黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 21
mathtod.online/@yuinore/151388

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)$$

の計算は

$$z = e^{ix},$$
$$\sin(kx) = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

とおいて、z の等比級数と z^{-1} の等比級数を別々に和をとってまとめると答えらしきものがでます。

そうやって出た答えと $n = 10$ までの和の比較
wolframalpha.com/input/?i=plot...

短い周期での振動は超函数的に 0 に近いので、正しそうなことがわかります。

続く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 21
続き

「$|z| = 1$ の場合に、z の等比級数と z^{-1} の等比級数を別々に和をとってまとめる」という二重に乱暴な方法は、 $r < 1$ を取って、z, z^{-1} のそれぞれを rz, rz^{-1} で置き換えて、等比級数の和を取った後に $r \nearrow 1$ の極限を取ることによって正当化できます。

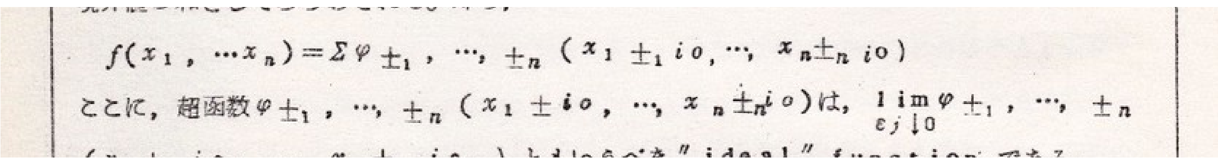
この計算法を一般化すると、円周 $|z| = 1$ 上の佐藤超函数が得られます。

z を $r^{\pm 1} z$ で置き換えることは、$\varepsilon > 0$ によって、実数 x を複素数 $x \pm i\varepsilon$ で置き換えることに対応しています。

そのように複素領域に逃げて収束性を確保する計算を一般化すると $\mathbb{R}$ 上の佐藤超函数が得られます。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 21
で、その佐藤超函数がどういうものかを説明した佐藤幹夫さん自身による有名な一節があるので引用しておきます。

“この世・現実世界”(実数の世界)と“あの世・ゆうれいの世界”(複素数領域)の境目に立ってながめることによって，タチの悪い無限大をとらえ...... ーー佐藤幹夫ーー
mathtod.online/media/u1kT0Kz7S...


$f(x_1, \cdots x_n) = \Sigma \varphi_{\pm_1, \cdots, \pm_n}(x_1 \pm_1 io, \cdots, x_n \pm_n io)$
ここに，超函数 $\varphi_{\pm_1, \cdots, \pm_n}(x_1 \pm io, \cdots, x_n \pm_n io)$ は，$\lim_{\varepsilon_j \downarrow 0} \varphi_{\pm_1, \cdots, \pm_n}$

$(x_1 \pm_1 i\varepsilon_1, \cdots, x_n \pm_n i\varepsilon_n)$ ともいうべき ideal function である。
これは，$f(x_1, \cdots, x_n)$ という超函数が，$\varphi(x_1 \pm io, \cdots, x_n \pm io)$ という型の超函数の和としてあらわされることを示している。この $\varphi(x_1 \pm io, \cdots, x_n \pm io)$ は，通常の超函数に比して，より単純な構造をもっているということができよう。この考えを極限にまで敷衍して得られたのが" Cの理論 "といわれるもので，これを用いて超函数の特異性をきわめて明瞭に記述することができる。20世紀後半に入って，Hörmander 等々によって展開された

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 21

たぶん例として分かり易いのは

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}$$

の方です。これは $z = e^{ix}$ とおくと、

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k + \sum_{l=1}^{\infty} z^{-l}$$

と書き直されます. $0 < r < 1$ として, z を $z_+ = rz$ で, z^{-1} を $z_-^{-1} = rz^{-1}$ で置き換えると、

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_+^k + \sum_{l=1}^{\infty} z_-^l$$
$$= \frac{1}{1 - z_+} - \frac{1}{1 - z_-}.$$

$z \neq 1$ のとき $r \nearrow 1$ で $z_\pm \to z \neq 1$ なので

$$\frac{1}{1-z} - \frac{1}{1-z} = 0$$

に収束するのですが, $z = 1$ とおくと

$$\frac{1+r}{1-r}$$

となり, $r \nearrow 1$ で ∞ に発散します.

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 21

$f(z)$ を $r/2 < |z| < 2r$ における複素解析函数とし, $z = e^{ix}$, $z_\pm = r^\pm z$ とおくと,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{f(re^{ix})}{1 - re^{ix}} - \frac{f(r^{-1}e^{ix})}{1 - r^{-1}e^{ix}} \right] dx$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \left[\frac{f(z_+)}{1 - z_+} - \frac{f(z_-)}{1 - z_-} \right] \frac{dz}{z}$$
$$= -\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{f(z)}{1-z} \frac{dz}{z}$$
$$= f(1).$$

これは

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-2n\pi)$$

を「意味」しています.

