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群であるとする。$G_{\mathbb{R}}^{+} := \{\, g \in G_{\mathbb{R}} \mid \det g > 0 \,\}$ は複素上半平面 $\mathfrak{H} := \{\, \tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\,\tau > 0 \,\}$ に左から作用する:

$$g\tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \ (\in \mathfrak{H}) \qquad \text{for} \ \ \tau \in \mathfrak{H}, \ \ g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G_{\mathbb{R}}^{+}. \tag{4.3}$$

この作用を通して、Γ は $\mathfrak{H}$ に作用する。$Y(\Gamma) := \Gamma\backslash\mathfrak{H}$ と置く。$Y(\Gamma)$ に有限個の点を付け加えて、compact Riemann 面 $X(\Gamma)$ ($Y(\Gamma)$ のコンパクト化) を作ることができる。新たに付け加えた点を $X(\Gamma)$ の cusp と呼ぶ。

Example 4.1 ($\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$) $Y(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathfrak{H}$ とそのコンパクト化 $X(1)$ は次を満たす:

$$Y(1) \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{\mathrm{pt}\}, \qquad X(1) \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C}). \tag{4.4}$$

$Y(1)$ は複素楕円曲線のモジュライ空間である。すなわち、$\tau \in \mathfrak{H}$ に対して複素楕円曲線 $E_\tau := \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ を対応させることによって、$Y(1)$ の点と複素楕円曲線の同型類が一対一に対応する。 □

Example 4.2 ($\Gamma = \Gamma_0(N)$) $Y_0(N) = \Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}$ は複素楕円曲線 E とその位数 N の巡回部分群 c の組 (E, c) のモジュライ空間である。$\tau \in \mathfrak{H}$ に対して、E_τ 上における $\frac{1}{N}\mathbb{Z}$ $(\subset \mathbb{C})$ の像 c_τ は E_τ の位数 N の巡回部分群である。対応 $\tau \mapsto (E_\tau, c_\tau)$ によって、$Y_0(N)$ の点と (E, c) の同型類が一対一に対応する[54]。ただし、(E, c) と (E', c') が同型であるとは、E から E' への同型写像で c を c' に移すものが存在することである。$Y_0(N)$ のコンパクト化を $X_0(N)$ と表わす。 □

このように、$Y(\Gamma)$ は複素楕円曲線 $(+\ \alpha)$ のモジュライ空間であると言って良い。先走って言えば、共形場理論における楕円曲線のモジュライ空間の類似物は、Riemann 面の上の (rank 2 の) ベクトル束のモジュライ空間である。

$\Gamma_0(N)$ に対するモジュラー形式を定義しよう。$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ の character ψ をとり、$(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ の外では値 0 を取るように拡張しておく。自然な写像 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ と ψ の合成も同じ記号 ψ と書くことにする。この ψ を modulo N の Dirichlet character と呼ぶ。k は非負の整数であるとする。$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G_{\mathbb{R}}^{+}$, $\tau \in \mathfrak{H}$ に対して、$j(g, \tau) := (c\tau + d)(\det g)^{1/2}$ と置く。

[54] $Y(N) := \Gamma(N)\backslash\mathfrak{H}$ や $Y_1(N) := \Gamma_1(N)\backslash\mathfrak{H}$ も楕円曲線 $+\ \alpha$ のモジュライ空間になっている。例えば、[Silverman] の Appendix C を見よ。

Definition 4.3 複素上半平面 $\mathfrak{H}$ 上の正則函数 f が level N, weight k, character ψ のモジュラー形式であるとは、以下の二つの条件を満たしていることである:

$$f(\gamma\tau)j(\gamma,\tau)^{-k}\psi(a)^{-1} = f(\tau) \qquad \text{for} \quad \gamma = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma_0(N); \tag{4.5}$$

(4.6) f は $X_0(N)$ の各 cusp の上でも正則である (詳しい定義は省略)。

さらに、f が次の条件を満たすとき、f はカスプ形式であると言う:

