曲線族の変形と Calogero-Bogoyavlensky-Schiff 階層

黒木 玄*

2002 年 8 月 19 日†

目 次

0 Introduction

この報告の内容は現在進行中の池田岳氏および高崎金久氏との共同研究である[1].

---

*kuroki@math.tohoku.ac.jp, 〒 980-8578 仙台市青葉区荒巻字青葉 東北大学大学院理学研究科

†2009 年 1 月 8 日に細かい誤植を修正した. 元の原稿は次の研究集会の報告集に掲載されている. 「リーマン面に関連する位相幾何学」, 2002 年 9 月 17 日 (火) 午後〜20 日 (金) 午後, 東京大学大学院数理科学研究科・大講義室, 協力：足利正 (東北学院大工), 今野一宏 (阪大理), 世話人：河澄響矢 (東大数理).

[1]まだ論文が準備中なので, できるだけ詳しく self-contained な説明を試みることにする.

0.1 Calogero-Bogoyavlensky-Schiff 方程式

我々の出発点は理論物理学者の F. Calogero が 1975 年に発見した次の非線形偏微分積分方程式である ([2], [3] p. 229):

$$u_s = Au_{xxy} + 2Buu_y + Bu_x \int^x u_y\,dx. \tag{0.1}$$

ここで, A, B は 0 でない定数, u は求めるべき従属変数, x, y, s は独立変数であり, 函数 f に対して f_x, f_y, f_s はそれぞれ f の x, y, s による偏導函数である. この方程式は $v = \int^x u\,dx$ と置けば次の偏微分方程式に変換される:

$$v_{xs} = Av_{xxxy} + 2Bv_xv_{xy} + Bv_{xx}v_y. \tag{0.2}$$

定数 A, B は変数のスケール変換によって自由に調節できるので, 方程式の形に関する本質的な制限は方程式の右辺の第 2 項の係数が第 3 項の係数の 2 倍になっていることである.

方程式 (0.1), (0.2) は Calogero の後, O. I. Bogoyavlensky [1] と J. Schiff [12] によって研究された. そこでそれらを **Calogero-Bogoyavlensky-Schiff 方程式 (CBS 方程式)** と呼ぶことにする. Calogero は逆散乱法で解くことのできる KdV 方程式の拡張として CBS 方程式を発見し, Bogoyavlensky は CBS 方程式の Lax 表示を研究し, Schiff は self-dual Yang-Mills 方程式 (SDYM 方程式) のある種の reduction として CBS 方程式が得られることを示した.

独立変数間に $x = y$ という関係を仮定し, $t = s$ と置くと, CBS 方程式 (0.1) は次の **Korteweg–de Vries 方程式 (KdV 方程式)** に帰着する[2]:

$$u_t = Au_{xxx} + 3Buu_x. \tag{0.3}$$

つまり, CBS 方程式は KdV 方程式の一般化になっている.

KdV 方程式は浅い水の上を走る波に関する有名な方程式である ([16] 第 4–6 章). KdV 方程式は, あたかも粒子のごとく壊れずに走る複数の孤立波で構成された解 (N ソリトン解) を持ち, 以下のようなたくさんの良い性質を持つ: 無限個の保存量を持つ, 逆散乱法で解くことができる, Lax 表示を持つ, 代数曲線を用いて代数幾何的な特殊解を構成できる. 似た性質を持つ低次元の非線形偏微分方程式は多数存在し[3], それらはソリトン方程式と総称されており, 無限次元可積分系として非常に詳しく研究されている.

0.2 本報告の目標と構成

我々の目標はソリトン方程式の良い性質を CBS 方程式およびその一般化[4]に拡張することである.

---

[2] KdV 方程式の中の定数 A, B も変数のスケール変換によって自由に調節できる.

[3] たとえば, Boussinesq 方程式, non-linear Schrödinger 方程式 (NLS 方程式), Kadomtsev-Petviashvili 方程式 (KP 方程式), etc.

[4] たとえば SDYM 方程式. ソリトン方程式の多くは物理的意味を持っているが, 筆者は CBS 方程式の物理的意味を知らない. しかし, CBS 方程式と KdV 方程式の関係は SDYM 方程式と NLS 方程式の関係に一般化可能であることがわかっている. その関係を使えば, CBS 方程式の詳しい研究が物理的に意味のある SDYM 方程式の研究にも役に立つことがわかる. NLS 方程式と SDYM 方程式の場合は行列係数の作用素を扱う必要があるので記号や定式化が少し複雑になるが, KdV 方程式と CBS 方程式の場合はスカラー係数の作用素だけを扱えば良いので記号や定式化が相対的に単純になり, 数学的仕組みをより説明し易くなる.

単独の代数曲線[5]上の line bundle のある種の変形を用いて, KdV 方程式に代表されるソリトン方程式の代数幾何的特殊解を構成可能であることが知られている. 我々はこの報告でその結果を CBS 方程式の場合に拡張する. ただし, CBS 方程式の場合は単独の代数曲線ではなく**代数曲線族のある種の変形**を扱わなければいけない. この点はソリトン方程式と CBS 方程式の本質的な違いである.

なお, D. A. Korotkin [7] は 1990 年に SDYM 方程式の特殊解を超楕円曲線のある種の変形を用いて構成している. 我々の構成は超楕円曲線で済む場合に制限されず, より一般的でかつ intrinsic である.

曲線および曲線族に関する代数幾何的な設定と KdV 方程式や CBS 方程式のような無限可積分系の分野で研究されている非線形偏微分方程式が密接に関係していることは非常に興味深い.

本論の構成は以下の通り.

実際には KdV 方程式や CBS 方程式そのものよりも, それらを無限連立系に拡張した階層 (hierarchies) を扱う.

第 1 節では KP 階層とその reduction である ℓ-KdV 階層と ℓ-KdV 階層の拡張である ℓ-CBS 階層を定義し, 後の議論で必要になる基本性質を証明する. 2-KdV 階層は KdV 方程式を含み, 2-CBS 階層は KdV 方程式と CBS 方程式の両方を含んでいる (第 1.3 節). それらの階層の代数幾何的解釈において重要なのは第 1.2 節で定義される Baker-Akhiezer 加群の概念である.

第 2 節では ℓ-CBS 階層の特殊解の代数幾何的構成について説明する. まず, KP 階層と ℓ-KdV 階層の場合における特殊解の代数幾何的構成について説明した後で ℓ-CBS 階層の場合を扱う. 最終的に, 曲線族に付随するある種の幾何学的データの変形から ℓ-CBS 階層の特殊解が得られることが証明される.

第 3 節 では ℓ-CBS 階層の特殊解の代数幾何的構成の大雑把なまとめを行ない, それを無限次元の対称性の関係について簡単に議論する.

1 KP 階層と ℓ-KdV 階層と ℓ-CBS 階層

この節では KP 階層と ℓ-KdV 階層と ℓ-CBS 階層を正確に定義し, 後の議論に必要な基本性質を証明する.

R は $\mathbb{C}$ 上の整域であるとし, R には互いに可換な $\mathbb{C}$-derivations $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial t_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $\partial/\partial s_j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ が作用していると仮定する. さらに, ある $y \in R$ が存在して, $\partial y/\partial y = 1$, $\partial y/\partial s_1 = 0$ が成立していると仮定する. 記号の簡単のために $\partial = \partial/\partial x$ と置く.

1.1 階層の定義

R 係数の x に関する常微分作用素環を $\mathcal{D} = R[\partial]$ と書くことにする. さらに, $\mathcal{D}$ に ∂^{-1} を付け加えた代数の ∂^{-1}-adic completion を擬微分作用素環と呼び $\mathcal{E}$ と表わす. すなわち,

[5] KdV 方程式の場合は必然的に超楕円曲線になるが, 他のソリトン方程式の場合は別種の曲線を用いる. KP 方程式の場合は曲線に対する制限が消え, 任意の代数曲線が現われる.

$\mathcal{E}$ を左 R 加群として,

$$\mathcal{E} = R((\partial^{-1})) = \Big\{ \sum_{i \le N} f_i \partial^i \;\Big|\; f_i \in R,\ N \in \mathbb{Z} \Big\}$$

と定め, $\mathcal{E}$ の環構造を次の式によって定める:

$$(f\partial^m)(g\partial^n) = \sum_{k \ge 0} \binom{m}{k} f g^{(k)} \partial^{m-k+n}, \qquad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}.$$

ここで, $m, n \in \mathbb{Z}$, $f, g \in R$, $g^{(k)} = \partial^k(g) = \partial^k g/\partial x^k$ である. 常微分作用素環 $\mathcal{D}$ は自然に $\mathcal{E}$ の部分環とみなせる.

