黒木玄 **Gen Kuroki**
@genkuroki

mathtod.online/@satie/263761
リンク先と同じことを

Python SymPy

ではなく、

Julia SymPy in Jupyter Notebook

でやってみた。

nbviewer.jupyter.org/urls/genk…

ipynbファイル(ノートブックのソース)は

genkuroki.github.io/documents/…

からダウンロードできます。

2017年06月16日 21:56 · Web · 0 · 1 · Webで開く

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 20 hours ago
Julia 経由で SymPy 使うメリットはほとんどないが、JuliaBoxにアップロードすれば iPad 経由でも遊べるという利点はある。

JuliaBox は何のセッティングもせずにブラウザだけで Julia を使えるサービス。結構使っている。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 13 hours ago
Julia のチートシート
github.com/QuantEcon/QuantEcon…

Pythonチートシート
github.com/QuantEcon/QuantEcon…

github.com/QuantEcon/QuantEcon…
より

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 5 hours ago
しまった！次のリンク先の返答先は誤り。

mathtod.online/@genkuroki/2815…

次のリンク先の情報はとてもありがたかったです。さんきゅ！

mathtod.online/@antimon2/28194...

昔、オープン戸田格子の解とその離散化の解が離散時間でぴったり一致することをOctaveで数値計算して確認したときのメールを発掘できたので、次のリンク先で公開しておきました。すでに証明されているwidely knowな数学的結果であっても数値的に確認するのは楽しいです。

genkuroki.github.io/documents/...

オープン戸田格子は所謂(古典)可積分系の典型例で、Lax形式で微分方程式を書けます。その解の整数時間への制限はコレスキー分解の順序をひっくり返してかける操作で定義される離散時間発展にぴったり一致します。

専門家にはよく広く知られているこの事実を数値的に確認した。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 5 hours ago

大雑把に説明すると、オープン戸田格子は1次元空間に並んでいる質点達が指数函数的な反発力で遠ざかって行く様子を記述しています。

時刻→∞で、質点達はどんどん離れ、各質点の運動量は一定に近付きます。

こういうことは物理的に直観的に明らかな話。

オープン戸田格子が独特なのは、その運動方程式が、3重対角行列 L に関する

$$\frac{dL}{dt} = [M(L), L]$$

型の微分方程式で表示できることです(Lax表示)。

L の対角成分は質点達の運動量が並び、質点の位置が離れると非対角成分は0に近付くようになっています。

上の微分方程式で L の固有値は保存され、時間が進むと質点達の位置は離れるので、L は対角行列に近付きます。すなわち、L が微分方程式のフローで対角化される。

微分方程式の解の整数時間による時間発展は $X = e^L$ のコレスキー分解の積の順序をひっくり返す操作で実現できます。

コレスキー分解の繰り返しで固有値を求める方法はオープン戸田格子の離散化になっていたわけです。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 5 hours ago

自分に課した演習問題の一つが同じことをJuliaBox上で実行すること。のんびりやって行きます。

誰か偉い人が答えを教えてくれるのでもいいです(笑)。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 5 hours ago

2つ目の演習問題も可積分系と関係があります。ただし無限次元になりますが。

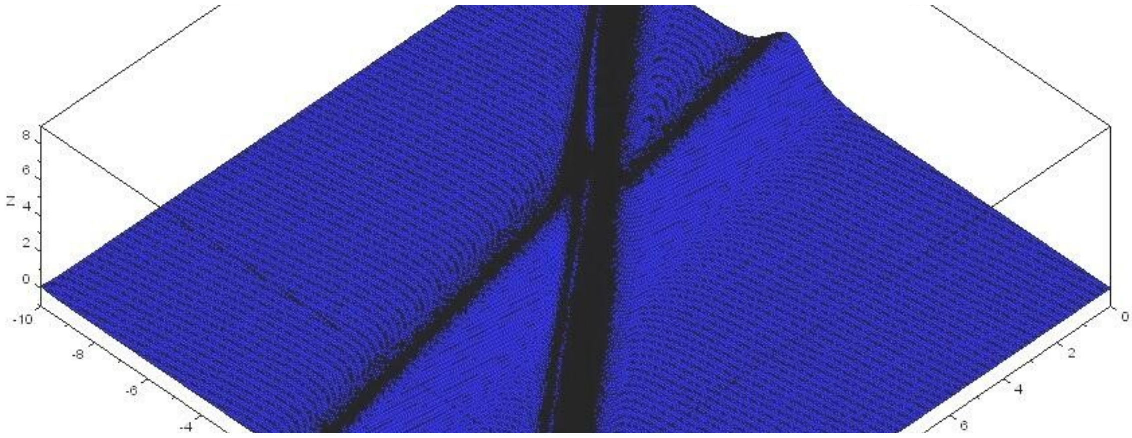
学生時代にKdVなどのソリトン方程式の数値計算の話を聞いて、これは大変面白そうな遊びだと思ったのですが、昔は今と違って気軽に数値計算の環境を手に入れられなかった。

