黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 2
mathtod.online/@genkuroki/3688...
mathtod.online/@genkuroki/3770...
の続きを連続トゥートしようかな。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 2
$\omega^2+\omega+1=0$ (特に $\omega^3=1$)のとき

$$\begin{aligned}&x^3+y^3+z^3-3xyz\\&=(x+y+z)\\&\times(x+\omega y+\omega^2 z)\\&\times(x+\omega^2 y+\omega z).\end{aligned}$$

これを使うと3次方程式を解けます。

まず、$x^3+y^3+z^3-3xyz$ を

$$x^3-3yz\cdot x+(y+z)^3-3yz(y+z)=0$$

と書き直して、x に関する3次方程式とみなします。

$$x^3+px+q=0$$

の形の3次方程式が解ければ、任意の3次方程式も解けます。上と比較して、

$$-3yz=p, \quad y^3+z^3=q$$

を満たす y,z が求まれば、上の因数分解の公式より、3次方程式の3つの解は

$$\begin{aligned}x=&-(y+z),\\&-(\omega y+\omega^2 z),\\&-(\omega^2 y+\omega z)\end{aligned}$$

と求まります。続く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 2
続き

欲しい y,z は以下のようにして求められます。求めたい p,q は

$$y^3z^3=-p^3/27, \quad y^3+z^2=q.$$

を満たしているので、y^3,z^3 は二次方程式

$$X^2-qX-p^3/27=0$$

の解になり、y^3,z^3 の三乗根で y,z が求まります。
必要ならば y,z に ω のべきをかけて $yz=-p/3$ となるようにできます。これで欲しい y,z の求め方もわかりました。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 2

続き。3つの解が

$$\begin{aligned} x = &-(y+z), \\ &-(\omega y+\omega^2 z), \\ &-(\omega^2 y+\omega z) \end{aligned}$$

なので、3つの解のあいだに明らかな「対称性」があります。

(1) y と z を交換する互換の対称性

(2) (y,z) を $(\omega y, \omega^2 z)$ に移す長さ3の巡回置換の対称性。

この2つは3つの解の置換群を生成しています。

補足：二次方程式 $x^2=a$ は $x=\pm\sqrt{a}$ と解けるのですが、$\sqrt{a}$ と $-\sqrt{a}$ を互換の交換する対称性があります。その互換と単位元で2次の置換群を構成している。

解の置換対称性と代数方程式の解け方には何か関係ありそうなことが以上の例からわかります。さらに4次方程式をやると、ガロアさんのアイデアが少し見えてきます。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 2

高1で習う $x^3+y^3+z^3-3xyz$ の因数分解の公式は「3次方程式の解法を与えている」とみなせることを知れば、別の因数分解の公式を見付ければ4次方程式も解けるかもしれないと考えるのは自然です。そして、それは比較的容易に可能です。少し試行錯誤するだけで何とかなる。

4次方程式の解法は次の対称多項式から3次方程式の場合とまったく同様にして得られます。

$$\begin{aligned} &(w+x+y+z) \\ &\times(w+x-y-z) \\ &\times(w-x+y-z) \\ &\times(w-x-y+z) \end{aligned}$$

これ $=0$ を w の方程式とみなして解くと、4つの解は

$$\begin{aligned} w = &-(x+y+z), \\ &-(x-y-z), \\ &-(-x+y-z), \\ &-(-x-y+z). \end{aligned}$$

問題：4次の置換群の対称性が見えるでしょうか？

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 2

立方体 $\max\{|X|,|Y|,|Z|\}=1$ は4本の対角線を持ちます。それぞれ

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}(1,1,1),\\&\mathbb{R}(1,-1,-1),\\&\mathbb{R}(-1,1,-1),\\&\mathbb{R}(-1.-1.1).\end{aligned}$$

ここで$\mathbb{R}(X,Y,Z)$はベクトル(X,Y,Z)ではられる直線を意味しています。これと

$$\begin{aligned}w = &-(x+y+z),\\&-(x-y-z),\\&-(-x+y-z),\\&-(-x-y+z).\end{aligned}$$

を比較すると符号の付き方に明らかな類似があります。実は立方体の回転対称性は4本の対角線の置換群(すなわち4次の置換群)と同型になることが、手間を惜しまなければ容易にかつ直観的にわかります。4次方程式の解の対称性もこれと同じになっています。

詳しいことを知りたい人は自分で考えてみて下さい。他人の話を聞いてもどうせ数学は理解できない。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 2

ツイッターの方でした3次方程式と4次方程式の話については次の場所にまとめがあります。
twitter.com/i/moments/84484685...

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 2

比較するとやはり500文字まで可でかつ数式対応の方が圧倒的に書きやすくてかつ読み易いよな。

黒木玄 **Gen Kuroki**
@genkuroki

このトゥートが繋がっている4次方程式の (w+x+y+z)(w+x-y-z)(w-x+y-z)(w-x-y+z) を使った解法は「オイラーの方法」と呼ばれていることについさっき気付きました。

このトゥートの返答連鎖には所謂カルダノの公式の$x^3+y^3+z^3-3xyz$の因数分解を使った導き方も書いてあります。

この因数分解が実質的に3次方程式の解法を与えていることに気付けば、4次方程式の解法に関するオイラーの方法に自分で気付くことはそう難しくないと思う。

対称性の高いきれいな公式を見つける問題は単に面倒な計算をするより易しく楽しいと思う。

所謂カルダノの公式とかフェラーリの公式とかの「公式」自体は数学的に大事じゃないと思う。

様々な解き方があることと、それらを眺めると帰納的にガロア理論に繋がる数学的現象が観察されることが大事なのだと思う。

2017年05月04日 10:12 · Web · 0 · 5 · Webで開く