$\mathcal{E}_\pm$ を $\mathcal{E}_+ = \mathcal{D} = R[\partial]$, $\mathcal{E}_- = R[[\partial^{-1}]]\partial^{-1}$ と定めると, 直和分解 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$ が成立する. $A \in \mathcal{E}$ に対して, $A_\pm \in \mathcal{E}_\pm$ を $A = A_+ - A_-$ という条件によって定める. A_+ は A の微分作用素パートであり, A_- は A の積分作用素パートの -1 倍である:

$$\Big(\sum_{i \le N} f_i \partial^i \Big)_+ = \sum_{0 \le i \le N} f_i \partial^i, \qquad \Big(\sum_{i \le N} f_i \partial^i \Big)_- = -\sum_{i < 0} f_i \partial^i.$$

不定元 w に関する R 係数の形式 Laurent 級数環を $R((w))$ と書き, 基 e^ξ から生成される rank 1 の自由 $R((w))$ 加群 $R((w))e^\xi$ を考える. ただし, ξ は形式的に次のような函数であると考える:

$$\xi = (x + t_1)w^{-1} + t_2 w^{-2} + t_3 w^{-3} + \cdots .$$

擬微分作用素環 $\mathcal{E}$ の $R((w))e^\xi$ への作用を次のように定める:

$$(f\partial^m)(g\,e^\xi) = \Big(\sum_{k \ge 0} f g^{(k)} w^{-(m-k)} \Big)\, e^\xi \qquad \big(f \in R,\ m \in \mathbb{Z},\ g \in R((w))\big).$$

これは $\partial(e^\xi) = w^{-1}e^\xi$ の自然な拡張になっている. このとき, $R((w))e^\xi$ は rank 1 の自由 $\mathcal{E}$ 加群をなす.

さらに, $R((w))e^\xi$ への $\partial/\partial t_i$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial s_j$ の作用を次のように定める:

$$\frac{\partial}{\partial t_i}(g\,e^\xi) = \Big(\frac{\partial g}{\partial t_i} + g w^{-i} \Big)\, e^\xi, \quad \frac{\partial}{\partial y}(g\,e^\xi) = \frac{\partial g}{\partial y}\, e^\xi, \quad \frac{\partial}{\partial s_j}(g\,e^\xi) = \frac{\partial g}{\partial s_j}\, e^\xi.$$

次の形の擬微分作用素 $W \in \mathcal{E}$ を**波動作用素 (wave operator)** と呼ぶ:

$$W = 1 + v_1 \partial^{-1} + v_2 \partial^{-2} + \cdots \qquad (v_i \in R). \tag{1.1}$$

さらに, 次の函数 $\Psi \in R((w))e^\xi$ を W に対応する**波動函数 (wave function)** と呼ぶ:

$$\Psi = W(w^{-1}e^\xi) = (1 + v_1 w + v_2 w^2 + \cdots)w^{-1}e^\xi.$$

すぐ後で定義する階層は全て W, Ψ もしくは $v_1, v_2, \ldots$ に関する無限連立の非線形偏微分方程式系である.

$W \in \mathcal{E}$ は波動作用素であるとし, $\Psi = W(w^{-1}e^{\xi})$ は対応する波動函数であるとする. $L, P \in \mathcal{E}$ と $B_{i,+}, C_{j,+} \in \mathcal{D}$ と $Q, B_{i,-}, C_{j,-} \in \mathcal{E}_-$ および λ を次のように定める:

$$
\begin{aligned}
&L = W\partial W^{-1}, \qquad P = L^\ell = W\partial^\ell W^{-1}, \qquad Q = W_y W^{-1}, \\
&\lambda = w^{-\ell}, \qquad B_{i,\pm} = (L^i)_\pm, \qquad C_{j,\pm} = (QP^j)_\pm.
\end{aligned}
$$

ここで, $W_y = \partial W/\partial y$ である. これらの定義から次の等式がすぐに出る:

$$
L\Psi = w^{-1}\Psi, \qquad P\Psi = \lambda\Psi, \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial y} = Q\Psi. \tag{1.2}
$$

Definition 1.1 (KP, ℓ-KdV, ℓ-CBS 階層)

1. **KP 階層 (KP hieraechy)** とは v_i たちに関する次の偏微分方程式系のことである:
$$
\frac{\partial\Psi}{\partial t_i} = B_{i,+}\Psi \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{1.3}
$$

2. **ℓ-KdV 階層 (ℓ-KdV hieraechy)** とは KP 階層に ℓ-reduction の条件 $P = L^\ell \in \mathcal{D}$ を加えた方程式系のことである. 条件 $P \in \mathcal{D}$ は $B_{\ell,-} = 0$ と同値であり, さらに $B_{j\ell,-} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots)$ とも同値であることに注意せよ.

3. **ℓ-CBS 階層 (ℓ-CBS hieraechy)** とは ℓ-KdV 階層に次を加えた方程式系のことである:
$$
\left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \lambda^j \frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi = C_{j,+}\Psi \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.4}
$$
この方程式は $\partial\Psi/\partial s_j = C_{j,-}\Psi$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ と同値であることにも注意せよ.

各階層の解になっているような波動函数をその階層の波動函数と呼ぶことにする. □

この定義から次の lemma が容易に示される.

Lemma 1.2

1. ℓ-CBS 階層と次の方程式系は同値である:
$$
\begin{aligned}
&B_{j\ell,-} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots), \\
&\frac{\partial W}{\partial t_i} = B_{i,-}W = B_{i,+}W - W\partial^i \qquad (i = 1, 2, \ldots), \\
&\frac{\partial W}{\partial s_j} = C_{j,-}W = C_{j,+}W - \frac{\partial W}{\partial y}\partial^{j\ell} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots).
\end{aligned}
$$
この方程式系を ℓ-CBS 階層の Sato-Wilson 表示と呼ぶ[6].

---

[6] $\partial_x = \partial = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, $\widehat{Q} = W\partial_y W^{-1} = \partial_y - Q$ と置く. $\widehat{Q}P^j = W\partial_y\partial_x^{j\ell}W^{-1}$ の微分作用素パートと擬微分作用素パートの -1 倍をそれぞれ $\widehat{C}_{j,+}$, $\widehat{C}_{j,-}$ と表わす. すなわち, $\widehat{C}_{j,+} = \partial_y P^j - C_{j,+}$, $\widehat{C}_{j,-} = -C_{j,-}$ と置く. このとき, ℓ-CBS 階層の Sato-Wilson 表示の 3 行目の方程式は次と同値である:

$$
-\frac{\partial W}{\partial s_j} = \widehat{C}_{j,-}W = \widehat{C}_{j,+}W - W\partial_y\partial_x^{j\ell} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots).
$$

2. ℓ-CBS 階層から次の方程式系が導かれる:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = [Q, P],$$
$$\frac{\partial P}{\partial t_i} = [B_{i,\pm}, P] \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$
$$\frac{\partial P}{\partial s_j} = [C_{j,-}, P] = [C_{j,+}, P] - \frac{\partial P}{\partial y} P^j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

この方程式系を ℓ-CBS 階層の Lax 表示と呼ぶ[7].

3. $B_{1,+} = \partial$, $C_{0,+} = 0$ であるから, 方程式 (1.3) の $i = 1$ の場合と方程式 (1.4) の $j = 0$ の場合はそれぞれ次と同値である:

$$\frac{\partial W}{\partial t_1} = \frac{\partial W}{\partial x}, \qquad \frac{\partial W}{\partial s_0} = -\frac{\partial W}{\partial y}.$$

よって, $x = t_1$, $y = -s_0$ と置いても方程式系の本質的制限にならない.

4. ℓ-KdV 階層と ℓ-CBS 階層において,

$$\frac{\partial W}{\partial t_{j\ell}} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots). \quad \square$$

Definition 1.3 以下の条件を満たす波動函数 $\Psi \in (1 + R[[w]]w)w^{-1}e^{\xi}$ の全体の集合を $\mathrm{WF}_{\emptyset}^{\mathrm{CBS},\ell}(R)$ と表わす:

(a) ある $P \in \mathcal{D}$ が存在して, $P\Psi = \lambda\Psi$.

(b) ある $B_i \in \mathcal{D}$ が存在して, $\partial\Psi/\partial t_i = B_i\Psi \quad (j = 1, 2, \ldots)$.

(c) ある $C_j \in \mathcal{D}$ が存在して, $\partial\Psi/\partial s_j + \lambda^j \partial\Psi/\partial y = C_j\Psi \quad (j = 0, 1, 2, \ldots)$.

($\lambda = w^{-\ell}$ と定義したのであった.) $R((w))e^{\xi}$ は $\mathcal{E}$ 上の rank 1 の自由加群なので, このような微分作用素 P, B_i, C_j は存在すれば Ψ に対して一意的に定まる. $\square$

Lemma 1.4 $\mathrm{WF}_{\emptyset}^{\mathrm{CBS},\ell}(R)$ は ℓ-CBS 階層の波動函数全体の集合に等しい[8].

Proof. もしも $\Psi = Ww^{-1}e^{\xi}$ が ℓ-CBS 階層の波動函数ならば, $B_i = B_{i,+}$, $C_j = C_{j,+}$ と置くことによって, $\Psi \in \mathrm{WF}_{\emptyset}^{\mathrm{CBS},\ell}(R)$ であることがわかる.

