黒木玄 Gen Kuroki
@genkuroki

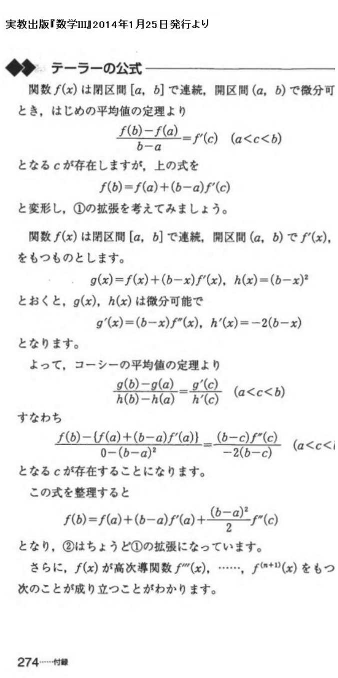
mathtod.online/@hidesato/19894…

テイラーの定理による近似の誤差の評価の仕方は実教出版の高校数学IIIの教科書にしっかり具体的数値計算例とともに載っています。

その議論はほぼ高木貞治『解析概論』の通りなので、『解析概論』も参照しておけば完璧だと思います。

高校で微積分を教えるためには『解析概論』に書いてあることはとても役に立つと思います。

mathtod.online/media/giuge6Wha… mathtod.online/media/mPAft5Yfx… mathtod.online/media/7crRHWEF_… mathtod.online/media/MEHqaKUwd…



実教出版『数学III』2014年1月25日発行より

◆◆ テーラーの公式

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可
とき，はじめの平均値の定理より

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\quad (a<c<b)$$

となる c が存在しますが，上の式を

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(c)$$

と変形し，①の拡張を考えてみましょう。

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で $f'(x)$,
をもつものとします。

$$g(x)=f(x)+(b-x)f'(x),\quad h(x)=(b-x)^2$$

とおくと，$g(x)$，$h(x)$ は微分可能で

$$g'(x)=(b-x)f''(x),\quad h'(x)=-2(b-x)$$

となります。

よって，コーシーの平均値の定理より

$$\frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)}=\frac{g'(c)}{h'(c)}\quad (a<c<b)$$

すなわち

$$\frac{f(b)-\{f(a)+(b-a)f'(a)\}}{0-(b-a)^2}=\frac{(b-c)f''(c)}{-2(b-c)}\quad (a<c<$$

となる c が存在することになります。

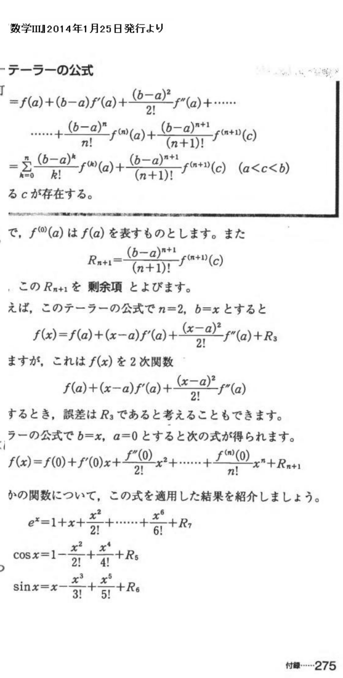
この式を整理すると

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}f''(c)$$

となり，②はちょうど①の拡張になっています。

さらに，$f(x)$ が高次導関数 $f'''(x)$，……，$f^{(n+1)}(x)$ をもつ
次のことが成り立つことがわかります。

274……付録



数学III』2014年1月25日発行より

テーラーの公式

$$=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\quad (a<c<b)$$

る c が存在する。

で，$f^{(0)}(a)$ は $f(a)$ を表すものとします。また

$$R_{n+1}=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

この R_{n+1} を **剰余項** とよびます。

えば，このテーラーの公式で $n=2$，$b=x$ とすると

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+R_3$$

ますが，これは $f(x)$ を2次関数

$$f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)$$

するとき，誤差は R_3 であると考えることもできます。

ラーの公式で $b=x$，$a=0$ とすると次の式が得られます。

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}$$

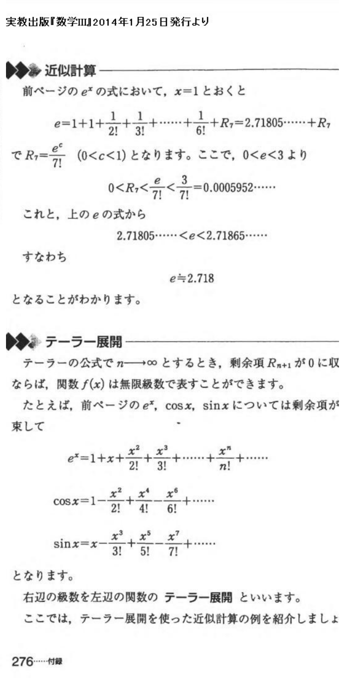
かの関数について，この式を適用した結果を紹介しましょう。

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^6}{6!}+R_7$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+R_5$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+R_6$$