(4.7) f は $X_0(N)$ の任意の cusp で 0 になる。

このように定義されたモジュラー形式とカスプ形式の空間をそれぞれ $M_k(N,\psi)$, $S_k(N,\psi)$ と表わす。 □

等式 $(d(\gamma\tau))^{k/2} = j(\gamma,\tau)^{-k}\,(d\tau)^{k/2}$ より、k が偶数かつ $\psi = 1$ であるとき、対応するモジュラー形式の空間 $M_k(N,1)$ は $X_0(N)$ 上の正則 $k/2$ 形式の空間に等しい。

上の様に定義したモジュラー形式の空間が、第 3節におけるアデール群上のある函数空間と同一視できることを説明しよう。そのときに要になるのは次の強近似定理である。

Lemma 4.4 (強近似定理) $G_{\mathbb{Q}}G_{\mathbb{R}}^{+}$ は $G_{\mathbb{A}}$ の中で稠密である。 □

$G_{\mathbb{A}}$ のコンパクト部分群 $K_0(N)$ を次のように定める:

$$K_p := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p) \,\middle|\, c \equiv 0 \mod N \right\}, \tag{4.8}$$

$$K_0'(N) := \prod_{p:素数}{}' K_p, \quad K_0(N) := \mathrm{SO}(2) \times K_0'(N). \tag{4.9}$$

このとき、$G_{\mathbb{R}}^{+}K_0'(N)$ は $G_{\mathbb{A}}$ の開部分群になるので、上の Lemma より、$G_{\mathbb{A}} = G_{\mathbb{Q}}G_{\mathbb{R}}^{+}K_0'(N)$ が成立する。よって、$G_{\mathbb{Q}} \cap G_{\mathbb{R}}^{+}K_0'(N) = \Gamma_0(N)$ より、次が成立することがわかる:

$$Z_{\mathbb{A}}G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbb{A}}/K_0(N) \;\simeq\; \Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H} \;=\; Y_0(N). \tag{4.10}$$

$\widehat{\mathbb{Z}} := \prod_{p:素数} \mathbb{Z}_p$ と置くと、素因数分解の一意性より、直積分解 $\mathbb{A}^{\times} = \mathbb{Q}^{\times}\mathbb{R}_{+}^{\times}\widehat{\mathbb{Z}}^{\times}$ が成立する。よって、自然な写像列 $\mathbb{A}^{\times} \to \widehat{\mathbb{Z}}^{\times} \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{\times}$ と Dirichlet character ψ の合成によって、$\mathbb{Q}$ の grossencharacter が定まる。それも ψ と書くことにする。$K_0(N)$ の character χ を次のように定める:

$$\chi(k_0') := \psi(a') \qquad \text{for} \;\; k_0' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \in K_0'(N); \tag{4.11}$$

$$\chi(r_\theta) := e^{-ik\theta} \qquad \text{for} \;\; r_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \in \mathrm{SO}(2). \tag{4.12}$$

$f \in S_k(N,\psi)$ に対して、$G_{\mathbb{A}}$ 上の函数 ϕ_f を次の式によって定めることができる:

$$\phi_f(\gamma g_\infty k'_0) := f(g_\infty i) j(g_\infty, i)^{-k} \chi(k'_0). \tag{4.13}$$
$$\text{for } \ \gamma \in G_{\mathbb{Q}},\ g_\infty \in G^+_{\mathbb{R}},\ k'_0 \in K'_0(N).$$

$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ の Casimir operator を Δ と書くことにする。

Proposition 4.5 対応 $f \mapsto \phi_f$ によって、カスプ形式の空間 $S_k(N,\psi)$ は以下の条件を満たす $G_{\mathbb{A}}$ 上の滑らかな函数 ϕ 全体のなす空間と同型である[55]:

$$\phi(z\gamma g) = \phi(g)\psi(z) \quad \text{for } \ \gamma \in G_{\mathbb{Q}},\ z \in Z_{\mathbb{A}}; \tag{4.14}$$

$$\phi(gk_0) = \chi(k_0)\phi(g) \quad \text{for } k_0 \in K_0(N); \tag{4.15}$$

$$\Delta\phi = -\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2} - 1\right)\phi; \tag{4.16}$$

(4.17) ϕ は slowly increasing である;

$$\int_{\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}} \phi\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g\right) dx = 0 \qquad (\text{カスプ条件}). \quad \square \tag{4.18}$$