簡単な計算で一般に波動函数 $\Psi = Ww^{-1}e^{\xi}$ が以下を満たしていることを示せる:

$$P\Psi = \lambda\Psi,$$
$$\frac{\partial \Psi}{\partial t_i} = \left(\frac{\partial W}{\partial t_i} W^{-1} + L^i\right)\Psi, \qquad \frac{\partial W}{\partial t_i} W^{-1} \in \mathcal{E}_-,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \lambda^j \frac{\partial}{\partial y}\right)\Psi = \left(\frac{\partial W}{\partial s_j} W^{-1} + QP^j\right)\Psi, \qquad \frac{\partial W}{\partial s_j} W^{-1} \in \mathcal{E}_-.$$

[7] ℓ-CBS 階層の Lax 表示の 3 行目の方程式 $-\partial P/\partial s_j = [\widehat{C}_{j,\pm}, P]$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ と同値である.

[8] 条件 (b) を満たす波動函数全体と KP 階層の波動函数全体が一致し, 条件 (a),(b) を満たす波動函数全体と ℓ-KdV 階層の波動函数全体が一致することも示される.

$\Psi \in \mathrm{WF}_\emptyset^{\mathrm{CBS},\ell}(R)$ と仮定する．このとき, 条件 (a), (b), (c) のそれぞれと上の一般的な結果を合わせると以下が導かれる:

$$\begin{aligned} &P \in \mathcal{D}, \\ &B_{i,+} = (L^i)_+ = B_i, \qquad B_{i,-} = (L^i)_- = \frac{\partial W}{\partial t_i} W^{-1}, \\ &C_{i,+} = (QP^j)_+ = C_i, \qquad C_{i,-} = (QP^j)_- = \frac{\partial W}{\partial s_j} W^{-1}. \end{aligned}$$

よって, Ψ は ℓ-CBS 階層を満たしている． □

1.2 Baker-Akhiezer 加群

Definition 1.5 (Baker-Akhiezer 加群) 以下の条件を満たす $R((w))$ の R 部分加群 F 全体のなす集合を $\mathrm{CBS}_\emptyset^\ell(R)$ と書くことにする:

(A) F は次の形の R-free basis を持つ:

$$f_i = w^{-i-1} + \sum_{j \geq 0} a_{ij} w^j \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

ここで $a_{ij} \in R$ である. (このとき, F のこの形の R-free basis は一意的である.)

(B) F は $\partial/\partial x + w^{-1}$ と $\partial/\partial t_i + w^{-i}$ の作用で閉じている:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + w^{-1}\right) F \subset F, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t_i} + w^{-i}\right) F \subset F \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

(C) F は $\partial/\partial s_j + \lambda^j \partial/\partial y$ の作用で閉じている:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \lambda^j \frac{\partial}{\partial y}\right) F \subset F \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots).$$

($\lambda = w^{-\ell}$ と定義したのであった.)

$R((w))$ の部分空間 F に対して, $R((w))e^\xi$ の部分空間 BA_F を $\mathrm{BA}_F = Fe^\xi$ と定める．ある $F \in \mathrm{CBS}_\emptyset^\ell(R)$ に対応する BA_F を ℓ-CBS 階層の **Baker-Akhiezer 加群 (BA 加群)** と呼ぶ． □

Lemma 1.6 $F \in \mathrm{CBS}_\emptyset^\ell(R)$ のとき, $\lambda F \subset F$.

Proof. $y \in R$ より, $yF \subset F$ である．よって, $\partial y/\partial y = 1$, $\partial y/\partial s_1 = 0$ と条件 (C) の $j = 1$ の場合より, $F \supset [\partial/\partial s_1 + \lambda\partial/\partial y, y]F = \lambda F$. □

Remark 1.7 条件 (A) は次の条件 (A') と同値である:

(A') BA_F は次の形の R-free basis を持つ:

$$\Psi_i = (w^{-i} + \sum_{j \geq 0} a_{ij} w^{j+1}) w^{-1} e^\xi \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

ここで $a_{ij} \in R$ である. (このとき, BA_F のこの形の R-free basis は一意的である.)

条件 (B) は次の条件 (B') と同値である:

(B') BA_F は $\partial/\partial x$ と $\partial/\partial t_i$ の作用で閉じている:

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{BA}_F \subset \mathrm{BA}_F, \qquad \frac{\partial}{\partial t_i}\mathrm{BA}_F \subset \mathrm{BA}_F \qquad (i=1,2,\dots).$$

特に条件 (B) から Baker-Akhiezer 加群 BA_F が $\mathcal{D}$ の作用で閉じていることがわかる.

よって, 条件 (B) のもとで, 条件 (A) は BA_F が波動函数 $f_0 e^{\xi}$ から生成される rank 1 の自由 $\mathcal{D}$ 加群をなすことと同値であることがすぐにわかる.

条件 (C) は次の条件 (C') と同値である:

(C') BA_F は $\partial/\partial s_j + \lambda^j \partial/\partial y$ の作用で閉じている:

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \lambda^j \frac{\partial}{\partial y}\right)\mathrm{BA}_F \subset \mathrm{BA}_F \qquad (j=0,1,2,\dots).$$

さらに, もしも $\eta = s_0 + s_1 w^{-\ell} + s_2 w^{2\ell} + \cdots$ が意味を持ち, F に属する函数に含まれる y に $y+\eta$ を代入することが許されるならば, 条件 (C') は次の条件 (C") と同値である:

(C") BA_F の属する全て函数に含まれる y に $y+\eta$ を代入して得られる函数空間は $\partial/\partial s_j$ の作用で閉じている:

$$\frac{\partial}{\partial s_j}\left(\mathrm{BA}_F\,|_{y\mapsto y+\eta}\right) \subset \mathrm{BA}_F\,|_{y\mapsto y+\eta} \qquad (j=0,1,2,\dots).$$

以上の同値性は ℓ-CBS 階層を代数幾何的に解釈するためのキーポイントになる. 我々は ℓ-CBS 階層の解を直接構成するのではなく, 対応する BA 加群の方を構成することになる. □

Theorem 1.8 $F \in \mathrm{CBS}^{\ell}_{\emptyset}(R)$ のとき, 条件 (A) の f_0 を用いて波動函数を $\Psi_F = f_0 e^{\xi}$ と定めると, $\Psi_F \in \mathrm{WF}^{\mathrm{CBS},\ell}_{\emptyset}(R)$ である. $\Psi \in \mathrm{WF}^{\mathrm{CBS},\ell}_{\emptyset}(R)$ のとき, $F_\Psi \subset R((w))$ を $F_\Psi e^{\xi} = \mathcal{D}\Psi$ と定めると, $F_\Psi \in \mathrm{CBS}^{\ell}_{\emptyset}(R)$ である. これらの対応によって, $\mathrm{CBS}^{\ell}_{\emptyset}(R)$ の要素と $\mathrm{WF}^{\mathrm{CBS},\ell}_{\emptyset}(R)$ の要素は一対一に対応している. すなわち, ℓ-CBS 階層の BA 加群と ℓ-CBS 階層の波動函数は一対一に対応している.

Proof. $F \in \mathrm{CBS}^{\ell}_{\emptyset}(R)$ と仮定し, $\Psi_F = f_0 e^{\xi}$ と置く. Remark 1.7 より, $\mathrm{BA}_F = \mathcal{D}\Psi_F$ であり, BA_F は $\partial/\partial t_i$, $\partial/\partial s_j + \lambda^j \partial/\partial y$ の作用で閉じている. よって, Ψ_F は条件 (b), (c) を満たしている. Lemma 1.6 より, BA_F は λ 倍で閉じているので, Ψ_F は条件 (a) を満たしている.

$\Psi \in \mathrm{WF}^{\mathrm{CBS},\ell}_{\emptyset}(R)$ と仮定し, $\mathrm{BA}_\Psi = F_\Psi e^{\xi} = \mathcal{D}\Psi$ と置く. BA_Ψ が R-free basis $\partial^i \Psi$ $(i=0,1,2,\dots)$ を持つことより, F_Ψ が条件 (A) を満たしていることがわかる. 条件 (a), (b), (c) を使うと, 任意の $A \in \mathcal{D}$ に対して次が成立することがわかる:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}(A\Psi) = \partial A\Psi \in \mathcal{D}\Psi = \mathrm{BA}_\Psi,\\
&\frac{\partial}{\partial t_i}(A\Psi) = \frac{\partial A}{\partial t_i}\Psi + AB_i\Psi \in \mathcal{D}\Psi = \mathrm{BA}_\Psi,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial s_j} + \lambda^j \frac{\partial}{\partial y}\right)(A\Psi) = \frac{\partial A}{\partial s_j}\Psi + \frac{\partial A}{\partial y}P^j\Psi + AC_j\Psi \in \mathcal{D}\Psi = \mathrm{BA}_\Psi\,.
\end{aligned}$$

よって, Remark 1.7 より, F_Ψ が条件 (B), (C) を満たしていることがわかる. □

Remark 1.9 (Sato Grassmannian との関係) $\mathbb{C}((w))$ の部分空間 F に対して, $H^0(F)$, $H^1(F)$ を次のように定義する:

$$H^0(F) = F \cap \mathbb{C}[[w]], \qquad H^1(F) = \mathbb{C}((w))/(F + \mathbb{C}[[w]]).$$

Sato Grassmannian Gr^χ ($\chi \in \mathbb{Z}$) とは, $\mathbb{C}((w))$ の部分空間 F で $H^0(F)$, $H^1(F)$ が共に有限次元でかつその index

$$\chi(F) = \dim H^0(F) - \dim H^1(F)$$

が χ に等しくなるようなもの全体がなす無限次元の多様体のことである ([11]). $R = \mathbb{C}$ のとき, 条件 (A) は F が Gr^0 の generic cell に含まれるための条件 $\dim H^p(F) = 0$ ($p = 0, 1$) に同値になっている. 条件 (B) は Sato Grassmannian 上の互いに可換な可算個のベクトル場の定義式になっている. 条件 (C) は y でパラメトライズされた Sato Grassmannian 内の曲線全体のなす無限次元多様体上に互いに可換な可算個のベクトル場を定めている.

