

モノドロミー保存変形の量子化の現状と今後

黒木 玄

2003年11月10,21日微修正 (2003年11月8日作成)

目次

1	量子化が構成されている場合	1
1.1	複素射影直線上の確定特異点型有理接続の変形	1
1.2	無限遠点だけに rank 1 の不確定特異点を持つ有理接続の変形	3
1.3	Adler-Noumi-Yamada 系	3
1.4	Noumi-Yamada の affine Weyl 群作用の q 差分類似	4
2	今後の方針について	4
A	付録: 差分 Schlesinger 方程式について	6

この文書の由来

これは近所の友人たちへの以下の先頭部分を持つメールの TeX 化である.

Date: Sat, 8 Nov 2003 17:50:40 +0900 (JST)
 From: Kuroki Gen <kuroki@math.tohoku.ac.jp>
 Message-Id: <200311080850.RAA22254@sakaki.math.tohoku.ac.jp>
 Subject: On quantization of isomonodromic deformation equations

昨日、君に 30 分程しゃべった話をこちらにも書いておきます。
 (今月の 25 日に名古屋でしゃべる話の subset になる可能性大)

1 量子化が構成されている場合

1.1 複素射影直線上の確定特異点型有理接続の変形

Schlesinger 方程式 (複素射影直線上の確定特異点型有理接続の連続的なモノドロミー保存を特徴付ける方程式) の量子化は Knizhnik-Zamolodchikov (KZ) 方程式である. 変形される classical L -operator (有理接続) は次の通り:

$$L = \frac{\partial}{\partial z} - \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{z - z_i}, \quad A_i \in M_m(\mathbb{C}).$$

この L の確定特異点は $z = z_1, \dots, z_n, \infty$ にある. Schlesinger 方程式の独立変数は特異点の位置 z_1, \dots, z_n である.

量子化に関する文献:

- Harnad, J., Quantum isomonodromic deformations and the Knizhnik–Zamolodchikov Equations, hep-th/9406078
- Reshetikhin, N., The Knizhnik-Zamolodchikov system as a deformation of the isomonodromy problem, Lett. Math. Phys. 26 (1992), no. 3, 167–177

注意 1.1 Reshetikhin の論文では L が不確定特異点を持つ場合に一般化されている. しかし, 変形方程式の独立変数は特異点の位置だけである. L が不確定特異点を持つ場合には各特異点での形式解を変形するパラメーターも変形方程式の独立変数になり得る. \square

注意 1.2 Schlesinger 方程式の量子化は KZ 方程式の形ですでにできているが, その離散的対称性 (Schlesinger 変換) の量子化はまだ何もできていないように思われる. \square

注意 1.3 KZ 方程式は共形場理論の立場からジーンズが 1 以上のコンパクト Riemann 面上に拡張されている. 楕円曲線上では Wess-Zumino-Witten model から得られる Knizhnik-Zamolodchikov-Bernard (KZB) 方程式と twisted Wess-Zumino-Witten model から得られる楕円 KZ 方程式の二種類が得られ, ジーンズ 2 以上では KZB 方程式の一般化が Wess-Zumino-Witten model から得られる. それらの方程式はジーンズが 1 以上のコンパクト Riemann 面上の確定特異点型接続のモノドロミー保存変形方程式の量子化になっている. それらの結果も非常に興味深いのだが, 昨日は面倒だったので何も触れなかった. \square

注意 1.4 Schlesinger 方程式は差分類似 (Borodin, math.CA/0209144) と q 差分類似 (線形常 q 差分方程式のモノドロミー保存変形について Borodin が別の論文を書くと言っているがまだ出ていない) を持つ. KZ 方程式も同様に差分類似 (Yangian を用いて構成される差分 KZ 方程式) と q 差分類似 ((affine) U_q を用いて構成される q 差分 KZ 方程式) を持つ. KZ 方程式の差分および q 差分類似は Schlesinger 方程式の差分および q 差分類似の量子化になっている. この話題も非常に面白いのだが昨日は省略した. \square

注意 1.5 様々な系の関係を理解するためには次のような表をたくさん書くとわかり易くなるかもしれない.

