黒木玄 **Gen Kuroki**
@genkuroki

線形計画法における双対性の話をツイッターの
twitter.com/genkuroki/status/8… でしたのですが、行列の表記で難義しました。

大学新入生向けに線形代数を「体上の線形空間の理論(環上の加群の理論の特別な場合)」として教えようとする人はわかっていない人だと思う。

2017年05月03日 22:49 · Web · 0 · 2 · Webで開く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 3
そっちで紹介したのは

[Tucker1950] A.W.Tucker, Dual systems of homogeneous linear systems (1950)

にある次の定理。

定理(Tucker). G が n 次実交代行列のとき、ある列(縦)ベクトル $v \in \mathbb{R}^n$ が存在して、
$v \geqq 0, Gv \geqq 0, v + Gv > 0.$
を満たす。

ただし、$\geqq, >$ はそれぞれすべての成分で $\geqq, >$ が成立することを意味するものとする。以下も同様。証明でアイデアが必要なのは $>$ の部分です。例えば、この手の話題では標準的なFarkasの補題経由で証明できます。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 3
で、そのTuckerの定理を認めると、次のBroyden(1998)の定理を示せます。
scholar.google.co.jp/scholar?c…

Broydenに定理：n 次直交行列 P に対して、あるベクトル $v \in \mathbb{R}^n$ で $v > 0$ と $|Pv| = D$ を満たすものが存在する。

ただし、$v > 0$ は v のすべての成分が正であることを意味し、$|Pv|$ は Pv の各々の成分をその絶対値で置き換えたものを意味します。

この結果は数学的に深くも何ともないのですが、知らなかったので、ツイッターの方で「数楽」として紹介しました。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 3
Tuckerの定理⇒Broydenの定理の証明の概略：n 次直交行列 P から $3n$ 次実交代行列 G を

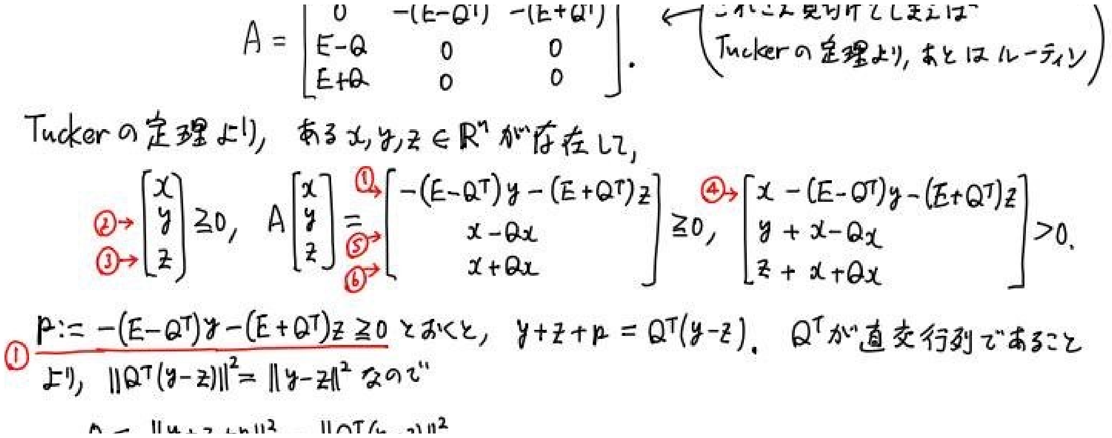
$$G = \begin{bmatrix} 0 & -(E-P^T) & -(E+P^T) \\ E-P & 0 & 0 \\ E+P & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と定めて、Tuckerの定理を適用すると、あるベクトル v で

$$-v \leqq Pv \leqq v$$

を満たすものの存在を示せる。P が直交行列であることより、ベクトル Pv の長さは v に等しいので、そのとき $|Pv| = v$ となる。q.e.d.

詳しくは別の記号で書いた
twitter.com/genkuroki/status/8…
の添付画像(このトゥートにも転載)を参照して下さい。 mathtod.online/media/qzU_n9Ljg…



黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 3

Broydenの定理からTuckerの定理を出すこともできて、実交代行列からCayley変換で得られる直交行列にBroydenの定理を適用するだけです。

こういう話って表現論と何か関係あるんですかね? 私はよくわかりません。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 3

交代行列に関するTuckerの定理はとても使いやすい形をしており、交代行列は対称ゲームを表現しているともみなせます。

線形計画法における双対性を出したければ、適当にブロック分割された交代行列にTuckerの定理を適用すればよいです。

例えば、交代行列

$$G = \begin{bmatrix} 0 & A & -c \\ -A^T & 0 & b \\ c^T & -b^T & 0 \end{bmatrix}$$

$(b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^m)$ にTuckerの定理を適用すれば

(P) $\min\{\, \langle x, c\rangle \mid x \geqq 0,\ A^T x \leqq b \,\}$
(D) $\max\{\, \langle b, y\rangle \mid y \geqq 0\,,\, Ay \geqq c \,\}$

の双対性が得られます。

Tuckerの定理を知っていると、この辺のことについて「なんだ、たったそれだけのことか」と感じられるようになれます。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 3

もちろん、こういう話に触れることができるような余裕は、授業時間内にはない。

mathtod.online powered by Mastodon