Gr^χ の点の重要な例は曲線とその上の line bundle を用いて構成される. X は genus g の smooth compact complex analytic curve であるとし, 点 $P \in X$ の近傍における座標 w で $w(P) = 0$ を満たすものが与えられているとする. L は degree d を持つ X 上の line bundle であり, 点 P の近傍における trivialization $\iota : L_P \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X,P}$ が与えられているとする. 以上の幾何学的データをまとめて $Z = (X, P, w, L, \iota)$ と書き, trivialization ι と w に関する Laurent 展開の合成による $H^0(X, L(*P))$ の $\mathbb{C}((w))$ における像を $F(Z)$ と表わす[9]. このとき, 自然に $H^p(F(W)) = H^p(X, L)$ ($p = 0, 1$) とみなせるので, Riemann-Roch の定理より, $F(Z) \in \mathrm{Gr}^{d-g+1}$ であることがわかる.

よって, もしも y でパラメトライズされた幾何学的データ Z の族のパラメータ t_i, s_j 関する変形をうまく構成できれば $\mathrm{CBS}^\ell_\emptyset(R)$ の要素が得られ, ℓ-CBS 階層の特殊解が構成できるであろう. これが基本的なアイデアである. □

第 2.2 節で KP 階層から ℓ-KdV 階層への reduction の代数幾何的解釈を述べるためには次の Lemma が必要になる.

Lemma 1.10 $R((w))$ の R 部分加群 F は Definition 1.5 における条件 (A), (B) を満たしていると仮定し, 波動函数を $\Psi = f_0 e^\xi$ と定め, 対応する波動作用素を W と書き, $L = W\partial W^{-1}$, $P = L^\ell$, $\lambda = w^{-\ell}$ と置く. このとき, 次の二つの条件は互いに同値である:

1. $P \in \mathcal{D}$ すなわち ℓ-redcution の条件が成立している.

2. $\lambda F \subset F$ すなわち F は λ 倍で閉じている.

Proof. 定義より $P\Psi = \lambda\Psi$ が成立している. $\mathrm{BA} = F e^\xi$ と置くと, 条件 (A), (B) より $\mathrm{BA} = \mathcal{D}\Psi$ が成立している.

$P \in \mathcal{D}$ ならば任意の $A \in \mathcal{D}$ に対して $\lambda A\Psi = AP\Psi \in \mathrm{BA}$. よって, $\lambda\,\mathrm{BA} \subset \mathrm{BA}$. これは $\lambda F \subset F$ と同値である.

逆に, $\lambda F \subset F$ すなわち $\lambda\,\mathrm{BA} \subset \mathrm{BA}$ が成立しているならば $\lambda\Psi = A\Psi$ を満たす $A \in \mathcal{D}$ が唯一存在する. ところが, $P\Psi = \lambda\Psi$ なので $P = A \in \mathcal{D}$ である. □

[9] $H^0(X, L(*P))$ は点 P だけに極を持つ L の global meromorphic sections 全体の空間を意味している.

1.3 $\ell = 2$ の場合

$\ell = 2$ とし, 2-KdV 階層が KdV 方程式を含み, 2-CBS 階層が KdV 方程式と CBS 方程式の両方を含んでいることを示そう[10].

波動作用素 $W = 1+v_1\partial^{-1}+v_2\partial^{-2}+\cdots$ $(v_i \in R)$ に対して, $L = W\partial W^{-1}$, $Q = W_yW^{-1}$ は次のように計算される:

$$L = \partial - v_{1,x}\partial^{-1} + (-v_{2,x} + v_1v_{1,x})\partial^{-2} + \cdots,$$
$$Q = v_{1,y}\partial^{-1} + (-v_{2,y} - v_1v_{1,y})\partial^{-2} + \cdots.$$

簡単のため, L, P を次のように表わしておく:

$$L = \partial + u_1\partial^{-1} + u_2\partial^{-2} + \cdots, \qquad Q = q_1\partial^{-1} + q_2\partial^{-2} + \cdots$$

たとえば, $u_1 = -v_{1,x}$. このとき, $P = L^2$ は次のように表わされる:

$$P = \partial^2 + 2u_1 + (2u_2 + u_{1,x})\partial^{-1} + (2u_3 + u_1^2 + u_{2,x})\partial^{-2} + \cdots.$$

よって, 2-reduction の条件 $P \in \mathcal{D}$ (すなわち P は ∂ の負巾の項を含まないという条件) は次と同値である:

$$u_2 = -\frac{1}{2}u_{1,x}, \quad u_3 = -\frac{1}{2}(u_1^2 + u_{2,x}) = -\frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{4}u_{1,xx}, \quad \ldots$$

2-reduction の条件が成立しているとき, 全ての u_i は u_1 の微分多項式になる.

以下, 2-reduction の条件を仮定し, $P = \partial^2 + u$ すなわち $u = 2u_1$ と置く. このとき,

$$[Q,P] = -2q_{1,x} + (-2q_2 - q_{1,xx})\partial^{-1} + (-2q_{3,x} - q_{2,xx} - q_1u_x)\partial^{-2} + \cdots.$$

式 (1.2) より $u_y = \partial P/\partial y = [Q,P]$. よって,

$$q_{1,x} = -\frac{1}{2}u_y, \quad q_{2,x} = -\frac{1}{2}q_{1,xx} = \frac{1}{4}u_{xy}, \quad q_{3,x} = -\frac{1}{2}(q_{2,xx} + q_1u_x), \quad \ldots$$

これより特に次が出る:

$$q_1 = -\frac{1}{2}\int^x u_y\,dx, \qquad q_{2,xx} = \frac{1}{4}u_{xxy}. \tag{1.5}$$

$B_{3,+} = (L^3)_+$ と $C_{1,+} = (QP)_+$ は次の形になる:

$$B_{3,+} = \partial^3 + \frac{3}{2}u\partial + \frac{3}{4}u_x, \qquad C_{1,+} = q_1\partial + q_2.$$

よって, Lemma 1.2 において 2-CBS 階層から導かれた方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t_3} = \frac{\partial P}{\partial t_3} = [B_{3,+}, P], \qquad \frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{\partial P}{\partial s_1} = [C_{1,+}, P] - \frac{\partial P}{\partial y}P$$

[10] 3-KdV 階層は Boussinesq 方程式を含んでいる. そこで, 2-KdV 階層を単に KdV 階層と呼び, 3-KdV 階層を Boussinesq 階層と呼ぶ. 2-CBS 階層も単に CBS 階層と呼ぶことにする.

はそれぞれ次の方程式と同値であることがわかる:

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x. \tag{1.6}$$

$$u_s = -q_{2,xx} - uu_y + u_x q_1. \tag{1.7}$$

ここで, $t = t_3$, $s = s_1$ と置いた. 前者の (1.6) は $A = 1/4$, $B = 1/2$ の場合の KdV 方程式 (0.3) に一致している. 後者の (1.7) に (1.5) を代入すると,

$$u_s = -\frac{1}{4}u_{xxy} - uu_y - \frac{1}{2}u_x \int^x u_y\,dx. \tag{1.8}$$

これは $A = -1/4$, $B = -1/2$ の場合の CBS 方程式 (0.1) に一致している. さらに, 方程式 (1.8) に $u = 2u_1 = -2v_{1,x}$ を代入すると,

$$v_{1,xs} = -\frac{1}{4}v_{1,xxxy} + 2v_{1,x}v_{1,xy} + v_{1,xx}v_{1,y}. \tag{1.9}$$

これは $A = -1/4$, $B = 1$ の場合の CBS 方程式 (0.2) に一致している.

2 幾何学的データの変形

この節では, KP 階層, ℓ-KdV 階層, ℓ-CBS 階層と曲線の代数幾何の関係を説明する. KP 階層と ℓ-KdV 階層の特殊解は単独の曲線上の line bundle のある種の変形を用いて構成できることがすでによく知られている. 我々の目標は ℓ-CBS 階層の特殊解を y でパラメトライズされた曲線の 1 次元族に付随するある種の幾何学的データの変形を用いて構成することである.