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 21

円周上のデルタ函数で説明すると, $z=e^{ix}$ と x の2つの座標系を考えなければいけなくなってややこしくなるので,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk = \delta(x)$$

の方を扱ってみせるべきでしたね.

これは $k>0$ と $k<0$ の積分の和に分解して, $k>0$ では x を $x+i\varepsilon$ で置き換え, $k<0$ では x を $x-i\varepsilon$ で置き換えるという処方箋で行けます.

こういうのは1週間くらい, 複素平面上の図も描きながら, 色々いじり続けて調整を続ければ, 大体理解できるようになるものです.

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 21

短い周期で振動しまくっている函数は超函数として 0 に近いことは次の定理によって確認できます.

Riemann-Lebesgueの定理: $\mathbb{R}$ 上の可積分函数 $f(x)$ に対して, $|k|\to\infty$ で

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x)\,dx \to 0.$$

Riemann-Lebesgue の定理は振動しまくると積分がキャンセルして 0 に近付くことを意味しています.

WolframAlphaなどでグラフを描いたときには,「振動しまくっている成分は超函数として 0 に近い」と解釈するとよいです. そういう解釈の仕方を知らないと, グラフでの確認で悩みが消えない場合が出て来てしまいます.

証明は次のリンク先のPDFの5.3節
github.com/genkuroki/Stirling

なんか, 仕事でやっている授業よりも, こちらで説明していることの方が実践的で内実が伴ったことをしゃべっているような気がする.

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 21

現実の物理現象で, 実数 x における函数 f の値 $f(x)$ が理想的に観測されることはありえないわけで, 実数 x の周囲で積分した値だけが観測可能だと思った方がよいと思う.

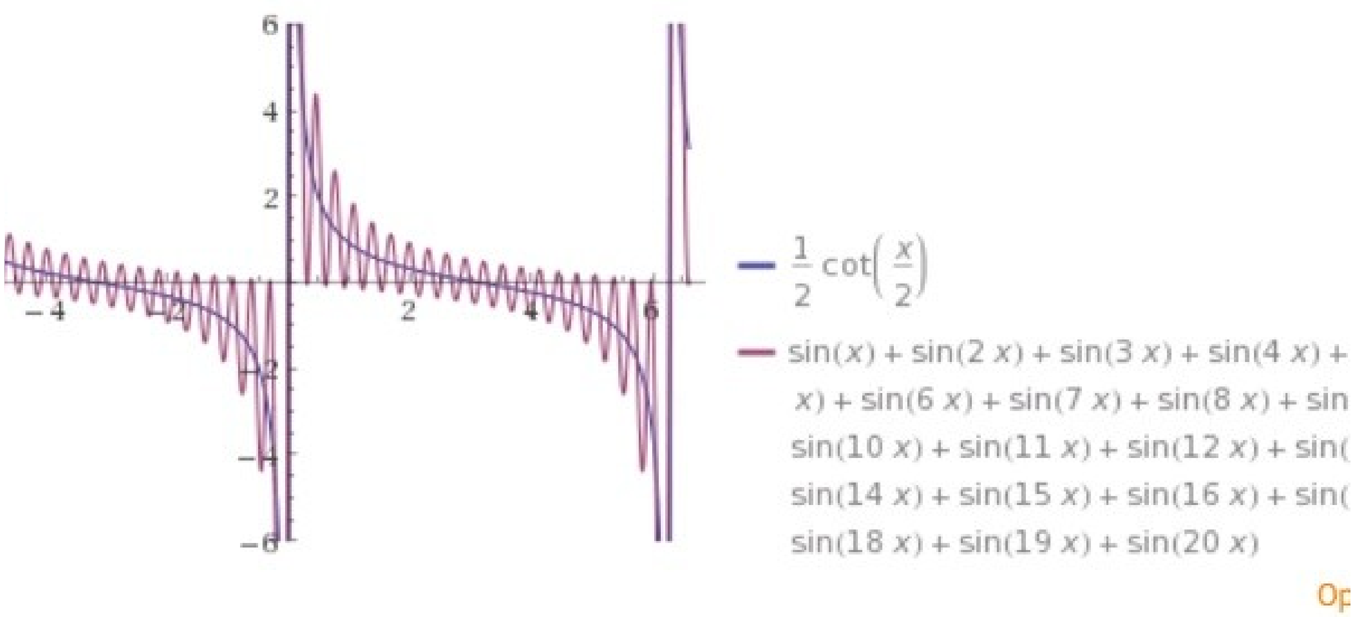
そのように考えれば「超函数として近い」(テスト函数をかけて積分した結果が近い)のような考え方も結構現実的であるということになります.

黒木玄 **Gen Kuroki**
@genkuroki

wolframalpha.com/input/?i=plot...

$\sum_{k=1}^{20} \sin(kx)$ と $(1/2)\cot(x/2)$ のグラフの比較

mathtod.online/media/ozpX8HQw2...



2017年06月10日 14:00 · Web · 0 · 0 · Webで開く

mathtod.online powered by Mastodon