付録……275



実教出版『数学III』2014年1月25日発行より

◆◆ 近似計算

前ページの e^x の式において，$x=1$ とおくと

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{6!}+R_7=2.71805\cdots\cdots+R_7$$

で $R_7=\dfrac{e^c}{7!}$ $(0<c<1)$ となります。ここで，$0<e<3$ より

$$0<R_7<\frac{e}{7!}<\frac{3}{7!}=0.0005952\cdots\cdots$$

これと，上の e の式から

$$2.71805\cdots\cdots<e<2.71865\cdots\cdots$$

すなわち

$$e \fallingdotseq 2.718$$

となることがわかります。

◆◆ テーラー展開

テーラーの公式で $n\longrightarrow\infty$ とするとき，剰余項 R_{n+1} が0に収
ならば，関数 $f(x)$ は無限級数で表すことができます。

たとえば，前ページの e^x，$\cos x$，$\sin x$ については剰余項が
束して

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots$$

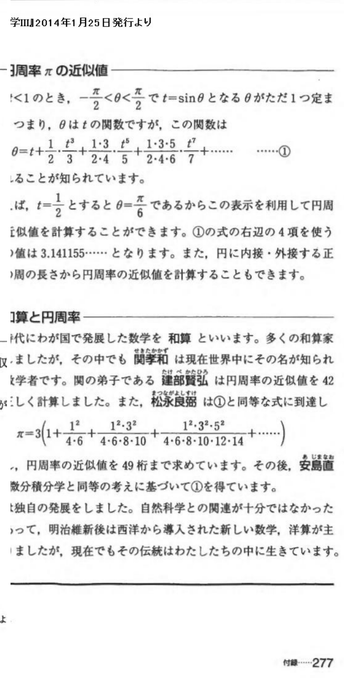
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots$$

となります。

右辺の級数を左辺の関数の **テーラー展開** といいます。

ここでは，テーラー展開を使った近似計算の例を紹介しましょ

276……付録



学III』2014年1月25日発行より

周率 π の近似値

<1 のとき，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で $t=\sin\theta$ となる θ がただ1つ定ま
つまり，θ は t の関数ですが，この関数は

$$\theta=t+\frac{1}{2}\cdot\frac{t^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{t^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{t^7}{7}+\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots①$$

ることが知られています。

ば，$t=\dfrac{1}{2}$ とすると $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ であるからこの表示を利用して円周
似値を計算することができます。①の式の右辺の4項を使う
値は 3.141155…… となります。また，円に内接・外接する正
周の長さから円周率の近似値を計算することもできます。

算と円周率

代にわが国で発展した数学を **和算** といいます。多くの和算家
ましたが，その中でも **関孝和** は現在世界中にその名が知られ
学者です。関の弟子である **建部賢弘** は円周率の近似値を42
しく計算しました。また，**松永良弼** は①と同等な式に到達し

$$\pi=3\left(1+\frac{1^2}{4\cdot6}+\frac{1^2\cdot3^2}{4\cdot6\cdot8\cdot10}+\frac{1^2\cdot3^2\cdot5^2}{4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14}+\cdots\cdots\right)$$

，円周率の近似値を49桁まで求めています。その後，**安島直**
微分積分学と同等の考えに基づいて①を得ています。
独自の発展をしました。自然科学との関連が十分ではなかった
って，明治維新後は西洋から導入された新しい数学，洋算が主
ましたが，現在でもその伝統はわたしたちの中に生きています。

付録……277

2017年05月30日 19:43 · Web · 0 · 4 · Webで開く

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki on May 30

本当はTaylorの定理の証明にはRolleの定理さえ必要ないです。

たとえば $f''(x)$ を積分することによって、

$$f'(x)=f'(a)+\int_a^x f''(x_1)\,dx_1$$

となり、これをさらに積分することによって、

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+R_2$$
$$R_2=\int_a^x\left[\int_a^{x_2}f(x_1)\,dx_1\right]dx_2$$