まず, 無限個の変形パラメータ $t = (t_1, t_2, \ldots)$, $s = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$ を扱うための準備をしておこう.

埋め込み $\mathbb{C}^N \hookrightarrow \mathbb{C}^{N+1}$ を $(a_1, \ldots, a_N) \mapsto (a_1, \ldots, a_N, 0)$ によって定め, $\mathbb{C}^N$ の inductive limit を $\mathbb{C}^\infty$ と書く:

$$\mathbb{C}^\infty = \operatorname*{ind\,lim}_{N\to\infty} \mathbb{C}^N = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathbb{C}^N.$$

ただし, $\mathbb{C}^\infty$ には $\mathbb{C}^N$ の通常の位相から誘導される位相を入れておく. すなわち, $\mathbb{C}^\infty$ の部分集合 Ω が open であるための必要十分条件は, 任意の N について $\Omega \cap \mathbb{C}^N$ が $\mathbb{C}^N$ で open になることである.

$\mathbb{C}^\infty$ と 複素多様体 M の直積 $\mathcal{M} = \mathbb{C}^\infty \times M$ の開集合 Ω 上の函数 f が holomorphic (resp. meromorphic) であるとは任意の N について f の $\Omega \cap (\mathbb{C}^N \times M)$ 上への制限が通常の意味で holomorphic (resp. moromorphic) になることであると定める.

D は M の divisor であるとし, $\mathcal{D} = \mathbb{C}^\infty \times D \subset \mathcal{M}$ と置く. $\mathcal{D}$ に極を持つ Ω 上の meromorphic function f の $\mathcal{D}$ における極位数とは f の $\Omega \cap (\mathbb{C}^N \times M)$ 上への制限の $\mathcal{D}$ における極位数の $N \to \infty$ における極限のことである.

例えば, $(t, w) = (t_1, t_2, \ldots; w) \in \mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\times$ の函数 ξ を

$$\xi(t, w) = t_1 w^{-1} + t_2 w^{-2} + \cdots \qquad (\text{各 } t \text{ ごとに有限和})$$

と定めると, ξ は $\mathbb{C}^\infty \times \{0\}$ のみに極を持つ $\mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}$ 上の meromorphic function である. しかし, ξ は $\mathbb{C}^\infty \times \{0\}$ に沿って有限の極位数を持たない. 有限次元の場合と違って無限次元の場合はこのようなことが起こり得るので注意せよ.

$\mathcal{D}$ だけに高々極位数 n の極を持つ $\mathcal{M}$ 上の meromorphic functions のなす sheaf を $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(n\mathcal{D})$ と書き, $\mathcal{D}$ だけに高々有限位数の極を持つ $\mathcal{M}$ 上の meromorphic functions のなす sheaf を $\mathcal{O}_{\mathcal{M}}(*\mathcal{D}) = \bigcup_n \mathcal{O}_{\mathcal{M}}(n\mathcal{D})$ と書く.

2.1 KP 階層の場合

KdV 階層, Boussinesq 階層, etc. およびそれら一般化である KP 階層の特殊解は曲線上の line bundle のある種の変形を用いて構成できることがよく知られている. この事実に関しては多数の文献が存在する. たとえば, [8], [10], [4], [13], [6], [9] を参照せよ.

簡単のため X は genus g の smooth compact complex analytic curve であるとし, 点 $P \in X$ およびその近傍における座標 w で $w(P) = 0$ を満たすものが与えられているとする[11]. さらに, L は X 上の degree $\chi + g - 1$ の line bundle であるとし, L の U 上での trivialization $\iota : L|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U$ が与えられているとする. 以上の幾何学的データをまとめて $Z = (X, P, w, L, \iota)$ と書く.

X は点 $P \in X$ を中心とする開円板 $U = \{|w| < R\}$ と $\dot{X} = X - P$ の貼り合わせによって構成されているとみなせる. L は $L|_{\dot{X}}$ と $\mathcal{O}_U$ が $\dot{U} = \{0 < |w| < R\}$ 上 ι によって貼り合わせることによって構成された line bundle であるとみなせる. 貼り合わせ函数 $\iota : L|_{\dot{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\dot{U}}$ に $\dot{U}$ 上で 0 にならない正則函数を乗じたものを新たな貼り合わせ函数とみなせば別の line bundle が得られる.

$(t, w) = (t_1, t_2, \dots; w) \in \mathbb{C}^\infty \times \dot{U}$ の正則函数 ξ を次のように定める:

$$\xi(t, w) = \sum_{i=1}^{\infty} t_i w^{-i} = t_1 w^{-1} + t_2 w^{-2} + \cdots .$$

各 $t \in \mathbb{C}^\infty$ ごとに $\dot{U}$ 上の正則函数 $\xi_t(w) = \xi(t, w)$ が定まる.

各 $t \in \mathbb{C}^\infty$ に対して, 新たな貼り合わせ函数 $\iota_t = e^{-\xi_t}\,\iota : L|_{\dot{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\dot{U}}$ を考え, これが定める line bundle を L_t と書くことにする. すなわち, $\phi \in L|_{\dot{X}}$ と $f \in \mathcal{O}_U$ を $\dot{U}$ 上で $\iota(\phi) = f\,e^{\xi_t}$ という条件で貼り合わせることによって, line bundle L_t を構成する. 実はこのような L_t の全体は L と degree が等しい X 上の line bundle の同型類全体を尽くしている.

点 P だけに極を持つ L_t の global meromorohic sections の空間 $H^0(X, L_t(*P))$ は以下のように表示される:

$$\begin{aligned} H^0(X, L_t(*P)) = \big\{\, & f \in H^0(U, \mathcal{O}_U(*P)) \;\big|\; \\ & \text{ある } \phi \in H^0(\dot{X}, L) \text{ が存在して } \iota(\phi) = f\,e^{\xi_t} \,\big\}. \end{aligned}$$

[11]実際には曲線 X は smooth であると仮定する必要はない. ただし, 点 P は X の smooth point であるとする. Remark 1.9 の方法で Sato Grassmannian の点が構成可能であるようなものであれば曲線 X はどんなに悪いものでも構わない. 実際, N ソリトン解はその正規化が射影直線になるような特異曲線を用いて構成される.

我々は analytic の設定で議論を進めているので, $\phi \in H^0(\dot{X}, L)$ が点 P に不確定特異点を持っても構わないことに注意せよ. $H^0(X, L_t(*P))$ の w に関する Laurent 展開の像を $F_t \subset \mathbb{C}((w))$ と書くと, 各 F_t は Sato Grassmannian Gr^{χ} の点になる.

$H^0(X, L_t(*P))$ の構成を各 t ごとに行なうのではなく, それらを fiber に持つ $\mathbb{C}^\infty$ 上の層 $\mathcal{F}$ を一挙に構成することができる:

$$\mathcal{F} = \Big\{ f \in \pi_{\mathcal{U}/\mathbb{C}^\infty,*}\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(*\mathcal{P})) \;\Big|\; \text{ある } \phi \in \pi_{\dot{\mathcal{X}}/\mathbb{C}^\infty,*}\big[\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes L|_{\dot{X}}\big] \text{ が存在して } (\mathrm{id} \boxtimes \iota)(\phi) = f\,e^{\xi} \Big\}.$$

ここで, $\mathcal{X} = \mathbb{C}^\infty \times X$, $\dot{\mathcal{X}} = \mathbb{C}^\infty \times \dot{X}$, $\mathcal{U} = \mathbb{C}^\infty \times U$, $\mathcal{P} = \mathbb{C}^\infty \times P$ であり, $\pi_{\mathcal{U}/\mathbb{C}^\infty}$, $\pi_{\dot{\mathcal{X}}/\mathbb{C}^\infty}$ はそれぞれ $\mathcal{U}$, $\dot{\mathcal{X}}$ から $\mathbb{C}^\infty$ への自然な projection である. さらに, **Baker-Akhiezer 層 (BA 層)** を次のように定める:

$$\mathcal{BA} = \mathcal{F}\,e^{\xi} = \{\, f\,e^{\xi} \mid f \in \mathcal{F} \,\}.$$

このとき, $f\,e^{\xi} \in \mathcal{BA}$ に対して, $(\mathrm{id} \boxtimes \iota)(\phi) = f\,e^{\xi}$ を満たす唯一の $\phi \in \pi_{\dot{\mathcal{X}}/\mathbb{C}^\infty,*}\big[\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes L|_{\dot{X}}\big]$ を対応させせることによって, $\mathcal{BA}$ は $\pi_{\dot{\mathcal{X}}/\mathbb{C}^\infty,*}\big[\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes L|_{\dot{X}}\big]$ の $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty}$ 部分加群とみなせる. 層 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty}$ への $\partial/\partial t_i$ の自然な作用は $\partial/\partial t_i$ の $\pi_{\dot{\mathcal{X}}/\mathbb{C}^\infty,*}\big[\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes L|_{\dot{X}}\big]$ への自然な作用を定める. この作用で $\mathcal{BA}$ が閉じていることもわかる. $x = t_1$ とみなせば $\partial = \partial/\partial x$ の作用も定まる.