以上の話の共形場理論における類似について考えてみる。以下、前節の前半の記号をそのまま用いる。次が成立する:

$$\begin{aligned} &\mathrm{GL}_r(K)\backslash \mathrm{GL}_r(\mathbb{A}_R)/\mathrm{GL}_r(\mathbb{O}_R) \\ &\qquad \simeq \{\, [E] \mid E \text{ は } R \text{ 上の rank } r \text{ のベクトル束} \,\}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

ここで、K は Riemann 面 R の代数函数体、$\mathbb{A}_R$ は (3.13) で定義された R のアデール環、$\mathbb{O}_R := \prod_{p\in R} \mathbb{C}[[\xi_p]] \subset \mathbb{A}_R$ であり、$[E]$ はベクトル束 E の同型類を表わす。GL_r を SL_r に置き換えた場合は、$c_1(E) = 0$ のベクトル束のみを考えることになる。$r = 2$ の場合は、ちょうど、Example 4.1 (+ 式 (4.10)) の類似になっている[56]。このようにして、共形場理論にベクトル束のモジュライ空間[57]が関係してくるのである。

以下では、前節 (の前半) と同様の記号を用いる。$\mathfrak{g}\otimes\mathbb{A}_R$ の中心拡大 $\hat{\mathfrak{g}}_R$ の群における対応物を $\widehat{G}_R := \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_R)\times\mathbb{C}^\times$ と表わす。このとき、$G_K := \mathrm{SL}_2(K)$, $G(\mathbb{O}_R) := \mathrm{SL}_2(\mathbb{O}_R)$ は自然に $\widehat{G}_R$ の部分群とみなせる。また、$\hat{\mathfrak{g}}_R$ の表現 $L_{k,\boldsymbol{\lambda}}$ は $\widehat{G}_R$ の表現に積分可能である。$S := \{\, p_1, \cdots, p_N \,\} \subset R$ に対して、$G(\mathbb{O}_R)$ の部分群 I を次のように定める:

$$I_p := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}[[\xi_p]]) \,\middle|\, c \equiv 0 \mod (\xi_p) \right\} \quad \text{for } p \in S, \tag{4.20}$$

$$I_p := SL_2(\mathbb{C}[[\xi_p]]) \qquad \text{for } p \notin R - S; \tag{4.21}$$

$$I := \prod_{p\in R} I_p. \tag{4.22}$$

---

[55]詳しい説明は [Gelbart] などを見よ。
[56]式 (4.19) の証明にも、ある種の "近似定理" が必要である。
[57]正確には、式 (4.19) の quotient は stack のカテゴリーで考える。詳しいことは [BL] を見よ。

この I は式 (4.9) で定義された $K_0(N)$ の類似物である。Example 4.2 (+ 式 (4.10)) の類似は以下のようになる:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &:= \mathrm{SL}_2(K)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_R)/I \\ &\simeq \{\,[(E,c)] \mid E \text{ と } c=(c_p)_{p\in S} \text{ は以下の条件を満たす}\},\end{aligned} \tag{4.23}$$

(4.24) E は R 上の rank 2 かつ $c_1(E)=0$ のベクトル束である;

(4.25) 各 $p\in S$ に対して c_p は fiber E_p の 1 次元部分空間である。

ここで、$[(E,c)]$ は (E,c) の同型類を表わす。このような (E,c) を quasi parabolic vector bundle と呼ぶ。

$\widehat{I} := I\times\mathbb{C}^\times$ と置く。k と $\boldsymbol{\lambda}$ は$\widehat{I}$ の 1 次元表現 $\mathbb{C}_{k,\boldsymbol{\lambda}}$ を自然に定める。$\mathbb{C}_{k,\boldsymbol{\lambda}}$ が形式的に[58]定める $\mathcal{F} := \mathrm{SL}_2(\mathbb{A}_R)/I \simeq \widehat{G}_R/\widehat{I}$ と $\mathcal{M}$ 上の line bundles をそれぞれ $\widetilde{\mathcal{L}}_{k,\boldsymbol{\lambda}}$, $\mathcal{L}_{k,\boldsymbol{\lambda}}$ と表わす。このとき、$\widetilde{\mathcal{L}}_{k,\boldsymbol{\lambda}}$ の global sections の空間 $H^0(\mathcal{F},\widetilde{\mathcal{L}}_{k,\boldsymbol{\lambda}})$ は $L^*_{k,\boldsymbol{\lambda}}$ に同型である。したがって、

