黒木玄 **Gen Kuroki**
@genkuroki

Lindebergの方法による中心極限定理の証明

1. 準備

$f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の有限区間の外で 0 な滑らかな函数であるとする.
$|f'''(x)|/6$ は最大値を持つが、それは $\sqrt{M}$ 以下であるとする. Taylorの定理より

$$\begin{aligned}
&f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2} + C_{a,h}h^3,\\
&|C_{a,h}| \leqq \sqrt{M}.
\end{aligned}$$

A, H, K は独立な確率変数であり、$m = 1, 2, 3$ に対して $E[|H|^m], E[|K|^m] < \infty$ であるとし、$E[H] = E[K] = 0$, $E[H^2] = E[K^2] = 1$ と仮定する。

続く

2017年06月03日 21:10 · Web · 0 · 1 · Webで開く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Saturday at 9:11pm
このとき

$$\begin{aligned}
&E[f(A + H/\sqrt{n})]\\
&\quad = E[f(A)] + \frac{E[f''(A)]}{2n} + \frac{E[C_{A,H}]E[H^3]}{n\sqrt{n}},\\
&E[f(A + K/\sqrt{n})]\\
&\quad = E[f(A)] + \frac{E[f''(A)]}{2n} + \frac{E[C_{A,H}]E[K^3]}{n\sqrt{n}},\\
&|E[C_{A,H}]| \leqq \sqrt{M}
\end{aligned}$$

なので, 必要なら M をより大きくして、$|E[H^3]|, |E[K^3]| \leqq \sqrt{M}$ とすると、

$$|E[f(A + H/\sqrt{n})] - E[f(A + K/\sqrt{n})]| \leqq \frac{M}{n\sqrt{n}}.$$

Taylorの定理しか使わずにこの評価を示せた。M は f, H, K で決まる。

続く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Saturday at 9:11pm

2. 独立同分布確率変数列の比較

X_k, Y_k はそれぞれ独立同分布確率変数列であるとし、それらの全体も独立であるとし、$m = 1, 2, 3$ に対して、$E[|X_k|^m], E[|Y_k|^m] < \infty$ であるとし、$E[X_k] = E[Y_k] = 0$, $E[X_k^2] = E[Y_k^2] = 1$ と仮定する。このとき上の評価を

$$A = \frac{\sum_{j=1}^{k-1} X_j + \sum_{j=k+1}^{n} Y_j}{\sqrt{n}},$$

$H = X_k, K = Y_k$ に適用すると、

続く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Saturday at 9:13pm

$$\left|E\left[f\left(\frac{\sum_{j=1}^{k} X_j + \sum_{j=k+1}^{n} Y_j}{\sqrt{n}}\right)\right] - E\left[f\left(\frac{\sum_{j=1}^{k-1} X_j + \sum_{j=k}^{n} Y_j}{\sqrt{n}}\right)\right]\right|$$
$$\leqq \frac{M}{n\sqrt{n}}.$$

これらを $k = 1, \ldots, n$ について足し上げ、三角不等式を使うと、

$$\left|E\left[f\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{\sqrt{n}}\right)\right] - E\left[f\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} Y_j}{\sqrt{n}}\right)\right]\right| \leqq \frac{M}{\sqrt{n}}.$$

絶対値の内側の2つの期待値は収束するとすれば同じ値に収束する。

続く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Saturday at 9:14pm

3. 中心極限定理

さらに Y_k が標準正規分布に従うならば簡単な計算で

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} Y_j}{\sqrt{n}}$$

も標準正規分布に従うことがわかる。ゆえに N を標準正規分布に従う確率変数だとすると、上の2の結果より、

$$\lim_{n\to\infty} E\left[f\left(\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{\sqrt{n}}\right)\right] = E[f(N)].$$

中心極限定理のより精密な結果に関する解説については次のリンク先を見て欲しい。

terrytao.wordpress.com/2015/11…

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Saturday at 9:19pm
Lindebergのexchange methodによる中心極限定理の証明の利点はTaylorの定理のような易しい定理しか使っていないこと。

$1/\sqrt{n}$ の3乗の n 倍が $1/\sqrt{n}$ になり、$n \to \infty$ で 0 に収束することから、中心極限定理が従うという話。

本当はもっと精密なことが言えるが面倒なので書くのを止めた。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki Saturday at 9:33pm
私が参照した大学学部生向けの確率統計の教科書に書いてある中心極限定理の説明は「モーメント母函数を使う」「特性函数を使う」のどちらかであることが多く、それらは本質的にFourier解析に帰着する方法です。

しかし、私の経験ではFourier解析を前提にすると、直観的に納得してもらい難くなるような気がします。

そこをうまく説明するのが解説力なのかもしれませんが、結構難しい。

それに対して、Lindebergの方法は本質的にテイラーの定理しか使っておらず、独立同分布確率変数列 X_k に対する

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$$

が、法収束するならば、その収束先が X_1 の期待値と分散だけに依存することを示します。

証明も易しく、色々示唆的な感じがします。

この辺、どうなんでしょうかね？