さて, L は degree $g-1$ の generic な line bundle であると仮定する. すなわち $H^p(X, L) = 0$ $(p = 0, 1)$ と仮定する. このとき, $\mathbb{C}^\infty$ の原点の連結開近傍 T を十分小さく取ると, 任意の $t \in T$ に対する L_t の cohomology も消えている. そのような T を一つ選び,

$$R = H^0(T, \mathcal{O}_T), \qquad F = H^0(T, \mathcal{F}), \qquad \mathrm{BA} = F\,e^{\xi} = H^0(T, \mathcal{BA})$$

と置く. このとき, F は w による Laurent 展開によって自然に $R((w))$ の R 部分加群とみなせる. L_t $(t \in T)$ の cohomology が消えていることから, F が Definition 1.5 の条件 (A) を満たしていることが確かめられる. BA が $\partial/\partial x$, $\partial/\partial t_i$ の作用で閉じていることから, F が Definition 1.5 の条件の (B) を満たしていることがわかる.

以上をまとめると次の定理を得る.

Theorem 2.1 次の形の $\Psi \in \mathrm{BA}$ が唯一存在する:

$$\Psi = (1 + v_1 w + v_2 w^2 + \cdots) w^{-1} e^{\xi} \qquad (v_i \in R = H^0(T, \mathcal{O}_T)).$$

この Ψ は KP 階層の波動函数になっている.

Proof. BA が Remark 1.7 の条件 (A'), (B') を満たしていることはすでに示されている. 条件 (A') における Ψ_0 が求める唯一の Ψ である. Theorem 1.8 と Lemma 1.4 の証明を見れば, 条件 (B') から Ψ が KP 階層の波動函数になっていることがわかる. □

Remark 2.2 上の定理の Ψ は以下の条件で一意に特徴付けられる $T \times \dot{U} = \{(t, w)\}$ 上の函数である:

(WF1) Ψ は次のように形をしている $(t,w) \in T \times \dot{U}$ の正則函数である:

$$\Psi(t,w) = (1 + v_1(t)w + v_2(t)w^2 + \cdots)w^{-1}\, e^{\xi(t,w)}.$$

ここで, $v_i \in H^0(T, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty})$, $\xi(t,w) = t_1 w^{-1} + t_2 w^{-2} + \cdots$.

(WF2) ある $\phi \in H^0(T \times \dot{X}, \mathcal{O}_T \boxtimes L)$ が存在して,

$$\Psi = (\mathrm{id} \boxtimes \iota)(\phi|_{T \times \dot{U}}).$$

ここで, $\iota : L|_{\dot{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\dot{U}}$ は L の U 上での trivialization である.

この Ψ を幾何学的データ $Z = (X, P, w, L, \iota)$ に付随する波動函数と呼ぶ. $\square$

2.2 ℓ-KdV 階層の場合

前節の KP 階層の状況をそのまま引き継ぐ.

ℓ-KdV 階層と KP 階層の違いは ℓ-reduction の条件を課しているか否かである. Lemma 1.10 によれば F が ℓ-reduction の条件を満たすための必要十分条件は $\lambda = w^{-\ell}$ の積で F が閉じていることである.

しかし, 層 $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty}((w))$ の $t \in \mathbb{C}^\infty$ における fiber $F_t \subset \mathbb{C}((w))$ は $H^0(X, L_t(*P))$ の像になっている. よって, $f \in \mathbb{C}((w))$ が $f F_t \subset F_t$ を満たすための必要十分条件は f が $H^0(X, \mathcal{O}_X(*P))$ の像に含まれていることである.

このことから, F が ℓ-reduction の条件を満たすための必要十分条件は $\lambda = w^{-\ell}$ が P だけにちょうど ℓ 位極を持つ X 上の有理型函数に延長可能なことである.

すなわち, KP 階層の ℓ-reduction は代数幾何的には, 曲線 X として点 P だけにちょうど ℓ 位の極を持つ有理型函数 λ を持つものを選ぶことに対応している. 点 P における座標 w は $\lambda = w^{-\ell}$ と取る. このとき, (X, P, w) を仮に **ℓ-curve** と呼ぶことにする[12].

たとえば, 2-curve は本質的に超楕円曲線である. すなわち, KP 階層から KdV 階層 = 2-KdV 階層 への reduction は代数幾何的には, 曲線 X をとして超楕円曲線 $\mu^2 = f(\lambda)$ ($f(\lambda)$ は λ の $2g+1$ 次多項式) を選ぶことに対応している. ただし, 点 P は無限遠点であるとし, 座標 w は, λ が点 P だけに 2 位の極を持つ X 上の有理型函数であることに注意し, $\lambda = w^{-2}$ と取る. KdV 方程式 (0.3) における独立変数 (x,t) は変形パラメータの (t_1, t_3) に対応している.

KP 階層から Boussinesq 階層 = 3-KdV 階層 への reduction は代数幾何的には, 曲線 X として一点 P だけにちょうど 3 位の極を持つ有理型函数 λ を持つものを選ぶことに対応している. 点 P における座標 w は $\lambda = w^{-3}$ と取る.

2.3 ℓ-CBS 階層の場合

さて, ℓ-CBS 階層に対応する代数幾何的設定について説明しよう.

ℓ-CBS 階層に対応する代数幾何的設定の出発点は, 単独の ℓ-curve ではなく, ℓ-curve の 1 次元族である.

---

[12] より標準的な述語があるかどうかについては知らない.

Y は座標 y を持つ複素平面 $\mathbb{C}$ の connected open subset とであるとする. (たとえば, Y は $\mathbb{C}$ 内の open disk とする.) $\pi : X \to Y$ は Y 上の genus g の compact smooth analytic curves の族であるとし, X の divisor D は π の section であるとする. さらに, D の開近傍 U と U 上の正則函数 w で以下を満たすものが存在すると仮定する:

- $\pi \times w : U \to Y \times U_R$ は双正則写像である. ここで $U_R = \{\, w \in \mathbb{C} \mid |w| < R \,\}$.
- $w|_D = 0$ でかつ $w^{-\ell}$ は D だけに ℓ 位の極を持つ X 上の有理型函数 $\lambda \in H^0(X, \mathcal{O}_X(*D))$ に延長可能である.

このとき, $(\pi : X \to Y, D, w)$ は ℓ-curve の族であると言うことにする.

$0 < r < R$ なる r を取り, $\mathring{X} = X - \bar{U}_r$, $\mathring{U} = U \cap \mathring{X}$, $U_{R,r} = \{\, w \in \mathbb{C} \mid r < |w| < R \,\}$ と置く. このとき, X は $\mathring{X}$ と $Y \times U_R$ を双正則写像 $\pi \times w : \mathring{U} \xrightarrow{\sim} Y \times U_{R,r}$ によって貼り合わせることによって構成されているとみなせる.

以下, 各 $y \in Y$ の近傍ごとに $s = (s_0, s_1, s_2, \dots) \in \mathbb{C}^\infty$ を十分小さく取っておくことにする. このとき, 各 $y \in Y$ の近傍ごとに次のようにして, $\mathring{X}$ と $Y \times U_R$ のあいだの新たな貼り合わせ写像 I_s を定義することができる:

$$I_s : \mathring{U} \xrightarrow{\sim} Y \times U_{R,r}, \quad x \mapsto (\pi(x) + \eta_s(x), w(x)).$$

ここで,

$$\eta_s(x) = \eta(s, x) = \sum_{j=0}^{\infty} s_j \lambda(x)^j = s_0 + s_1 \lambda(x) + s_2 \lambda(x)^2 + \cdots .$$

この貼り合わせによって構成された X の変形を X_s と書くことにする. X_s は各 $y \in Y$ の近傍ごとに well-defined である.

新たな structure map $\pi_s : X_s \to Y$ は次の 2 つの写像の貼り合わせによって定義される:

$$\begin{aligned} &Y \times U_R \to Y, \quad (y, w) \mapsto y, \\ &\mathring{X} \to Y, \quad x \mapsto \pi(x) + \eta_s(x). \end{aligned}$$

π_s が well-defined になるためには λ が $\mathring{X}$ 上で大域的に定義されていることが本質的である.

$Y \times \{0\} \subset Y \times U_R$ の X_s での像を D_s と書く. この D_s は π_s の section になっている. $Y \times U_R$ の X_s での像を U_s と書き, $Y \times U_R$ から U_R への自然な projection が誘導する U_s から U_R への写像を w と書く. (面倒なのでこの場合の s は略す.) このとき, $\pi_s \times w : U_s \to Y \times U_R$ は本質的に恒等写像なので当然双正則である. また, I_s の定義には w 方向のずらしが含まれてないので, $Y \times U_R$ 上の有理型函数 $w^{-\ell}$ の I_s による $\mathring{U}$ 上への引き戻しは $\mathring{X}$ 上の正則函数 λ の $\mathring{U}$ 上への制限に一致している. これで, $(\pi_s : X_s \to Y, D_s, w)$ が ℓ-curve の族であることがわかった.

