黒木玄 Gen Kuroki
@genkuroki

問題：$L > 0$ であるとする。f は $\mathbb{R}$ 上の 0 でない連続函数で $f(x) \geqq 0$, $f(x+L) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$を満たしていると仮定する。このとき

$$\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx = \infty$$

となることを示せ。

2017年05月11日 00:29 · Web · 1 · 2 · Webで開く

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki on May 11
解答：誤りがあれば自力で訂正よろ。 もっと見る

$A = \int_0^L f(x)\,dx$ とおく。f は周期 $L > 0$ を持つ 0 でない非負値連続函数なので $A > 0$ となる。正の整数 n について、$(n-1)L \leqq x \leqq nL$ ならば $1/x \geqq 1/(nL)$ なので、

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx \\
&= \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)L}^{nL} \frac{f(x)}{x}\,dx \\
&\geqq \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)L}^{nL} \frac{f(x)}{nL}\,dx \\
&= \sum_{n=1}^\infty \frac{A}{nL} = \frac{A}{L}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \infty.
\end{aligned}$$

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki on May 11
問題：f は $\mathbb{R}$ 上の周期 $L > 0$ を持つ 0 でない複素数値連続函数であり、$\int_0^L f(x)\,dx = 0$ を満たしていると仮定する。以下を示せ：

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{f(x)}{x}\right| dx = \infty.$

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_1^r \frac{f(x)}{x}\,dx$ は収束する。

コメント：典型例は $L = 2\pi$, $f(x) = e^{ix}, \sin x, \cos x$の場合。

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki on May 11
解答： もっと見る

(1)は前問題と同様なので、(2)のみを示す。

$F(x)=\int_1^x f(\xi)\,d\xi$ とおくと、f の性質から F も周期 L を持つことがわかる。ゆえに F は有界。ある $M>0$ が存在して $|F(x)|\leqq M$ $(x\in\mathbb{R})$。$r\geqq 1$ のとき、部分積分によって

$$\int_1^r \frac{f(x)}{x}\,dx = \left[\frac{F(x)}{x}\right]_1^r + \int_1^r \frac{F(x)}{x^2}\,dx,$$

$$\int_1^r \left|\frac{F(x)}{x^2}\right| dx \leqq M\int_1^r \frac{dx}{x^2} \leqq M.$$

後者の不等式より、積分 $\int_1^\infty (F(x)/x^2)\,dx$ は絶対収束するので、前者の積分 $\int_1^r (f(x)/x)\,dx$ は $r\to\infty$ で収束する。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 11

問題：以上の積分に関する問題の級数版を作れ。

級数の場合における部分積分に類似の変形はAbelの変形法と呼ばれているようです。

しかし、そういう呼び名は資料探しに役に立つだけで、数学の理解には何の役にも立たない。

微分積分と差分和分が似ていることは高校レベルでよく知られていることなので、部分積分を知っていれば、Abelの変形法という呼び名を知らないままで、Abelの変形法を実行できるはず。(というスタイルの理解を目指す。)

数学の問題の解答は一字一句順番に読むのではなく、ヒントを得るためだけに利用することが普通。完全解答は自分が作る。

数学を勉強することは、すべてを再構成すること。再構成には試行錯誤が必ず伴う。

自分で十分に再構成できたかは本に書いていることを別の類似のケースでも実行できるかどうかで確認するとよい。

それをやれば、言われた通りのことしかできないレベルの理解なのか、そうでないかがわかる。

私が自分自身の理解度をチェックした経験では、あんまり理解できていないことが多い。数学は難しい。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 11

返答連鎖続き。これで
mathtod.online/@genkuroki/6243…
で説明した「広義積分」の話は一段落かな？

個人的に「広義積分」という言い方は嫌いです。みんなそう言っているので講義ではそういう言い方で教えてしまいますが。

しかし、「絶対収束する積分」と「条件収束する積分の極限」の二種類を考えておけば十分だと思う。