$$\mathcal{CB}(R,k,\boldsymbol{\lambda}) \simeq \left[L^*_{k,\boldsymbol{\lambda}}\right]^{\mathfrak{g}_K} \simeq \left[L^*_{k,\boldsymbol{\lambda}}\right]^{G_K} \simeq \left[H^0(\mathcal{F},\widetilde{\mathcal{L}}_{k,\boldsymbol{\lambda}})\right]^{G_K} \simeq H^0(\mathcal{M},\mathcal{L}_{k,\boldsymbol{\lambda}}). \tag{4.26}$$

このようにして、conformal block と quasi parabolic bundles のモジュライ空間上の line bundle $\mathcal{L}_{k,\boldsymbol{\lambda}}$ の global section が同一視されるのである[59]。

参考文献

[岩澤] 岩澤 健吉: 代数函数論, 岩波書店, 増補版 1973 年, 380pp.

[久保田] 久保田富雄: 拡張された metaplectic 群の構成と表現, 第 14 回代数分科会シンポジウム報告集, 1968 年 12 月, 於お茶の水大学, 103–126.

[BL] Beauville, A. and Laszlo, Y.: Conformal blocks and generalized theta functions, preprint 1993, alg-geom.9309003.

[Flath] Flath, D.: Decomposition of representations into tensor products, Proc. Symp. Pure Math. **33**, part 1, 1979, 179–183.

[Garland] Garland, H.: The arithmetic theory of loop groups, Publ. Math. IHES **52**, 1980, 5-136.

[58] 以下「形式的に」の語を省略する。$N=1$ の場合の数学的証明については [BL] を見よ。

[59] まだ、説明し足りないことも多いのだが、紙数も尽きたのでこれで止めにする。今後、共形場理論において、Hecke 環の研究が重要になるであろう。また、野心的な試みとして、共形場理論における Langlands program の類似について考察することは非常に面白い。

[Gelbart] Gelbart, S. S.: Automorphic forms on adele groups, Ann. Math. Stud. **83**, 1975, 267pp.

[Kac] Kac, V.: Infinite dimensional Lie algebra, Third edition, Cambridge University Press, 1990, 400pp.

[Moore] Moore, C. C.: Group extensions of p-adic and adelic linear groups, Publ. Math. IHES **35**, 1968, 5–70.

[Lefschetz] Lefschetz, L.: Algebraic topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1942.

[MS] Moore, G. and Seiberg, N.: Classical and quantum conformal field theory, Commun. Math. Phys. **123**, 1989, 177–254.

[Ohio] The arithmetic of function fields, Proc. of the Workshop at The Ohio State Univ. June 17–26, 1991, edited by D. Goss, D. R. Hayes, and M. I. Rosen, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ. **2**, Walter de Gruyter, 1992, 482pp.

[Oxford] Oxford Seminar on Jones-Witten Theory, preprint 1988, 122pp.

[PR] Prasad, G. and Raghunathan, M. S.: Topological central extension of semi-simple over local fields I, II, Ann. Math. **119**, 1984, 143-201, 203-268.

[Serre] Serre, J.-P.: Algebraic groups and class fields, Translation of the French edition, Graduate Texts in Mathematics **117**, Springer-Verlag, 1975, 207pp.

[Silverman] Silverman, J. H.: The arithmetic of elliptic curves, Graduate Texts in Mathematics **106**, Springer-Verlag, 1986, 400pp.

[TK] Tsuchiya, A. and Kanie, Y.: Vertex operators in conformal field theory on $\mathbb{P}^1$ and monodromy representations of braid group, Adv. Stud. Pure Math. **16**, 1988, 297–372.

[TUY] Tsuchiya, A., Ueno, K., and Yamada, Y.: Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries, Adv. Stud. Pure Math. **19**, 1989, 459–566.

[Verlinde] Verlinde, E.: Fusion rules and modular transformations in 2D conformal field theory, Nuclear Physics **B300** [FS22], 1988, 360–376.