以上の状況に第 2.1 節の構成を適用するために, X 上の line bundle L を用意する. ただし, 各 $y \in Y$ における π の fiber X_y 上への L の制限は degree $g-1$ の generic な line bundle になっていると仮定する. L の U 上での trivialization $\iota : L|_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_U = I_0^{-1} \mathcal{O}_{Y \times U_R}$ も与えられていると仮定する.

以上の幾何学的データをまとめて $Z = (\pi : X \to Y, D, w, L, \iota)$ と表わすことにする. ℓ-CBS 階層の特殊解は Z を与えるごとに構成される.

まず, line bundle L の X_s 上への拡張 L_s を構成しよう. X_s は $\mathring{X}$ と $Y \times U_R$ を $I_s : \mathring{U} \xrightarrow{\sim} Y \times U_{R,r}$ で貼り合わせることによって構成されたので, X_s 上の line bundle L_s を構成するためには $L|_{\mathring{X}}$ と $\mathcal{O}_{Y \times U_R}$ の貼り合わせ写像 $\iota_s : L|_{\mathring{U}} \xrightarrow{\sim} I_s^{-1}\mathcal{O}_{Y \times U_{R,r}}$ を定めればよい. I_s が誘導する自然な同型 $I_s^{-1}\mathcal{O}_{Y \times \mathring{U}_R} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathring{U}}$, $f \mapsto f \circ I_s$ を I_s^* と書くことにする. L の U 上での trivialization ι は同型 $\iota : L_{\mathring{U}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathring{U}}$ を誘導する. ι_s を $\iota_s = (I_s^*)^{-1} \circ \iota$ と定める. これで, X 上の line bundle L_s が構成された.

次に, L_s のパラメータ $t \in \mathbb{C}^\infty$ に関する変形 $L_{s,t}$ を第 2.1 節と全く同様のやり方で構成しよう. $L_{s,t}$ を定める貼り合わせ写像 $\iota_{s,t} : L|_{\mathring{U}} \xrightarrow{\sim} I_s^{-1}\mathcal{O}_{Y \times U_{R,r}}$ を $\iota_{s,t} = e^{-\xi_t}\,\iota_s$ と定める.

X_s の $y \in Y$ における fiber を $X_{s,y}$ と書くとき, $L_{s,t}$ の $X_{s,y}$ 上への制限 $L_{s,t,y}$ の $P_{s,y} = D_s \cap X_{s,y}$ だけに極を持つ global meromorphic sections の空間は以下のように表示可能である:

$$
\begin{aligned}
H^0(X_{s,y}, L_{s,t,y}(*P_{s,y})) = \Big\{ & f \in H^0(U_R, \mathcal{O}_{U_R}(*0)) \;\Big|\; \\
& \text{ある } \phi \in H^0\big(\mathring{X}_{s,y}, L|_{\mathring{X}_{s,y}}\big) \text{ が存在して} \\
& \iota(\phi)(x) = f(w(x))\, e^{\xi_t(w(x))} \;\big(x \in \mathring{U}_{s,y}\big) \Big\}.
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\mathring{X}_{s,y} = \big\{\, x \in \mathring{X} \;\big|\; \pi_s(x) = \pi(x) + \eta_s(x) = y \,\big\}.
$$

$\mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty \times Y = \{(s,t,y)\}$ における $\{0\} \times \{0\} \times Y$ の連結開近傍 S を十分小さく取る. このとき, $H^0(X_{s,y}, L_{s,t,y}(*P_{s,y}))$ の構成を各 (s,t,y) ごとに行なうのではなく, それらを fiber に持つ S 上の層 $\mathcal{F}$ を一挙に構成することができる:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F} = \Big\{ & f \in \pi_{\mathcal{U}/S,*}\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(*\mathcal{P}) \;\Big|\; \\
& \text{ある } \phi \in \pi_{\mathring{\mathcal{X}}/S,*}\mathcal{L}_{\mathring{\mathcal{X}}} \text{ が存在して,} \\
& \tilde{\iota}(\phi)(t,s,x) = f\big(t,\ s,\ \pi(x) + \eta(s,x),\ w(x)\big)\, e^{\xi(t, w(x))} \Big\}.
\end{aligned}
$$

ここで初出の記号の定義は以下の通り:

- $\mathcal{U} = S \times U_R$, $\mathcal{P} = S \times \{0\}$ と置く.
- $\pi_{\mathcal{U}/S}$ は $\mathcal{U}$ から S への自然な projection である.
- $\mathring{\mathcal{X}}$ は $\mathrm{id} \times \mathrm{id} \times \pi : \mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty \times \mathring{X} \to \mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty \times Y$ による S の逆像である.
- $\pi_{\mathring{\mathcal{X}}/S} : \mathring{X} \to S$ を次のように定義する:

$$
\pi_{\mathring{\mathcal{X}}/S}(t,s,x) = (t,\ s,\ \pi(x) + \eta(s,x)) \qquad \big((t,s,x) \in \mathring{\mathcal{X}}\big).
$$

- $\mathbb{C}^\infty \times \mathbb{C}^\infty \times \mathring{X}$ 上の line bundle $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty} \boxtimes L|_{\mathring{X}}$ を $\mathring{\mathcal{X}}$ 上に制限したものを $\mathcal{L}_{\mathring{\mathcal{X}}}$ と書く.

- $\overset{\circ}{\mathcal{U}}$ は $\mathrm{id}\times\mathrm{id}\times\pi:\mathbb{C}^\infty\times\mathbb{C}^\infty\times\overset{\circ}{U}\to\mathbb{C}^\infty\times\mathbb{C}^\infty\times Y$ による S の逆像である.
- $\tilde{\imath}$ は次の同型の $\overset{\circ}{\mathcal{U}}$ 上への制限である:

$$\mathrm{id}\boxtimes\mathrm{id}\boxtimes\iota|_{\overset{\circ}{U}}:\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty}\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty}\boxtimes L|_{\overset{\circ}{U}}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty}\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty}\boxtimes\mathcal{O}_{\overset{\circ}{U}}=\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty\times\mathbb{C}^\infty\times\overset{\circ}{U}}.$$

$\mathcal{F}$ は w に関する Laurent 展開によって $\mathcal{O}_S((w))$ の $\mathcal{O}_S$ 部分加群とみなせる. さらに, Baker-Akhiezer 層 $\mathcal{BA}$ を次のように定める:

$$\mathcal{BA}=\mathcal{F}\,e^\xi=\{\,f\,e^\xi\mid f\in\mathcal{F}\,\}.$$

このとき, $f\,e^\xi\in\mathcal{BA}$ に対して, $\tilde{\imath}(\phi)(t,s,x)=f\big(t,\ s,\ \pi(x)+\eta(s,x),\ w(x)\big)\,e^{\xi(t,w(x))}$ を満たす $\phi\in\pi_{\overset{\circ}{\mathcal{X}}/S,*}\mathcal{L}_{\overset{\circ}{\mathcal{X}}}$ を対応させせることによって, $\mathcal{BA}$ は $\pi_{\overset{\circ}{\mathcal{X}}/S,*}\mathcal{L}_{\overset{\circ}{\mathcal{X}}}$ の $\mathcal{O}_S$ 部分加群とみなせる. 層 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty}\times\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty}$ への $\partial/\partial t_i$, $\partial/\partial s_j$ の自然な作用は $\phi\in\pi_{\overset{\circ}{\mathcal{X}}/S,*}\mathcal{L}_{\overset{\circ}{\mathcal{X}}}$ への $\partial/\partial t_i$, $\partial/\partial s_j$ の自然な作用を誘導する. そして, $\tilde{\imath}$ は $\mathrm{id}\boxtimes\mathrm{id}\boxtimes\iota|_{\overset{\circ}{U}}$ の $\overset{\circ}{\mathcal{U}}$ 上への制限だったので, $\partial/\partial t_i$, $\partial/\partial s_j$ の作用と可換である.

$\partial/\partial t_i$, $\partial/\partial s_j$ の ϕ への作用が f へのどのような作用を誘導するかを計算しよう:

$$\begin{aligned}\tilde{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\phi\right)(t,s,x)&=\frac{\partial}{\partial t_i}\Big(f\big(t,\ s,\ \pi(x)+\eta(s,x),\ w(x)\big)\,e^{\xi(t,w(x))}\Big)\\&=\left[\frac{\partial}{\partial t_i}(f\,e^\xi)\right]_{(t,s,y,w)\mapsto(t,\ s,\ \pi(x)+\eta(s,x),\ w(x))},\\\tilde{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial s_j}\phi\right)(t,s,x)&=\frac{\partial}{\partial s_j}\Big(f\big(t,\ s,\ \pi(x)+\eta(s,x),\ w(x)\big)\,e^{\xi(t,w(x))}\Big)\\&=\left[\left(\frac{\partial}{\partial s_j}+\lambda^j\frac{\partial}{\partial y}\right)(f\,e^\xi)\right]_{(t,s,y,w)\mapsto(t,\ s,\ \pi(x)+\eta(s,x),\ w(x))}.\end{aligned}$$

これより, $\mathcal{BA}$ には ∂/dt_i, $\partial/\partial s_j+\lambda^j\partial/\partial y$ が自然に作用していることがわかる.