KdV方程式については、数年前に高速フーリエ変換を使った十数行のコードで数値計算を実行できることを知ったので、scilabでそれを実行したときのコードが次のリンク先で公開されています。計算結果が添付画像。

twitlonger.com/show/n_1s0rtqt

これもJuliaBox上で実現したい。(他人にデモるときに自分のパソコンを持ち運ぶ必要がない方がありがたい。)

mathtod.online/media/iRftDEvfn...



黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 5 hours ago

3つ目の演習問題も広い意味での可積分系に関係があります。

それは完全WKBの話。

完全WKBでは1次元シュレーディンガー方程式を複素領域で考えて、ポテンシャル $Q(z)$ の平方根の不定積分の虚部が0になるという条件でStokes曲線を定義します。z は複素数でStokes曲線は複素平面上の曲線になります。

実際には $\sqrt{Q(z)}$ (のブランチの一つ)に対応するベクトル場を描ければ十分です。

一般に正則函数 $f(z) = u(z) + iv(z)$ に対応するベクトル場は

$$(x, y) \mapsto (u(x+iy), -v(x+iy))$$

で定義されます。虚部の成分をマイナス1倍することが大事なポイントです。

このようにベクトル場(流れ)を定義しておくと、正則函数が満たすコーシー・リーマンの方程式はベクトル場が完全流体(湧き出し無し、渦無し)の流れであることと同値になります。

というわけで、ベクトル場をJukiaBox上でプロットしたい。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 5 hours ago scilabで複素平面上にベクトル場を描いて遊んでいた様子は

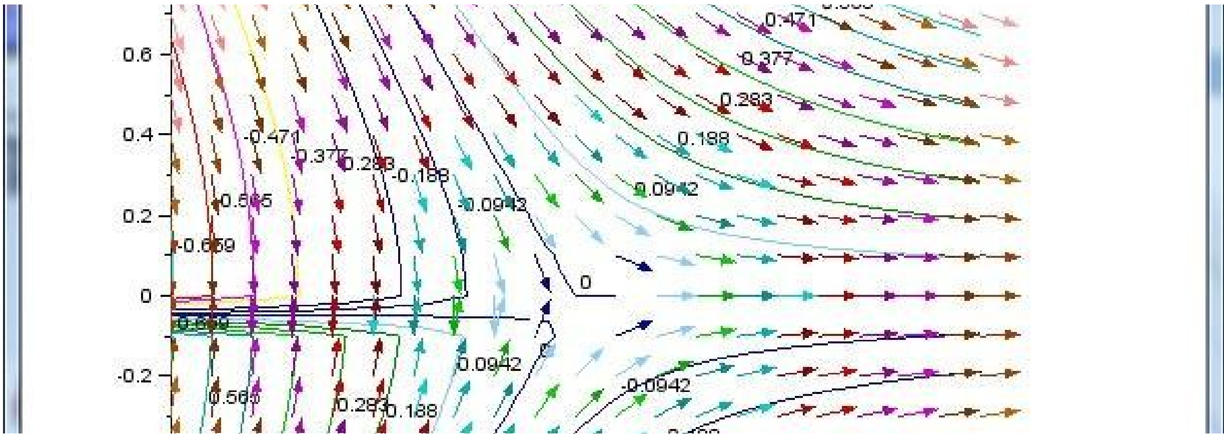
togetter.com/li/636897

にまとめられています。添付画像はそのうちの画像の一つ。

添付画像は
twitter.com/genkuroki/status/4...
より

$Q(z) = z$ (Airy方程式のケース)に対する $\sqrt{Q(z)}$ のベクトル場とその不定積分の虚部の等高線を重ねたもの。高さ0の等高線がStokes曲線です。

mathtod.online/media/fNcMR_3mT...



黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 4 hours ago
twitter.com/genkuroki/status/4...
より

面白いのはポテンシャル $Q(z)$ が二位の極(シュレーディンガー方程式の確定特異点になる)を持つケースです。

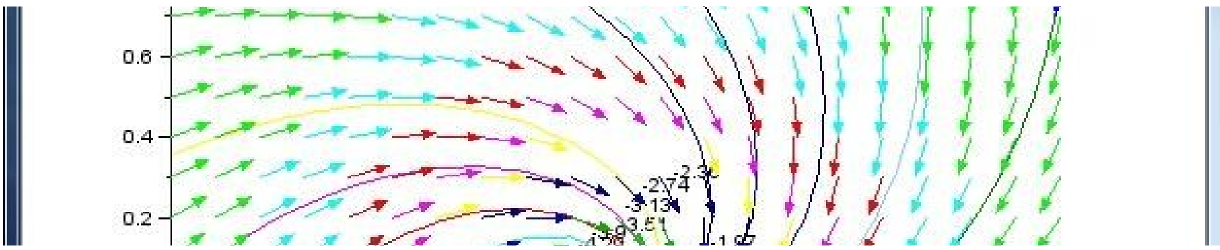
添付画像は $\sqrt{Q(z)} = (-1+i)/z$ の場合のベクトル場とその不定積分の虚部の等高線を重ねた図。

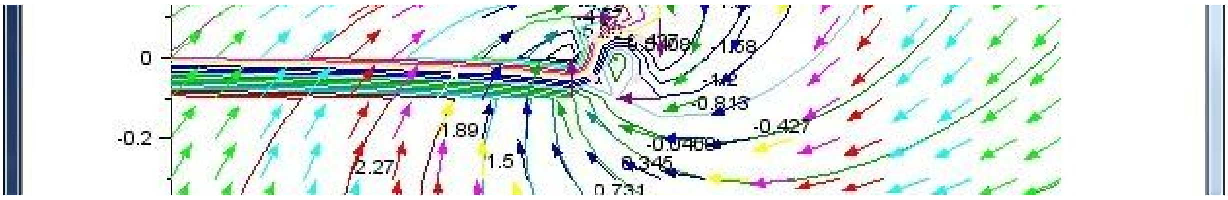
Stokes曲線は渦巻きになります。こうなるケースが無限席が登場する「壁越え公式」と関係あるらしい。集中講義で岩木さんに教えてもらいました。

Stokes曲線の定義を含む完全WKB解析については、私がとった岩木耕平さんの集中講義のノートを見て下さい。次のリンク先で公開してあります。

genkuroki.github.io/documents/...

mathtod.online/media/nVFi---lM...





黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 4 hours ago

WKB近似は、プランク定数 $\hbar$ で解を形式的に展開して、最初の方の項だけで真の解を近似する方法です。

完全WKB解析では、まず、$\hbar$ に関する級数展開のすべての項を考えて、$\hbar$ のLaurent級数の形で表示された形式開を作ります。

ところが、その形式解の $\hbar$ にはどのような 0 ない数を代入しても発散する。

形式解は発散級数になってしまいますが、Borel総和法のテクニックで真の解を作ることができます。

こういう話なので、完全WKB解析に関しては将来的には学部生向けの教科書に載せてもいいくらい、基本的な解析の話だと私は思います。

岩木耕平さんの集中講義は非常に聴き易くてよかったです。説明が非常にうまい。しかも、どのような質問にも適切な回答が返って来る。
genkuroki.github.io/documents/…