$f'''(x)$ など高階の導函数から出発しても同様です。

R_2 の積分項が近似の誤差を表わします。

$$|f''(\xi)|\leqq M\quad(a\leqq\xi\leqq x)$$

のとき、

$$|R_2|\leqq\left|\int_a^x\left[\int_a^{x_2}M\,dx_1\right]dx_2\right|$$
$$=M\frac{|x-a|^2}{2}$$

これで誤差の絶対値を上から評価できます。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 30

Rolleの定理を使った巧妙な証明は高校レベルの微積分をそこそこ理解している高校生にとっても苦しいと思う。

しかし、私がついさっき紹介した方法であれば「微分したものを積分すればもとに戻る」という微積分の最も基本的な考え方以外は本質的に何も使っていません。(部分積分さえ使っていない。)

なぜかこの方法が普及していない不思議。

たぶん、高木貞治『解析概論』的なやり方が普及し過ぎて、他の経路が忘れ去られているのだと思う。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 31

n 回不定積分する操作は

$$\int_a^x dx_n\int_a^{x_n}dx_{n-1}\cdots\int_a^{x_2}dx_1\,f(x_1)$$
$$=\int_a^x\left[\int_{x_1}^x dx_n\cdots\int_{x_1}^{x_3}dx_2\right]f(x_1)\,dx_1$$
$$=\int_a^x\frac{(x-x_1)^{n-1}}{(n-1)!}f(x_1)\,dx_1$$
$$=\int_a^x\frac{(x-\xi)^{n-1}}{\Gamma(n)}f(\xi)\,d\xi$$

と書ける。最後の式で n を整数とは限らない s に置き換えるとことによって、非整数回の不定積分

$$D^{-s}f(x)=\int_a^x\frac{(x-\xi)^{s-1}}{\Gamma(s)}f(\xi)d\xi$$

が定義される。

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki on May 31

適切な設定で適切に工夫すれば非整数 a について a 回微分が定義される。x に関する a 回微分を ∂^a と書くと、作用素の合成として

$$\partial^a x^{a+b} \partial^b = x^b \partial^{a+b} x^a$$

のようなYang-Baxter方程式のような関係式が成立する。

この公式は A_2 型の q-Serre関係式

$$f^2 g - (q+q^{-1}) fgf + gf^2 = 0,$$
$$g^2 f - (q+q^{-1}) gfg + fg^2 = 0$$

を満たす f,gに一般化される:

$$f^a g^{a+b} f^b = g^b f^{a+b} g^a.$$

この関係式は量子展開環の表現論的に意味を持ち、Verma関係式と呼ばれている。A_2 型の場合のVerma関係式は表現論を使わずに直接の計算で容易に導出可能。

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki on May 31

$q=1$ の場合の A_2 型の q-Serre関係式を $\partial = d/dx$ と x は満たしている。

$$[\partial, [\partial, x]] = 0,$$
$$[x, [x, \partial]] = 0.$$

これはとても基本的な話。

この手の話はパンルヴェ系の正準量子化の量子τ函数の構成に役に立つ。

テイラーの定理の剰余項は多重の不定積分で表されるが、そういう話はまわりまわって量子パンルヴェ系の量子τ函数の構成とも地続きで繋がっている。

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki on May 31

非整数回微分に興味を持った人は以下のリンク先を見ると良いと思います。:

ja.m.wikipedia.org/wiki/%E5%88...
mathworld.wolfram.com/Fraction...

黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki on May 31

非整数回微分の歴史に関する簡単な解説が
label2.ist.utl.pt/vilela/Curso...
にあります。

---

hidesato @hidesato on May 30

@genkuroki こちらは初めて見る証明ですが面白いですね。本当に特別なことをまったく使っていない。

次回の授業では具体的な関数を使って誤差評価を説明してみようと思います。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki on May 30

@hidesato そこまでできると私が大学1年生に出している試験問題を解けるようになってしまいそうですね。

私が出した試験問題は $\sqrt{9.9}$ を小数点以下2桁まで(本当は3桁までにするべきだった)を求める問題です。

$\sqrt{9.9} = 3\sqrt{1+0.1}$ あとは $(1+h)^{1/2}$ にテイラーの定理を適用。

hidesato @hidesato on May 30

@genkuroki 実教出版の数III教科書ですか。ウチにも見本があったと思うので明日確認します。

でもCauchyの定理から証明しているのですよね。ウチの生徒にそのままはちょっときびしいかなぁ。