以上で主要な構成は終了である. 結果をまとめるために,

$$R=H^0(S,\mathcal{O}_S),\qquad F=H^0(S,\mathcal{F}),\qquad \mathrm{BA}=F\,e^\xi=H^0(S,\mathcal{BA})$$

と置く. このとき, F は w に関する Laurent 展開によって $R((w))$ の R 部分加群とみなせる. R には t_i, s_j, y に関する derivation が自然に作用し, $x=t_1$ と置くことによって $\partial=\partial/\partial x$ も作用している. BA には ∂/dt_i, $\partial/\partial s_j+\lambda^j\partial/\partial y$ が自然に作用している. あとは, 第 2.1 節 と全く同様の議論によって次の定理が証明される.

Theorem 2.3 上の構成のもとで $F\in\mathrm{CBS}^\ell_\emptyset(R)$. よって, F に対応する波動函数 Ψ は ℓ-CBS 階層の解になっている. $\square$

Remark 2.4 上の定理の Ψ は $S\times U_{R,0}=\{(s,t,y,w)\}$ 上の正則函数であり, 以下の条件によって一意に特徴付けられる:

(WF1) Ψ は次のような形をしている:

$$\Psi(t,s,y,w)=(1+v_1(t,s,y)w+v_2(t,s,y)w^2+\cdots)w^{-1}\,e^{\xi(t,w)}.$$

ここで, $v_i\in H^0(S,\mathcal{O}_S)$, $\xi(t,w)=t_1w^{-1}+t_2w^{-2}+\cdots$.

(WF2) $\Phi\in H^0\Big(\mathring{\mathcal{X}},\ \mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty}\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty}\boxtimes L|_{\mathring{X}}\Big)$ で次を満たすものが唯一存在する:

$$\tilde{\iota}(\Phi)(t,s,x)=\Psi\big(t,\ s,\ \pi(x)+\eta(s,x),\ w(x)\big).$$

ここで, $\eta(s,w)=s_1w^{-j\ell}+s_2w^{-2\ell}+\cdots$ であり, $\tilde{\iota}$ は L の U 上での trivialization $\iota:L|_U\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_U$ から定まる同型

$$\mathrm{id}\boxtimes\mathrm{id}\boxtimes\iota:\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty}\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty}\boxtimes L|_U\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty}\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{C}^\infty}\boxtimes\mathcal{O}_U$$

の $\mathring{\mathcal{U}}$ 上への制限である.

この Ψ を幾何学的データ $Z=(\pi:X\to Y,D,w,L,\iota)$ に付随する波動函数と呼ぶ. □

Remark 2.5 CBS 方程式 (0.1), (0.2) における独立変数 (x,y,s) は $\ell=2$ の場合における (t_1,s_0,s_1) に対応している. s_0 は y 方向の平行移動を意味するパラメータなので, 曲線族の基底 Y 上の座標 y と CBS 方程式の独立変数 y は本質的に同じものだと考えて良い. □

3 隠れた対称性

ここで, 以上の構成の仕方について大雑把にまとめておこう.

KP 階層やその reduction である ℓ-KdV 階層および ℓ-KdV 階層の拡張である ℓ-CBS 階層の特殊解を代数幾何的構成するために, 単独の曲線もしくは曲線の族を考え, 点 P もしくは divisor D の近傍における貼り合わせ方を変えることによって, 幾何学的データの必要な変形を構成した.

より具体的には, line bundle の無限小変形は函数

$$w^{-1},\quad w^{-2},\quad w^{-3},\quad \ldots$$

によって与えられ, 曲線族の無限小変形はベクトル場

$$\frac{\partial}{\partial y},\quad w^{-\ell}\frac{\partial}{\partial y},\quad w^{-2\ell}\frac{\partial}{\partial y},\quad \ldots$$

によって与えられている. (これらを exponentiate すれば無限小でない変形が得られる.) ただし, $w^{-j\ell}$ $(j=1,2,\ldots)$ は $\dot{X}$ もしくは $\mathring{X}$ 上に正則に延長されて自明な変形を与えることになるので除外しておく.

上にリストアップされた函数とベクトル場は非可換な Lie 環

$$\mathcal{A}=\mathcal{O}_Y((w))\oplus\mathcal{O}_Y((w))\frac{\partial}{\partial w}\oplus\mathcal{O}_Y((w))\frac{\partial}{\partial y}$$

の可換 Lie 部分環を生成する.

このような考え方に基いて, ℓ-CBS 階層と曲線族に付随した幾何学的データの変形理論と toroidal Lie algebra[13] と呼ばれるある種の無限次元 Lie 環の関係を自然に解釈することができる.

共形場理論の枠組によって, 単独の曲線とその上の line bundle の組の変形理論は affine Lie 環と Virasoro 代数の理論と自然に関係している. 上の見方はその曲線族の場合への一般化だとみなせる.

Affine Lie 環の理論は上の記号法において変数 w しか登場しない場合に対応している. 我々が扱っている場合では新たに y という変数が登場し, その分だけ高次元化されている. 新たな変数 y に関する互いに可換なベクトル場 $w^{-j\ell}\partial/\partial y$ を考えることが, 実は ℓ-CBS 階層を考えることに対応しているのである. 単独変数 w に関するベクトル場 $f(w)\partial/\partial w$ は互いに全然可換ではない. 互いに可換なベクトル場を可算個用意することができたのは新たな変数 y を導入したおかげである[14].

参考文献

[1] Bogoyavlenskii, O. I.: Breaking solitons in 2 + 1-dimensional integrable equations, Russian Math. Surveys 45 (1990), no. 4, 1–86

[2] Calogero, F.: A method to generate solvable nonlinear evolution equations, Lett. Nuovo Cimento (2) 14 (1975), no. 12, 443–447.

[3] Calogero, F. and Degasperis, A.: Spectral transform and solitons, Vol. I: Tools to solve and investigate nonlinear evolution equations, Studies in Mathematics and its Applications 13, Lecture Notes in Computer Science 144, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, New York, Oxford, 1982, xv+516 pp.

[4] Dubrovin, B. A.: Theta functions and non-linear equations, Russian Math. Surveys 36:2 (1981), 11–92

[5] Ikeda, T. and Takasaki, K.: Toroidal Lie algebras and Bogoyavlensky's 2 + 1-dimensional equation, Internat. Math. Res. Notices 2001, no. 7, 329–369, `nlin.SI/0004015`

[6] Kawamoto, N., Namikawa, Y., Tsuchiya, A., and Yamada, Y.: Geometric realization of conformal field theory on Riemann surfaces, Comm. Math. Phys. 116 (1988), 247–308

[7] Korotkin, D. A.: Self-dual Yang-Mills fields and deformations of algebraic curves, Commun. Math. Phys. 134, (1990), no. 2, 397–412.

[13] toroidal Lie algebra の立場からの ℓ-CBS 階層の表現論的な研究に関しては [5] およびその参考文献を参照せよ.

[14] SDYM の場合には, 新たな変数を y^a $(a=1,2)$ と 2 つ用意し, 曲線の 2 次元族を考える. それに応じて, 変形パラメータも $s^a=(s^a_0,s^a_1,s^a_2,\dots)$ $(a=1,2)$ と 2 組用意しなければいけない. 4 次元 SDYM 方程式の 4 つの独立変数には $(s^1_0,s^1_1,s^2_0,s^2_1)$ が対応している. 詳しい定式化については, たとえば [14], [15] および [11] pp. 308-309, p. 397 を参照せよ.

[8] Krichever, I. M.: Methods of algebraic geometry in the theory of non-linear equations, Russian Math. Surveys 32:6 (1977), 185–213

[9] Maffei, A.: The multicomponent KP and Fay trisecant formula, International Mathematical Research Notices, 1996, No.16, 769–791

[10] Mumford, D: An algebro-geometric construction of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equation, Korteweg-de Vries equation and related non-linear equations, Proc. of Intl. Symp. on Alg. Geom., Kyoto 1977, 115–153

[11] 佐藤幹夫: 佐藤幹夫講義録, 1984 年度・1985 年度 1 学期, 梅田亨記, 数理解析レクチャー・ノート 5, 数理解析レクチャー・ノート刊行会, 1989 年 5 月, 576 pp.

[12] Schiff, J.: Integrability of Chern-Simons-Higgs vortex equations and a reduction of the self-dual Yang-Mills equations to three dimensions, Painlevé transcendents (Sainte-Adèle, PQ, 1990), 393–405, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., 278, Plenum, New York, 1992

[13] Segal, G. and Wilson, G.: Loop groups and equations of KdV type, Publ. Math. IHES, 61, 1985, 5–65

[14] Takasaki, K.: A new approach to the self-dual Yang-Mills equations, Comm. Math. Phys. 94 (1984), no. 1, 35–59

[15] Takasaki, K.: A new approach to the self-dual Yang-Mills equations II, Saitama Math. J. 3 (1985), 11–40

[16] 戸田盛和: 非線形波動とソリトン [新版], 日本評論社, 2000, xi+320 pp.