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 4 hours ago

日本語の入力が雑でしたね。いつものことなので、みんな気にしなくなっているような気もしますが、一応訂正。

「形式開」→「形式解」
「無限席」→「無限積」

私は数年前から有限的な壁越え公式ではなく、無限積が出て来る壁越え公式に少し興味を持っていて、完全WKB解析の話もその辺の話ともろに関係している。

$Q(z) = z$ のような変わり点をうまく使うとペンタゴン恒等式のタイプの壁越え公式が得られ、$Q(z) = a/z^2$ のような確定特異点をうまく使うと $A_1^{(1)}$ 型の無限積が出て来る壁越え公式も出て来るのだそうです。

肝腎の imaginary roots の部分もきちんと処理できていました。

real rootsに対応する無限積はパラメーターをちょっと変えるだけで無限に渦巻きが生じることから出て来る。

例えば原点の周囲を周期的に回転している流れに本の少しだけ原点での吸い込みの項を挿入すると、その項が小さければ小さいほどたくさん巻き付くタイプの渦ができます。吸い込みが弱いと原点に近付くために余計に周回しなければいけなくなる。

以上は最先端の数学研究の話。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki an hour ago

ついさっき気付いたのですが、

cocalc.com/

でもJuliaを使えますね。

CoCalcはSageMathCloudで、数式処理ソフトのSageを誰でも使えるサイトなのですが、ipynbにも対応していて、PythonやJuliaも使えますね。

Juliaのバージョンは0.5.0でした。

Pythonも使える点が結構ありがたいかも。

さらにLaTeXも使えるようです。

色々使えます。こういうことに気付いたのはついさっきなので、詳しいことはまだよくわかりません。

みんなで使ってみて情報を交換するといいかも。

黒木玄 **Gen Kuroki** @genkuroki 42 minutes ago

cocalc.com/

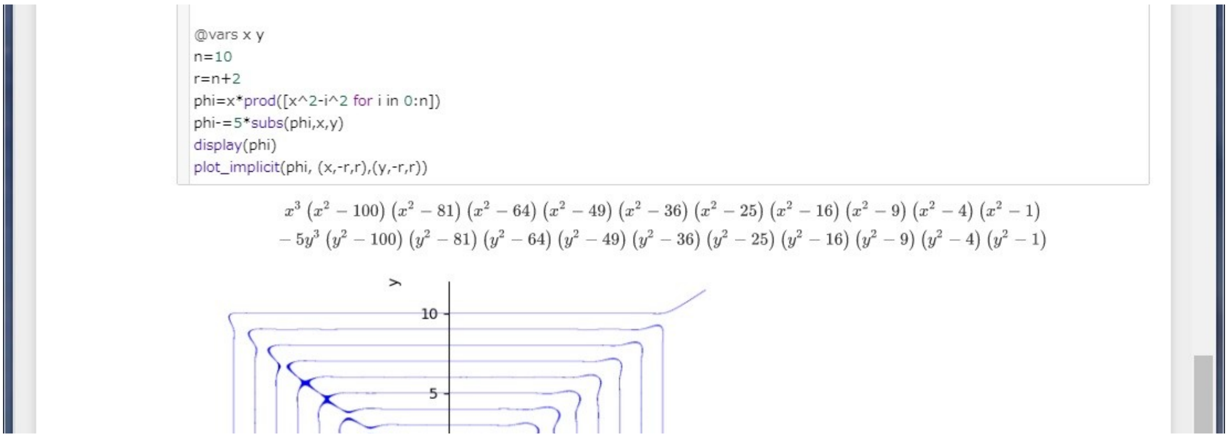
では「無料で使うと制限がきついから有料版も使ってね」のようなメッセージが出るのですが、SageMath、Python、Juliaなどを試しに初めて使ってみるにはとても良いサイトかもしれません。

添付画像に SymPy を Julia で使った例を貼りつけておきます。

添付画像のようなことを、手元のパソコンに何もインストールしなくても、ブラウザ経由でできるということです。

これいいよなあ。「自分が子供のときからこういうのがあったなら！」と思います。

mathtod.online/media/zD8Lfl8kt…



mathtod.online powered by Mastodon