



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on May 18

 $n \rightarrow \infty$ で

$$\frac{s(s+1)\cdots(s+n-1)}{n!} \sim \frac{n^{s-1}}{\Gamma(s)}.$$

たとえば $s = 1/2$ のとき、

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}, \\ \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

なので

$$\binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

これはWallisの公式と呼ばれている。

最初の公式は、 $n \rightarrow \infty$ で

$$\frac{n^s n!}{s(s+1)\cdots(s+n)} \rightarrow \Gamma(s)$$

と同値。さらに左辺の分子分母に $\Gamma(s)$ をかけて、ベータ函数に変換すると、次のように書き直される： $n \rightarrow \infty$ で

$$n^s B(s, n+1) \rightarrow \Gamma(s).$$

証明に続く



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on May 18

 $n^s B(s, n+1) \rightarrow \Gamma(s)$ の証明積分変数を $x = y/n$ と置換して、 $n \rightarrow \infty$ の極限を取ると、

$$\begin{aligned} n^s B(s, n+1) &= n^s \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^n dx \\ &= n^s \int_0^n \frac{y^{s-1}}{n^{s-1}} \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \frac{dy}{n} \\ &= \int_0^n y^{s-1} \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n dy \\ &\rightarrow \int_0^\infty y^{s-1} e^{-y} dy \\ &= \Gamma(s). \end{aligned}$$

たったこれだけの計算でWallisの公式の一般化であるガンマ函数の無限積表示が得られる。

高校では、無限区間の積分や二重の定積分を扱わないが、それらに対応できれば、形式的な計算レベルで高校レベルの難易度の計算でガンマ函数の無限積表示を出せる。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on May 18

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{s-1} \sin x \, dx \\ = \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s). \end{aligned}$$

たとえば $s = 1/2$ のとき

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

たとえば $s \rightarrow 0$ の極限を取ることによって

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}.$$

右辺の極限の計算で

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \\ = \frac{\sin(\pi s/2)}{s} \Gamma(s+1) \end{aligned}$$

を使った。

例として紹介した公式はよく教科書に載っているが、またしても、「ガンマ函数・ベータ函数ワールド」の風景の一部分を切り取って見ていたに過ぎないことがわかる。

パラメーターの数が増えたより一般的な公式の方が周囲の風景も見えるおかげで易しく見ることが多い。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

on May 18

補足：

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} e^{ix} \, dx = e^{\pi i s/2} \Gamma(s).$$

この公式は

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} z^{s-1} e^{-z} \, dz$$

で $z = -ix = e^{-\pi i/2} x$ と置いて、成分経路を90度回転させれば得られる。そのような計算の正当化はCauchyの積分定理による。



黒木玄 Gen Kuroki

@genkuroki

まとめ：以下の公式はガンマ関数やベータ関数に関するもっと一般的な公式の一部分を切り取って来たものに過ぎない。

公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{2^{-2n}}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Wallisの公式

$$\binom{2n}{n} 2^{-2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

Dirichlet積分

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Fresnel積分

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

返答連鎖で繋がっていないものを追加

mathtod.online/@genkuroki/1333...

2017年05月18日 14:03 · Web · ↻ 3 · ★ 4 · Webで開く



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki

まとめの続き

on May 18

より一般的な公式は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{2^{-2n}}{n+s} = B(s, 1/2),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^s n!}{\prod_{k=0}^n (s+k)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n^s B(s, n+1) = \Gamma(s),$$

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-ix} dx = e^{\pi i s/2} \Gamma(s).$$

こちらの一般的な公式の方が特殊化された場合の公式より易しい。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki
mathtod.online/@genkuroki/1337...

on May 18

訂正：このスレッドの上の方で「成分経路」となっているが、正しくは「積分経路」です。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki
少し上の方で例として紹介した公式に π や $\sqrt{\pi}$ が出て来る理由は

on May 18

$$B(1/2, 1/2) = \pi$$

およびそれと同値なGauss積分の公式

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

ここで

$$\Gamma(1/2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

$$B(1/2, 1/2) = \Gamma(1/2)^2$$

に注意。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki
mathtod.online/@genkuroki/1333...
mathtod.online/@genkuroki/1336...

on May 18

で解説した事柄を、大学1~2年生レベルの解析学のネタを多数収録した解説ノート

github.com/genkuroki/Stirling

に収録しておきました。

もちろん、mathtodonも引用してあります。

本や論文の謝辞に mathtodon という謎の文字列が現れる日も近いかも。

