



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki  
[mathtod.online/@noranekozawa/2...](https://mathtod.online/@noranekozawa/2...)

Thursday at 7:41am

に「補足」。可測性は弱い条件なので、微分と積分の順序交換を保証しません。

Lebesgueの収束定理を使って示される次の結果は便利です。教科書にもよく載っている。

定理:  $f(t, x)$  は  $(a, b) \times \mathbb{R}$  上の関数であり、各  $t \in (a, b)$  ごとに  $x$  について  $\mathbb{R}$  上可積分であり、各  $x \in \mathbb{R}$  ごとに  $t$  について偏微分可能であるとする。このとき、 $\mathbb{R}$  上のある非負実数値可積分関数  $g(x)$  で任意の  $(t, x) \in (a, b) \times \mathbb{R}$  について

$$|f_t(t, x)| \leq g(x)$$

を満たすものが存在するならば、 $F(t) := \int_{\mathbb{R}} f(t, x) dx$  は微分可能になり、

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}} f_t(t, x) dx.$$

証明に続く。



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki  
 証明: 平均値の定理より

Thursday at 7:43am

$$\left| \frac{f(t+h, x) - f(t, x)}{h} \right| = |f_t(t + \theta h, x)| \leq g(x).$$

ここで  $0 < \theta < 1$ . ゆえにLebesgueの収束定理より、

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t+h, x) - f(t, x)}{h} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h, x) - f(t, x)}{h} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_t(t, x) dx. \end{aligned}$$

1つ目の等号で積分の線形性を使い、2つ目の等号でLebesgueの収束定理を使った。q.e.d.



黒木玄 Gen Kuroki @genkuroki  
 理解度確認の問題:  $f(\alpha, x) = e^{-\alpha x^2}, \alpha > 0$  について

Thursday at 7:58am

$$\frac{d}{d\alpha} \int_{\mathbb{R}} f(\alpha, x) dx = \int_{\mathbb{R}} f_{\alpha}(\alpha, x) dx$$

を証明せよ。

こういう問題がノータイムで解けるようになると(ノータイムで解けることは結構重要)、厳密性を気にしながらでも、スイスイ積分と微分を交換できるようになります。

上で使ったLebesgueの収束定理の証明もそう難しくないです。Lebesgue積分の定義が終了するところまでの議論は細々としていてちょっと面倒なのですが、それが終われば単調収束定理の証明はほぼ自明で、単調収束定理からFatouの補題を出すのも簡単で、Lebesgueの収束定理はFatouの補題の系です。教科書に全部書いてある。次のリンク先に証明の素描があります。

[mathtod.online/users/genkuroki...](https://mathtod.online/users/genkuroki...)



黒木玄 Gen Kuroki

@genkuroki

そうそう、厳密性を気にする態度には結構注意が必要。

(1) 極限の順序交換はいつでもできると思って気楽に計算する立場はおおありです。計算しておかした結果が出て来なければどんどん順序交換して良い。

(2) 上に述べたように、ノータイトムで極限の順序交換を心の中で証明できる技量を身に付けるのもあります。これには大変な努力が必要。

ダメなのは中途半端な態度。

厳密性が気になるせいで計算ができなくなるようだとダメ。数学を勉強したせいで計算力が下がるのはちょっとありえない。

あと厳密性を気にしているような態度で近似的にも全然正しくない主張をするのもダメ。

初心者のうちは極限の順序交換はいつでもできるかのような態度で計算した方が良いと思う。

厳密性が気になるなら、計算力に害を与えないように注意深く勉強した方が良いでしょう。

以上の点で数学科における伝統的教育はひどく失敗していると思う。

2017年06月08日 08:12 · Web · 🔄 1 · ★ 8 · Webで開く

mathtod.online powered by [Mastodon](#)