	差分版	連続版
量子版	差分 KZ 方程式	KZ 方程式
古典版	差分 Schlesinger 方程式	Schlesinger 方程式

これはモノドロミー保存変形方程式およびその量子化に関する表だが, “critical level” を考えることによって可積分系 (スペクトル保存変形方程式) に関する表に移ることもできる. このような作業を続けて行けばモノドロミー保存変形と可積分系たちの統一的世界が見えて来ることになる. \square

1.2 無限遠点だけに rank 1 の不確定特異点を持つ有理接続の変形

無限遠点だけに rank 1 の不確定特異点を持つ複素射影直線上の理接続の連続的なモノドロミー保存を特徴付ける方程式の量子化は KZ 方程式を少し拡張した方程式になる. 変形される classical L -operator は次の通り:

$$L = \frac{\partial}{\partial z} - \left[A + \sum_{i=1}^n \frac{B_i}{z - z_i} \right], \quad A, B_i \in M_m(\mathbb{C}).$$

通常 A は generic な対角行列に取り, L の変形パラメーターとして generic な対角行列 A の対角成分と z_1, \dots, z_n を取る.

量子化に関する文献:

- Babujian, H. M. and Kitaev, A. V., Generalized Knizhnik-Zamolodchikov equations and isomonodromy quantization of the equations integrable via the inverse scattering transform: Maxwell-Bloch system with pumping, J. Math. Phys. 39 (1998), no. 5, 2499–2506
- Felder, G., Markov, Y., Tarasov, V., Varchenko, A., Differential equations compatible with KZ equations, math.QA/0001184

他にもたくさんある.

注意 1.6 この場合は, L の特異点は原点と無限遠点だけであり, 原点は確定特異点で無限遠点は rank 1 の不確定特異点である場合

$$L = z \frac{\partial}{\partial z} - [Az + U], \quad A, U \in M_m(\mathbb{C})$$

を含んでいる. この L は AKNS hierarchy の similarity reduction から自然に得られる. (AKNS hierarchy は NLS hierarchy を特別な場合として含む.) \square

1.3 Adler-Noumi-Yamada 系

次の形の有理接続のモノドロミー保存変形方程式の量子化は Nagoya, H. によって構成された:

$$L = z \frac{\partial}{\partial z} - [\Lambda z^2 + \text{diag}(f_1, \dots, f_m)\Lambda z + \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)].$$

ここで $\Lambda = E_{12} + \dots + E_{m-1,m} + E_{m,1}$ である. この形の L の特異点は原点と無限遠点だけであり, 原点は確定特異点であり, 無限遠点は rank 2 の不確定特異点である.

量子化に関する文献:

- 名古屋創, On the quantized Noumi-Yamada systems, 数理研講究録に出る予定の日本語の原稿, 2003年10月30日, <http://www.math.tohoku.ac.jp/~sa1m19/> で取得可能

注意 1.7 このケースの L のモノドロミー保存変形方程式は $A_{m-1}^{(1)}$ 型の modified Drinfeld-Sokolov hierarchy の similarity reduction から得られる. $m = 3$ のとき, 変形方程式は V. E. Adler と Noumi-Yamada によって独立に得られた Painlevé IV の対称形式に一致する. Noumi-Yamada は一般の m に対する変形方程式の Hamiltonian structure を構成した. そして, 最近 Nagoya によって Noumi-Yamada の Hamiltonian structure がほぼ straightforward に量子化されることが示された. \square

注意 1.8 この場合には上の第 1.1 節と第 1.2 節の場合と違って, 変形方程式の離散的対称性 ($A_{m-1}^{(1)}$ 型の affine Weyl 群の作用) も量子化されている (Nagoya). \square

問題 1.9 上の第 1.1 節と第 1.2 節の場合の離散的対称性の量子化を構成せよ. 量子化の例を構成するだけでも良い. \square

注意 1.10 Noumi-Yamada の仕事は Kikuchi, T. らによって一般化された Drinfeld-Sokolov hierarchy の場合に拡張されている. \square

1.4 Noumi-Yamada の affine Weyl 群作用の q 差分類似

上の第 1.3 節のケースの affine Weyl 群作用の q 差分類似の量子化は Hasegawa によって構成された.

公開された文献は存在しないが, 次の報告がなされている:

- Hasegawa, K., Deforming Kajiwara-Noumi-Yamada's rational representation of Weyl groups, a talk given at the Newton Institute, April 2001

注意 1.11 Hasegawa によって量子化された affine Weyl 群作用の対称性を持つ量子化された変形方程式はまだ構成されていない. \square

問題 1.12 それを構成せよ. \square

2 今後の方針について

私を知る限りにおいて, 連続的なモノドロミー保存変形方程式もしくは離散的なモノドロミー保存変換の量子化が構成されているのは以上の場合だけである.

問題なのはモノドロミー保存変形および変換の「縦作用」の量子化である.

「横作用」の方は共形場理論における Sugawara 構成を用いて得られる Virasoro 代数の作用によって構成可能である. その差分および q 差分類似の構成は Sugawara 構成の一部分の差分もしくは q 差分類似の構成によって可能になる. 「横作用」の構成は基本的に KZ 方程式とその拡張 (差分もしくは q 差分類似やジーナスが 1 以上の場合への一般化など) によって得られる.

それに対して「縦作用」の構成に関してはまだ処方箋がはっきりしていない. (もしかしたらもう少し考えればわかる可能性がある.) 「縦作用」の例は, 不確定特異点における接続の形式解の変形や Schlesinger 変換のような離散的な変換である. 「縦作用」に関しては古典の場合においても Hamiltonian structure がはっきりしていない. 第 1.2 節と第 1.3 節の場合には連続的な「縦作用」の Hamiltonians が古典の場合にわかっているから量子化が可能になった.

連続的な「縦作用」の量子化ができているのは, 第 1.2 節の無限遠点だけに rank 1 の不確定特異点を持つ場合, 第 1.3 節の Nagoya が扱った場合 (この場合は無限遠点に rank 2 の不確定特異点が出て来る) の 2 つしかないように思われる.

離散的な「縦作用」の量子化ができているのは, 第 1.3 節の Nagoya が扱った場合とその q 差分類似の Hasegawa が扱った場合だけであるように思われる. (実際には Hasegawa

の構成の方が先であり, Nagoya はそれを参考にした.) Hasegawa が構成した affine Weyl 群作用を「縦作用」とみなすとき, 「横作用」は Hasegawa の affine Weyl 群作用を対称性として持つ系になる. そのような系は構成されていないので Hasegawa の場合では「横作用」の方が構成されていないことになる.

個人的な意見では「縦作用」だけではなく「横作用」に関しても, Hasegawa が扱った場合を量子群の立場からできるだけ一般化する方向で考えるのが良いように思われる.

私が重要だと考えている手がかりは, 「横作用」に関しては U_q の universal R -matrix であり, 「縦作用」に関して U_q への braid 群の作用である.

U_q への braid 群の作用は Hopf 自己同型を与えていないが, (量子群の世界ではよくあることだが) 「ほとんど」 Hopf 自己同型を与えている. すなわち, U_q の coproduct を Δ と書き, Weyl 群の simple reflection の作用を s_i と書き, U_q の新たな coproduct を

$$\Delta_i(x) := (s_i \otimes s_i)^{-1} \Delta(s_i x)$$

と定義すると, ある $\mathcal{F}_i \in U_q \otimes U_q$ が存在して,

$$\Delta_i(x) = \mathcal{F}_i \Delta(x) \mathcal{F}_i^{-1} \quad (1)$$

が成立する. (\mathcal{F}_i は universal R -matrix \mathcal{R} 中の simple root α_i に対応した因子に取れる.) この結果は U_q が「ほとんど」余可換であるという事実

$$\Delta'(x) = \mathcal{R} \Delta(x) \mathcal{R}^{-1} \quad (2)$$

の類似になっている. ここで $\Delta'(x)$ は $\Delta(x) \in U_q \otimes U_q$ のテンソル積の順序をひっくり返したものである.

Universal L -operator \mathcal{L} を $A_q := U_q^*$ と U_q のテンソル積 $A_q \otimes U_q$ の canonical element と定める. s_i の U_q への作用が誘導する \mathcal{L} の第 0 成分 (それは A_q の元) への作用をも s_i と書くと, (1) は次のように書き直される:

$$\mathcal{F}_i^{12} \mathcal{L}^{01} \mathcal{L}^{02} = s_i^{-1} (s_i(\mathcal{L}^{01}) s_i(\mathcal{L}^{02})) \mathcal{F}_i^{12}. \quad (1')$$

これは (2) を書き直して得られる “ $RLL = LLR$ ” 型の関係式

$$\mathcal{R}^{12} \mathcal{L}^{01} \mathcal{L}^{02} = \mathcal{L}^{02} \mathcal{L}^{01} \mathcal{R}^{12} \quad (2')$$

の類似になっている.

後者の (2') を \mathcal{L} が 2 つ以上ある場合 (local \mathcal{L} が n 個ある場合) に拡張して具体的な表現を考えると, R -matrix を用いて q -KZ 方程式の Hamiltonians を構成できる. つまり (2') は「横作用」の構成のキーになっている.

それでは (1') を \mathcal{L} が 2 つ以上ある場合に拡張して具体的な表現を考えると何が得られるのだろうか? (1') は affine Weyl 群の「横作用」の構成のキーになっているのではなからうか? いずれにせよ次の問題は非常に基本的であると考えられる.

注意 2.1 (1') と Hasegawa が構成した affine Weyl 群作用はどのように関係しているか? \square

A 付録: 差分 Schlesinger 方程式について

Borodin の差分 Schlesinger 方程式は n 個の $m \times m$ 行列全体の組のなす空間への $A_{n-1}^{(1)}$ 型の拡大 affine Weyl 群の有理作用を用いて構成される. その作用は行列係数の多項式の因数分解に関する次の定理を用いて構成される.

定理 A.1 generic な $m \times m$ 行列の n 組 (X_1, \dots, X_n) と置換 $\sigma \in S_n$ に対して,

$$(z - X_1) \cdots (z - X_n) = (z - Y_{\sigma(1)}) \cdots (z - Y_{\sigma(n)}), \quad \det(z - X_i) = \det(z - Y_i)$$

を満たす $m \times m$ 行列の n 組 (Y_1, \dots, Y_n) が一意に存在して, Y_i たちは X_i たちの成分の有理式で表わされる. \square

この定理の線形代数の知識だけを用いて用意に証明可能である. 実はこの定理の楕円函数版がすでに証明されている. その結果を用いれば楕円函数版の差分 Schlesinger 方程式を構成可能なはずである. 上の有理版を含めて

- Odesskii, A., Set-theoretical solutions to the Yang-Baxter relation from factorization of matrix polynomials and θ -functions, math.QA/0205051

を参照せよ.

Kajiwara-Noumi-Yamada は $m \times n$ 行列への 2 つの拡大 affine Weyl 群の可換な作用を上記の定理に類似の次の定理を用いて構成している.

定理 A.2 generic な m 次の対角行列の n 組 (X_1, \dots, X_n) と置換 $\sigma \in S_n$ に対して,

$$(\Lambda z + X_1) \cdots (\Lambda z + X_n) = (\Lambda z + Y_{\sigma(1)}) \cdots (\Lambda z + Y_{\sigma(n)}), \quad \det(\Lambda z + X_i) = \det(\Lambda z + Y_i)$$

を満たす m 次対角行列の n 組 (Y_1, \dots, Y_n) が一意に存在して, Y_i たちは X_i たちの成分の有理式で表わされる. \square

詳しい証明に関しては次の文献を見よ:

- Noumi, M. and Yamada, Y., Tropical Robinson-Schensted-Knuth correspondence and birational Weyl group actions, math-ph/0203030
- 黒木玄, 差分 Schlesinger 方程式と拡大 affine Weyl 群作用, 一部にのみ公開されている個人的なノート, 2003

しかし, 以上で説明した場合に関しては量子化するときには手がかりになる Poisson structure がまだ構成されていないように思われる.

問題 A.3 以上で説明した場合の Poisson structure を構成せよ. \square